数理解析研究所講究録 1309 巻 2003 年 108-115

On the asymptotic stability of the zero solution of generalized Liénard systems with parameters − Local implies Global? −

島根大学 総合理工学部　杉江実郎 (Jitsuro Sugie)
島根大学 総合理工学研究科　松村直俊 (Naotoshi Matsumura)
Department of Mathematics
Shimane University

1. 序文

正のパラメータ k をもつ Liénard 型方程式系

$$\begin{cases} \dot{x} = \varphi(y) - F(x;k), \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \tag{1}$$

を考える．ここで，$\dot{} = d/dt$, 変数 x, y の範囲は

$$(r_1, r_2) \times \mathbb{R} \quad \text{where} \quad -\infty \le r_1 < 0 < r_2 \le \infty$$

とする．関数 $\varphi(y)$, $g(x)$ は C^1–級で，$F(x;k)$ は x に関して C^2–級，k に関して C^1–級であるとし，条件

$$\varphi(y) \ \text{ is strictly increasing for } \ y \in \mathbb{R} \ \text{ and } \ \varphi(0) = 0, \quad \frac{d}{dy}\varphi(y)\bigg|_{y=0} > 0, \tag{2}$$

$$F(0;k) = 0 \quad \text{for} \quad k > 0, \qquad xg(x) > 0 \quad \text{if} \quad x \neq 0 \tag{3}$$

を満たすとする．このとき，原点は方程式系 (1) の唯一の平衡点である．また

$$G(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^x g(\sigma)d\sigma$$

と定義し，$w = G(x)\mathrm{sgn}x$ の逆関数を $G^{-1}(w)$ と表す．さらに，特性曲線 $y = \varphi^{-1}(F(x;k))$ の定義域を

$$(s_1, s_2) \quad \text{where} \quad r_1 \le s_1 < 0 < s_2 \le r_2$$

とする．

Liénard 型方程式系は，様々な分野で登場する ([1, 2, 6] 参照)．例えば，生物学での生態モデルや感染モデルの研究においてはしばしばそれが見られる．よって，この方程式系の零解の大域的漸近安定性や，limit cycle の一意的存在性を研究することは，最も重要な課題のひとつであるといえる．Liénard 型方程式系において，零解が局所的に漸近安定であるための条件，または大域的に漸近安定であるための条件については，これまでに多くの研究がある．しかし，零解が大域的漸近安定であるかどうかを局所的漸近安定であるための条件によって判定する，言い換えると，零解が局所的漸近安定であることと大域的漸近安定であることが同値となるための前提条件を考えるような研究はこれまでにない．しかし，零解の局所的漸近安定条件がその大域的漸近安定条件を兼ねるというモデルが存在することが報告されている (例えば，[3–5])．まず，それらのモデルの一例を紹介する．

次の方程式系

$$
\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = ru\left(1-\dfrac{u}{k}\right) - \dfrac{u^p v}{a+u^p}, \\ \dfrac{dv}{d\tau} = v\left(\dfrac{\mu u^p}{a+u^p} - D\right) \end{cases} \tag{4}
$$

は Holling 型 functional response をもつ predator–prey system である．ここで，u と v はそれぞれ prey (餌) と predator (捕食者) の個体数 (個体濃度) を表し，a, D, k, p, r, μ はそれぞれ生物学的な意味をもつ正のパラメータである．また，$u^p/(a+u^p)$ は Holling 型応答関数 (functional response) と呼ばれる．さらに

$$
\lambda_p = \sqrt[p]{\frac{aD}{\mu - D}}, \qquad \nu_p = \frac{r\mu}{D}\left(1 - \frac{\lambda_p}{k}\right)\lambda_p
$$

とおくと，条件

$$
\mu > D \quad \text{and} \quad k > \lambda_p \tag{5}
$$

が成り立つならば，方程式系 (4) は唯一の正の平衡点 $E^*(\lambda_p, \nu_p)$ をもつ．Sugie らの一連の論文 [3–5] をまとめると，方程式系 (4) において，次の結果が成り立つ．

