数理解析研究所講究録 1309 巻 2003 年 84-91

Local Asymptotic Stability for a Lotka-Volterra System with Distributed Delays

Shinji NAKAOKA, Tadayuki HARA and Hideaki MATSUNAGA
(大阪府立大学大学院工学研究科　中岡慎治　原 惟行　松永秀章)
Dept. of Math. Sciences, Osaka Prefecture University

1. 序文

個体群動力学 (population dynamics) の分野において, 常微分方程式で表される Lotka-Volterra 方程式系は 1920 年代から盛んに研究が行われ, 解の挙動や性質なども詳しく調べられており, 現代では古典的な Lotka-Volterra 微分方程式系と呼ばれている ([8]). 他方, 時間遅れをもつ微分方程式で表される Lotka-Volterra 方程式系は, 近年多くの研究者の注目を集め幅広い研究報告がなされている.

一般に, 対象となる時間遅れをもつ Lotka-Volterra 微分方程式系は 2 つのタイプに分類される. 1 つは時間遅れを持たない種内間競争項 (instantaneous feedback) を含むタイプで, これらの項は他の時間遅れを持つ種内, 他種間競争項に対して優位に働く. このような方程式系を "no-pure-delay" タイプと呼ぶ. もう 1 つは時間遅れを持たない種内間競争項を含まないタイプの方程式系で, このような方程式系を "pure-delay" タイプと呼ぶ. 筆者が知る限りにおいて, no-pure-delay タイプの研究は数多く報告されているが (例えば [1], [4]), pure-delay タイプについてはあまり報告されていない ([3],[5],[7],[9]).

本論文では, 次の distributed delay を持つ pure-delay タイプの Lotka-Volterra 捕食者被食者方程式系

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\left[r_1 - a_{11}\displaystyle\int_{-\tau}^{0} x(t+s)\,d\mu(s) - a_{12}\int_{-\tau}^{0} y(t+s)\,d\mu(s)\right] \\ y'(t) = y(t)\left[-r_2 + a_{21}\displaystyle\int_{-\tau}^{0} x(t+s)\,d\mu(s) - a_{22}\int_{-\tau}^{0} y(t+s)\,d\mu(s)\right] \end{cases} \tag{1.1}$$

を考える. ここで $x(t)$, $y(t)$ はそれぞれ被食者, 捕食者の個体数密度を表し, r_i, a_{ij} $(i,j=1,2)$, τ は正の定数とする. $\mu : [-\tau, 0] \to \mathbf{R}$ は $[-\tau,0]$ において非減少で $(-\tau,0)$ において左側連続で $\int_{-\tau}^{0} d\mu(s) = 1$ とする. 初期条件は

$$\begin{cases} x(s) = \phi(s) \in C([-\tau,0],[0,+\infty)), \quad \phi(0) > 0, \\ y(s) = \psi(s) \in C([-\tau,0],[0,+\infty)), \quad \psi(0) > 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

で与えられる. このとき (1.2) を満たす方程式系 (1.1) の解は $[0,+\infty)$ で一意的に存在し, $x(t)>0$, $y(t)>0$ である. 今

$$a_{21}r_1 - a_{11}r_2 > 0 \tag{1.3}$$

を仮定すると, 方程式系 (1.1) はただ一つの内部平衡点 (x^*, y^*) をもつ. ここで

$$x^* = \frac{a_{22}r_1 + a_{12}r_2}{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}}, \quad y^* = \frac{a_{21}r_1 - a_{11}r_2}{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}}.$$

本論文の目的は, 方程式系 (1.1) の内部平衡点 (x^*, y^*) の局所的漸近安定性に関する結果を導くことである. 2 節では, 2 次元線形関数微分方程式系の零解が一様漸近安定になるための具体的な必要十分条件を導出する. 3 節において, 2 節で得られた結果を方程式系 (1.1) の内部平衡点まわりでの線形化方程式系に適用し, (x^*, y^*) の局所的漸近安定性に関する結果を導く.

