数理解析研究所講究録 1307 巻 2003 年 109-112

2相場の特異摂動問題について

北海道大学理学研究科　利根川　吉廣　(Yoshihiro Tonegawa)
Department of Mathematics,
Hokkaido University

本稿では2相分離を描写する Cahn-Hilliard 理論に現れる特異摂動問題について述べる。考える方程式は

$$\varepsilon\Delta u=\frac{W'(u)}{\varepsilon}+f \tag{1}$$

である。ここで関数 u はある適度に滑らかな境界を持つ有界領域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上に定義された実数値関数、W は u の値を変数として持つ実数値関数で ± 1 で最低値0を取るような関数である。例としてよく使われるものは $W(u)=(1-u^2)^2$ である。関数 f は一般には Ω 上定義されているものを考えるが、以下断らない限り簡略のため定数値関数とする。この方程式は汎関数

$$E_\varepsilon(v)=\int_\Omega\frac{\varepsilon|\nabla v|^2}{2}+\frac{W(v)}{\varepsilon}$$

の0ノイマン条件下での Euler-Lagrange 方程式である。つまりある実数 $m\in(-|\Omega|,|\Omega|)$ が与えられたときにエネルギー最小化問題

$$\min_{v\in H^1(\Omega),\int_\Omega v=m}E_\varepsilon(v) \tag{2}$$

を考えると、最小解は存在して式 (1) を満たす。他にも局所的にエネルギーを最小化するような解や、Mountain Path 定理を使ってその存在が示すことが出来るような不安定解もあり、考察対象としてエネルギー最小解のみが興味深いというわけではない。

まずはエネルギー最小解の状況から考えてみよう。ここでは特に ε がとても小さいとする。第2項を最小化しようとすると u は全ての点で ± 1 となるのが最善であるが、第1項がそれでは大変大きくなってしまう。反対に第1項を小さくしようとすると u は定数関数に近ければよいが、しかし第2項がそれでは大きくなってしまう。よってこの2項をバランスよく小さくするためには、± 1 の領域をほぼ ε オーダーの界面領域でつなげるような u であるとよい。すると $\varepsilon\approx 0$ であれば $\frac{\varepsilon|\nabla u|^2}{2}dx$ と $\frac{W(u)}{\varepsilon}dx$ はこの界面上でのデルタ関数となりそうなことが予想できる。またエネルギーを最小化するものは、最小の界面面積を持つものが望ましいことも予想できる。よって図式的には

$$E_\varepsilon\text{ の停留点の界面領域}\quad\approx\quad\text{超曲面の面積汎関数の停留点}$$

の予想ができる。後者はいわゆる極小曲面（体積条件付きでは定平均曲率曲面）である。エネルギー最小解については８０年代中頃に L. Modica, P. Sternberg 等がいわゆる Γ-収束の枠組みの中で上記の内容を示している。参考のためにその内容を以下説明する。$\varepsilon_i > 0$、$i = 1, 2, \cdots$ を０に収束するような任意の実数列とする。これら ε_i に対応する (2) の最小化問題解を u_i と呼ぶことにすると、

定理（[5, 6]）ある部分列 $\{u_i\}$（同じ記号を用いる）とその極限 $u \in BV(\Omega)$ が存在して
(i) $\int_\Omega |u_i - u| \to 0$ かつ L^n ほとんど全ての点で $u_i(x) \to u(x)$ が成り立つ。
(ii) $u(x) = \pm 1$ が L^n ほとんど全ての点で成り立つ。
(iii) 同積分制限のもと ± 1 の値をほとんど全ての点でとる関数の中で u の界面面積は最小である。

体積条件のもと面積を最小化する界面は、幾何測度論でよく知られているように補次元７以上の閉特異点を除いた部分では滑らかな超曲面であり、定平均曲率をもつ。その定平均曲率は、$\varepsilon_i \Delta u_i = W'(u_i)/\varepsilon_i + c_i$ で、$c = \lim c_i$ としたときにはその c によって決定されている（[4]）。また局所的にエネルギーを最小化する解の存在についても同様な手法を用いてその Γ-収束についての結果がある（[3]）。これらの手法はエネルギー最小の仮定に大きく依存しており、一般解についての知見は直接的には得られない結果である。一般解で、エネルギー最小解の仮定がない場合については領域内部の収束結果を著者が Hutchinson との共同研究で得た（[2]）。基本的には期待される結果がそのままの形ですべて成り立つという結果である。キーポイントとなった点を以下手短に説明する。上に述べた‘ ≈ ’を考えると、極小曲面の理論の模倣をするのがひとつの有力な方法であろう。極小曲面の測度論的扱いをするにあたって基本的な性質のひとつにいわゆるエネルギー単調性がある。これは極小曲面上の点 x から距離 r 内に含まれる曲面面積を $M(r)$ とおき、関数

$$g(r) = \frac{1}{r^{n-1}} M(r)$$

を定義したときに、この g が r に関して単調非減少であると言う性質である。この結果として、極小曲面には細い cusp 状の超曲面はないというようなことも分かる。この模倣をしてみると自然考えられる量は

$$g(r) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_{n-1}} \int_{B_r(x)} \frac{\varepsilon |\nabla u|^2}{2} + \frac{W(u)}{\varepsilon}$$