2. 線形系の漸近安定性

次の distributed delay を持つ 2 次元線形関数微分方程式系を考えよう:

$$\mathbf{x}'(t) = A\int_{-\tau}^{0} \mathbf{x}(t+s)\,d\mu(s). \tag{2.1}$$

ここで A は 2×2 定数行列, τ は正の定数, $\mu : [-\tau, 0] \to \mathbf{R}$ は $[-\tau, 0]$ において非減少で $(-\tau, 0)$ において左側連続とする. 更に, μ に関して

$$\mu(s) + \mu(-\tau - s) = \mu(0) + \mu(-\tau) \qquad a.e. \quad s \in [-\tau, 0] \tag{2.2}$$

を仮定する. このとき $\mu(s)$ は $s = -\tau/2$ に関して対称であることに注意する. さて, 係数行列 A が回転行列と三角行列の場合, 既に (2.1) の零解が一様漸近安定であるための具体的な必要十分条件が導出されている ([6]).

定理 A. [6] 条件 (2.2) かつ

$$A = -\rho R(\theta) \equiv -\rho\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \quad \rho\in\mathbf{R}, \ |\theta| \le \pi/2$$

とする. このとき, 方程式系 (2.1) の零解が一様漸近安定になるための必要十分条件は $\mu(0) > \mu(-\tau)$, $\rho > 0$, $|\theta| < \pi/2$ かつ

$$\rho\int_{-\tau}^{0}\cos\left\{\frac{\tau+2s}{\tau}\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right)\right\}d\mu(s) < \frac{\pi - 2|\theta|}{\tau}. \tag{2.3}$$

定理 B. [6] 条件 (2.2) かつ

$$A = -T \equiv -\begin{pmatrix}a_1 & b\\ 0 & a_2\end{pmatrix}, \quad a_1, a_2, b \in \mathbf{R}$$

とする. このとき, 方程式系 (2.1) の零解が一様漸近安定になるための必要十分条件は $\mu(0) > \mu(-\tau)$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ かつ

$$a_i \int_{-\tau}^{0} \cos\left(\frac{\tau + 2s}{\tau}\frac{\pi}{2}\right) d\mu(s) < \frac{\pi}{\tau} \qquad (i = 1, 2). \tag{2.4}$$

以下, 表記の簡単のため, I_1 と I_2 を次のように定める:

$$I_1 \equiv \int_{-\tau}^{0} \cos\left[\frac{\tau + 2s}{\tau}\left\{\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{|\frac{1}{2}\mathrm{tr}A|}{\sqrt{\det A}}\right)\right\}\right] d\mu(s),$$

$$I_2 \equiv \int_{-\tau}^{0} \cos\left(\frac{\tau + 2s}{\tau}\frac{\pi}{2}\right) d\mu(s).$$

ここで, μ は $[-\tau, 0]$ において非減少であり, I_1, I_2 の被積分関数は $[-\tau, 0]$ においてともに正なので, $I_1 > 0$, $I_2 > 0$ であることに注意する. 今回, 一般の 2×2 定数行列 A に関して次の定理を得た:

定理 2.1. 条件 (2.2) を仮定する. このとき, 方程式系 (2.1) の零解が一様漸近安定であるための必要十分条件は $\mu(0) > \mu(-\tau)$, $\mathrm{tr}A < 0$, $\det A > 0$ かつ
(i) $(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A < 0$ のとき,

$$I_1\sqrt{\det A} < \frac{\pi - 2\cos^{-1}\left(|\frac{1}{2}\mathrm{tr}A|/\sqrt{\det A}\right)}{\tau}. \tag{2.5}$$

(ii) $(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A \geq 0$ のとき,

$$-\mathrm{tr}A < \frac{I_2\tau\det A}{\pi} + \frac{\pi}{\tau I_2} \quad \text{かつ} \quad \det A < \left(\frac{\pi}{\tau I_2}\right)^2. \tag{2.6}$$

証明. 行列 A の固有方程式は

$$\lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda + \det A = 0 \tag{2.7}$$

で与えられる.

(i) $\underline{D \equiv (\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A < 0 \text{ の場合}}$. このとき (2.7) は複素根を持つので, ある正則行列 P が存在し

$$P^{-1}AP = -\rho R(\theta), \quad \rho \in \mathbf{R}, \ |\theta| \leq \pi/2 \tag{2.8}$$

と表せる. したがって, $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$ とおくと, 方程式系 (2.1) は

$$\mathbf{y}'(t) = -\rho R(\theta)\int_{-\tau}^{0} \mathbf{y}(t+s)\, d\mu(s) \tag{2.9}$$

に変換される. よって (2.1) の零解の一様漸近安定性と (2.9) の零解の一様漸近安定性は同値であるから, 定理 A より

$$\rho > 0, |\theta| < \frac{\pi}{2} \iff \mathrm{tr}A < 0, \det A > 0 \tag{2.10}$$

及び (2.10) の下で (2.3) と (2.5) の同値性を示せば証明が完了する. 実際, (2.8) より

$$\det A = \det(-\rho R(\theta)) = \rho^2, \tag{2.11}$$

$$\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}(-\rho R(\theta)) = -2\rho\cos\theta \tag{2.12}$$

が成り立つ. $|\theta| \leq \pi/2$ に注意すると, (2.10) の同値性は簡単に確認できる. 次に (2.10) の下で (2.3) と (2.5) の同値性を示すために,

$$\rho = \sqrt{\det A}, \tag{2.13}$$

$$|\theta| = \cos^{-1}\left(\frac{|\frac{1}{2}\mathrm{tr}A|}{\sqrt{\det A}}\right) \tag{2.14}$$

を導こう. 上に述べたように, (2.13) は既に得られている. (2.14) を導出しよう. (2.11) と (2.12) から

$$\cos\theta = \frac{-\mathrm{tr}A}{2\rho} = \frac{-\mathrm{tr}A}{2\sqrt{\det A}}.$$

$D < 0$ なので $0 < -\mathrm{tr}A/(2\sqrt{\det A}) < 1$ である. 従って $\cos^{-1}$ を両辺に作用させると (2.14) が得られる. 故に (2.10), (2.13), (2.14) から (2.3) と (2.5) の同値性も成り立つ.

(ii) $\underline{D \geq 0 \text{ の場合}}$. このとき (2.7) は実根を持つので, ある正則行列 Q が存在して

$$Q^{-1}AQ = -T, \quad a_1,\, a_2,\, b \in \mathbf{R} \tag{2.15}$$

と表せる. したがって, $\mathbf{y}(t) = Q^{-1}\mathbf{x}(t)$ とおくと, 方程式系 (2.1) は

$$\mathbf{y}'(t) = -T\int_{-\tau}^{0} \mathbf{y}(t+s)\,d\mu(s) \tag{2.16}$$

に変換される. よって (i) の場合と同様にして

$$a_1 > 0, a_2 > 0 \Longleftrightarrow \mathrm{tr}A < 0, \det A > 0 \tag{2.17}$$

及び (2.17) の下で (2.4) と (2.6) の同値性を証明すれば完了する. ここで, 一般性を失うことなく $a_1 \leq a_2$ としてよい. 今, (2.15) より $\det A = \det(-T) = a_1a_2$, $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}(-T) = -(a_1 + a_2)$ なので, $\lambda = -a_1, -a_2$ は固有方程式 (2.7) の根である. 従って (2.17) が成り立つ. 特に, a_1, a_2 は

$$-a_1 = \frac{\mathrm{tr}A + \sqrt{(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A}}{2}, \quad -a_2 = \frac{\mathrm{tr}A - \sqrt{(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A}}{2}. \tag{2.18}$$

次に, (2.17) の下で (2.4) と (2.6) の同値性を証明するために, $0 < a_1I_2 \leq a_2I_2 < \pi/\tau$ を変形しよう. ここで, (2.17) と $a_1 \leq a_2$ より $a_1 > 0$ は $\mathrm{tr}A < 0$, $\det A > 0$ と同値で