である。というのも２項それぞれ ε が小さいときには界面領域に集中した測度に近いはずであり、ある意味でその面積を測っている量になっているからである。r に関する g の微分を方程式 (1) を使って計算してみると主として

２項が出てくる。１項に関しては正の符号で問題ないのだが、もう１項は

$$\frac{1}{r^n}\int_{B_r(x)}\frac{W(u)}{\varepsilon}-\frac{\varepsilon|\nabla u|^2}{2}$$

となり、見たところは正符号になるとは限らない量となっている。g が単調非減少であること、またはそれに準ずる性質を持つことを示すにはよって $\xi=\frac{\varepsilon|\nabla u|^2}{2}-\frac{W(u)}{\varepsilon}$ を上から各点で ε によらない評価することが求められる。ξ はある微分不等式を満たし、それを使って実際に各点評価が可能であることが [2] で示された。(1) において一般変数 f の場合では [8] で同様の結果を得た。特筆すべき他の点としては $\frac{\varepsilon|\nabla u|^2}{2}dx$ の（測度としての）極限が大げさに言えば量子化しているということである。つまりその極限測度を μ と呼ぶことにすると、その (n-1)-次元密度である

$$\theta(x)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^{n-1}\omega_{n-1}}\mu(B_r(x))$$

は $(n-1)$-次元測度に関してほとんど全ての点で μ のサポート上、整数値（ただし適当な W による定数で割った後）になっているという点である。これはやはり期待される結果であると言うほかはないが、証明は varifold 収束の概念が不可欠な要素となっており、見掛けの方程式の単純さに比べて込み入った証明にならざるを得なくなっている。以上の結果は領域内部に限ったものであるが、$\partial\Omega$ 近傍での界面領域の収束についてはどうなっているかと言うと、[9] において領域が凸で０ノイマン条件下においては関数 ξ の各点評価が単純な最大値原理で求まることが示された。これにより境界点中心のエネルギー単調非減少を [1] の手法を使って示すことが出来た。特に u_i の境界領域が $\bar{\Omega}$ 内でハウスドルフ距離の意味で極限に収束していることが示せ、結果として安定解の特異摂動に関する [7] の結果を強めることも出来た。領域が凸ではない場合も部分的な結果が得られるが、障害問題のような状況も考えられるために非凸部分においては単純には問題が解決しない可能性がある。

以上は上で述べた‘ $\approx$ ’がどれ程成り立っているかについての探求の一部であるが、他にもこの２つには類似する事実が知られている。

1. (2) の第２変分で適切なテスト関数を用いると、安定な解に対してその分離面に対する第２基本形式の L^2 ノルムに似たものが出てくる（例えば [7] 参照）。極小曲面に対しては安定性をもちいる有名な Schoen-Simon の結果があるが、今のところ類似の結果は２相場の極限に対しては知られていない。実際、(2) のエネルギー汎関数に対して安定な解は、極限で面積汎関数に関して安定な分離界面に収束するかどうかも知られていない。ある意味で (2) のエネルギーが‘第１変分までの近似’であることは分かっているわけだが、‘第２変分の近似’にもなってるかどうかということである。この点に関しての理解はまだあまりなされていない。
2. 有名な Bernstein の定理は、‘ $n\leq 7$ なら $\mathbf{R}^n$ 内の超曲面で超平面上のグラフとして表せる極小曲面は超平面のみである’というものである。こ

の類似は以下のように考えられる。方程式 (1) で $f = 0$、$\Omega = \mathbf{R}^n$ とする。この場合 (1) は変数変換をすれば単に $\Delta u = W'(u)$ となる。仮定として $\frac{\partial u}{\partial x_n} > 0$ が $\mathbf{R}^n$ 上で成り立っているとする。すると各等高面は超平面上のグラフとして表せるが、予想としてこの超曲面は平面である、というのがそれである。この方面に関しては最近 C. Gui、X. Cabre、L. Ambrosio 等が活発に研究を行っており、低次元に関しては正しいことが示されている。

参考文献

[1] Grüter, M., Jost, J. *Allard type regularity results for varifolds with free boundaries*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 13 (1986), no. 1, 129–169

[2] Hutchinson, J.E., Tonegawa, Y. *Convergence of phase interfaces in the van der Waals - Cahn - Hilliard theory*, Calc. Var. 10 (2000) 49–84

[3] Kohn, R., Sternberg, P. *Local minimizers and singular perturbations*, Proc. Roy. Soc. Edin. 111A (1989), no. 1-2, 69–84

[4] Luckhaus, S., Modica, L. *The Gibbs-Thompson relation within the gradient theory of phase transitions*, Arch. Rational Mech. Anal. 107 (1989), no. 1, 71–83

[5] Modica, L. *The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion*, Arch. Rational Mech. Anal. 98 (1987), no. 2, 123–142

[6] Sternberg, P. *The effect of a singular perturbation on nonconvex variational problems*, Arch. Rational Mech. Anal. 101 (1988), no. 3, 209–260

[7] Sternberg, P., Zumbrun, K. *Connectivity of phase boundaries in strictly convex domains*, Arch. Rational Mech. Anal. 141 (1998), no. 4, 375–400

[8] Tonegawa, Y. *Phase field model with a variable chemical potential*, to appear in Pro. Roy. Soc. Edin.

[9] Tonegawa, Y. *Domain dependent monotonicity formula for a singular perturbation problem* Preprint