あることがわかるので, 後は $a_2 I_2 < \pi/\tau$ の場合のみを考えればよい.

$$a_2 I_2 < \frac{\pi}{\tau} \Longleftrightarrow \frac{-\mathrm{tr}A + \sqrt{(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A}}{2} < \frac{\pi}{\tau I_2}$$
$$\Longleftrightarrow \mathrm{tr}A + \frac{2\pi}{\tau I_2} > \sqrt{(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A}$$
$$\Longleftrightarrow \mathrm{tr}A + \frac{2\pi}{\tau I_2} > 0 \quad \text{かつ} \quad \left(\mathrm{tr}A + \frac{2\pi}{\tau I_2}\right)^2 > (\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A.$$

従って (2.4) は

$$-\mathrm{tr}A < \frac{2\pi}{\tau I_2} \quad \text{かつ} \quad -\mathrm{tr}A < \frac{\tau I_2 \det A}{\pi} + \frac{\pi}{\tau I_2} \tag{2.19}$$

と同値である. このとき

$$\frac{2\pi}{\tau I_2} > \frac{\tau I_2 \det A}{\pi} + \frac{\pi}{\tau I_2} \quad \left(\Longleftrightarrow \det A < \left(\frac{\pi}{\tau I_2}\right)^2\right) \tag{2.20}$$

である. なぜなら

$$\frac{2\pi}{\tau I_2} \leq \frac{\tau I_2 \det A}{\pi} + \frac{\pi}{\tau I_2} \tag{2.21}$$

と仮定すると, (2.19) より

$$0 < -\mathrm{tr}A < \frac{2\pi}{\tau I_2} \tag{2.22}$$

が成り立つ. (2.21), (2.22) から

$$\det A \geq \left(\frac{\pi}{\tau I_2}\right)^2 > \frac{1}{4}(\mathrm{tr}A)^2$$

となり $D = (\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A \geq 0$ に矛盾する. 従って (2.20) の下で (2.19) は (2.6) と同値であることがわかるので証明が完了する. □

最後に, 定理 2.1 の系を導こう. $\mu(s) = s$ とすることにより, 方程式系 (2.1) は連続的時間遅れを持つ次の線形関数微分方程式系

$$\mathbf{x}'(t) = A \int_{t-\tau}^{t} \mathbf{x}(s)\, ds \tag{2.23}$$

になる. このとき

$$I_1 = \frac{\tau|\mathrm{tr}A|}{\sqrt{\det A}\left\{\pi - 2\cos^{-1}\left(|\frac{1}{2}\mathrm{tr}A|/\sqrt{\det A}\right)\right\}}, \quad I_2 = \frac{2\tau}{\pi}$$

であるから, 定理 2.1 より直ちに次の系が得られる:

系 2.1. 方程式系 (2.23) の零解が一様漸近安定であるための必要十分条件は $\mathrm{tr}A < 0$, $\det A > 0$ かつ
(i) $D < 0$ のとき,

$$-\mathrm{tr}A > 2\sqrt{\det A}\sin\left(\frac{\tau\sqrt{|\mathrm{tr}A|}}{2}\right). \tag{2.24}$$

(ii) $D \geq 0$ のとき,

$$-\mathrm{tr}A < \frac{\pi^2}{2\tau^2} + \frac{2\tau^2 \det A}{\pi^2} \quad \text{かつ} \quad \det A < \left(\frac{\pi^2}{2\tau^2}\right)^2. \tag{2.25}$$

3. 局所的漸近安定性

本節では, 方程式系 (1.1) の内部平衡点 (x^*, y^*) が局所的漸近安定になるための十分条件を導出する. そのために, まず方程式系 (1.1) の (x^*, y^*) のまわりでの線形化方程式を求める. 変数変換

$$\bar{x} = x - x^*, \quad \bar{y} = y - y^*$$

を行うと, 方程式系 (1.1) は

$$\begin{cases} x'(t) = (x(t) + x^*)\left[-a_{11}\displaystyle\int_{-\tau}^{0} x(t+s)\,d\mu(s) - a_{12}\int_{-\tau}^{0} y(t+s)\,d\mu(s)\right] \\ y'(t) = (y(t) + y^*)\left[a_{21}\displaystyle\int_{-\tau}^{0} x(t+s)\,d\mu(s) - a_{22}\int_{-\tau}^{0} y(t+s)\,d\mu(s)\right] \end{cases} \tag{3.1}$$

となる. ここで $x(t)$, $y(t)$ を $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ の代わりとして再び使用した.

方程式系 (3.1) を線形化すると,

$$\begin{cases} x'(t) = -a_{11}x^*\displaystyle\int_{-\tau}^{0} x(t+s)\,d\mu(s) - a_{12}x^*\int_{-\tau}^{0} y(t+s)\,d\mu(s) \\ y'(t) = a_{21}y^*\displaystyle\int_{-\tau}^{0} x(t+s)\,d\mu(s) - a_{22}y^*\int_{-\tau}^{0} y(t+s)\,d\mu(s). \end{cases} \tag{3.2}$$

$\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))^T$ として 線形化方程式系 (3.2) をベクトル表記すると

$$\mathbf{z}'(t) = A\int_{-\tau}^{0} \mathbf{z}(t+s)\,d\mu(s) \tag{3.3}$$

となる. ここで

$$A = \begin{pmatrix} -a_{11}x^* & -a_{12}x^* \\ a_{21}y^* & -a_{22}y^* \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

方程式系 (1.1) と方程式系 (3.2) の間に次の補題が成立することが知られている.

補題 3.1. [2, Theorem 5.2., pp.281-282] 方程式系 (3.2) の零解が一様漸近安定であるならば, 方程式系 (1.1) の内部平衡点 (x^*, y^*) は局所的漸近安定である.

補題 3.1. [2, p.281] 方程式系 (3.2) の零解が一様漸近安定であるならば, 方程式系 (1.1) の内部平衡点 (x^*, y^*) は局所的漸近安定である.

行列 A が (3.4) で与えられる場合, 補題 3.1 により定理 2.1 の条件 (2.5), (2.6) を仮定すると, (1.1) の内部平衡点 (x^*, y^*) は局所的漸近安定になる. しかし条件式が複雑になるので, 簡明な条件を持つ場合を定理として与える. 即ち

$$a_{11} = a_{22} = \alpha,\ a_{12} = a_{21} = \beta,\ r_1 = r_2 = r,\ \mu(s) = \frac{s}{\tau} \tag{3.5}$$

の場合を考えよう. このとき (1.3) は $\beta > \alpha$ となることに注意する. よって, 定理 2.1 から内部平衡点 (x^*, y^*) の局所的漸近安定性に関する次の定理が得られる.

定理 3.1. (3.5) かつ $\beta > \alpha$ と仮定する.
(i) $\alpha^4 - \beta^4 + \alpha^2\beta^2 < 0$ のとき,

$$r\tau < \frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta}\left\{\sin^{-1}\left(\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^4-\alpha^4}}\right)\right\}^2 \tag{3.6}$$

(ii) $\alpha^4 - \beta^4 + \alpha^2\beta^2 \geq 0$ のとき,

$$r\tau < \frac{\pi^2}{2}\frac{\alpha\beta - \sqrt{\alpha^4-\beta^4+\alpha^2\beta^2}}{\beta^2-\alpha^2} \tag{3.7}$$

ならば, 方程式系 (1.1) の内部平衡点 (x^*, y^*) は局所的漸近安定である.

証明. $\mathrm{tr}A$ と $\det A$ の値を 系 2.1 の (2.24), (2.25) に代入すればよい. ここで $\mathrm{tr}A$ と $\det A$ は

$$\mathrm{tr}A = -\frac{2\alpha\beta r}{(\alpha^2+\beta^2)\tau} < 0, \qquad \det A = \frac{(\beta^2-\alpha^2)r^2}{(\alpha^2+\beta^2)\tau^2} > 0$$

である. 簡単な計算により $D = (\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A < 0$ は $\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 - \beta^4 < 0$ と同値であることがわかる. 従ってまず初めに $\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 - \beta^4 < 0$ の場合を考えよう. (2.24) を変形すると,

$$\begin{aligned}(2.24) \iff& \frac{2\alpha\beta r}{(\alpha^2+\beta^2)\tau} > \frac{2r}{\tau}\sqrt{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}}\sin\left(\frac{\tau}{2}\sqrt{\frac{2\alpha\beta r}{(\alpha^2+\beta^2)\tau}}\right)\\ \iff& \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^4-\alpha^4}} > \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha\beta r\tau}{2(\alpha^2+\beta^2)}}\right).\end{aligned}$$

$\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 - \beta^4 < 0$ なので, $0 < \alpha\beta/\sqrt{\beta^4-\alpha^4} < 1$ である. 従って $\sin^{-1}$ を両辺に作用させることにより (3.6) を得る.

次に $\alpha^4+\alpha^2\beta^2-\beta^4\geq 0$ の場合, (2.25) の1つ目の不等式を変形すると

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{tr}A<\frac{\pi^2}{2\tau^2}+\frac{2\tau^2\det A}{\pi^2} &\iff \frac{2\alpha\beta r}{(\alpha^2+\beta^2)\tau}<\frac{\pi^2}{2\tau^2}+\frac{2r^2\tau^2(\beta^2-\alpha^2)}{\pi^2\tau^2(\beta^2+\alpha^2)}\\
&\iff \frac{\beta^2-\alpha^2}{\pi^2}(r\tau)^2-\alpha\beta(r\tau)+\frac{(\alpha^2+\beta^2)\pi^2}{4}>0\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} r\tau<\dfrac{\pi^2}{2}\dfrac{\alpha\beta-\sqrt{\alpha^4+\alpha^2\beta^2-\beta^4}}{\beta^2-\alpha^2},\\[2ex] r\tau>\dfrac{\pi^2}{2}\dfrac{\alpha\beta+\sqrt{\alpha^4+\alpha^2\beta^2-\beta^4}}{\beta^2-\alpha^2}.\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

(2.25) の2つ目の不等式を変形すると

$$\det A<\left(\frac{\pi^2}{2\tau^2}\right)^2\iff r\tau<\frac{\pi^2}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}}.$$

紙面の都合上途中の計算は省略するが, 次の不等式が得られる:

$$\frac{\pi^2}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}}<\frac{\pi^2}{2}\frac{\alpha\beta+\sqrt{\alpha^4+\alpha^2\beta^2-\beta^4}}{\beta^2-\alpha^2}. \tag{3.8}$$

従って (3.8) により, (2.25) が (3.7) と同値であることがわかる. □

参考文献

[1] K. Gopalsamy, *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London 1992.

[2] J. K. Hale and S. M. V. Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[3] X.-Z. He, Stability and delays in a predator-prey system - II, *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems* **7** (2000), no. 2, 177–187.

[4] Y. Kuang, *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press, San Diego, 1993.

[5] W. Ma and Y. Takeuchi, Stability analysis on a predator-prey system with distributed delays, *J. Comput. Appl. Math.* **88** (1998), 79–94.

[6] R. Miyazaki, Analysis of characteristic roots of delay-differential systems. Differential equations and dynamical systems (Waterloo, ON, 1997). *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems* **5** (1999), 195–207.

[7] Y. Saito, Permanence and global stability for general Lotka-Volterra predator-prey systems with distributed delays, *Nonlinear Anal.* **47** (2001), 6157–6168.

[8] Y. Takeuchi, *Global Dynamical Properties of Lotka-Volterra Systems*, World Scientific, Singapore, 1996.

[9] J. Zhen and Z. Ma, Stability for a competitive Lotka-Volterra sysytem with delays, *Nonlinear Anal.* **51** (2002), 1131–1142.