Theorem A.　方程式系 (4) を考える．条件 (5) のもとで，平衡点 $E^*(\lambda_p, \nu_p)$ が大域的漸近安定であるための必要十分条件は

$$
(pD - (p-1)\mu)k \le (pD - (p-2)\mu)\lambda_p \tag{6}
$$

である．

Theorem A の証明は，方程式系 (4) を同値な Liénard 型方程式系に変換することによって行われる．方程式系 (4) に対する線形化方程式系の平衡点 E^* でのヤコビアンを計算すると，条件 (6) は方程式系 (4) の平衡点 E^* が局所的漸近安定であるための十分条件であることがわかる．ゆえに，変換された Liénard 型方程式系においては，零解が局所的漸近安定であることと大域的漸近安定であることが同値になっているというわけである．

本研究の目的は，Liénard 型方程式系 (1) において，零解が局所的漸近安定であることと大域的漸近安定であることが同値となるための前提条件を求めることである．

2. 準備

主定理を証明するためにいくつか準備が必要となる．まず，方程式系 (1) の零解が局所的に漸近安定であるための条件について述べる．方程式系 (1) を線形化した方程式系の原点でのヤコビアンを調べることにより，次のことがわかる．ただし，$' = d/dx$ である．

Theorem 1.　方程式系 (1) において，次が成り立つ．

(i) $F'(0;k) > 0$ かつ $g'(0) > 0$ ならば，零解は局所的漸近安定である．

(ii) $F'(0;k) < 0$ ならば，零解は不安定である．

しかし，(iii) $F'(0;k)=0$ や (iv) $F'(0;k)>0$ かつ $g'(0)=0$ のとき，方程式系 (1) の線形化方程式系の零解は中立安定となり，この場合は線形化方程式系の情報だけでは方程式系 (1) の零解の安定性の判定ができない．そこで，(iii) や (iv) のときも，方程式系 (1) の零解が局所的漸近安定であるためには，どのような条件が揃えばよいかが残された問題となる．実は

(C_1) 方程式系 (1) のすべての解が有界である，

(C_2) 方程式系 (1) が homoclinic trajectory をもたない，

(C_3) 方程式系 (1) が閉軌道をもたない

という 3 つの条件が揃えば，方程式系 (1) の原点の近傍のすべての正の半軌道は原点の周りを回転し続け，解の一意性と Poincaré–Bendixson の定理から，零解は漸近安定であることがわかる．よって，条件 (C_1)–(C_3) を満たすためには，それぞれどのような条件が必要かを議論しなければならない．

まず，条件 (C_1) の解の有界性については，これまでに数多くの研究がある．よって，解の有界性を示す際は，それらの関連論文を参照すればよい．今ここでそれらの条件を 1 つ 1 つ取り挙げると煩雑になるので，本研究においては，方程式系 (1) の解の有界性は仮定して話を進める．

次に，条件 (C_2) の homoclinic trajectory について説明する．解軌道のうち，その α–極限集合と ω–極限集合がともに原点のみであるものを，homoclinic trajectory と呼ぶ．方程式系 (1) がこのような解軌道をもつならば，零解は安定ではない．homoclinic trajectory の非存在性に関しては Sugie and Hara [1] の研究があるが，そこで対象としているのは，方程式系 (1) において $\varphi(y)=y$ の場合だけである．よって，その結果を拡張する必要があった．その成果が次の定理である．

Theorem 2. 方程式系 (1) を考える．定数 $m>0$ に対して，条件

$$\varphi(y)\ge my \quad \text{for} \quad y>0 \quad \text{sufficiently small},$$

$$|F(x;k)|\le\sqrt{m}\left\{2\sqrt{2G(x)}-h\left(\sqrt{2G(x)}\right)\right\}$$

$$\text{for} \quad x>0 \quad \text{or} \quad x<0,\ |x| \quad \text{sufficiently small}$$

を仮定する．ここで，$h(\sigma)$ は非負の連続関数で条件

$$\frac{h(\sigma)}{\sigma} \quad \text{is non–decreasing and not greater than} \quad 2 \quad \text{for} \quad \sigma>0 \quad \text{sufficiently small},$$

$$\int_0^{\sigma_0}\frac{h(\sigma)}{\sigma^2}d\xi=\infty \quad \text{for some} \quad \sigma_0>0$$

を満たすとする．このとき，方程式系 (1) は homoclinic trajectory をもたない．

実は，Theorem 2 は関数 $F(x;k)$ と $g(x)$ が x に関して区間 (r_1,r_2) 上で連続で，$(r_1,r_2)\backslash\{0\}$ 上で局所 Lipschitz 連続であるならば成り立つ結果である．方程式系 (1) のように，$F(x;k)$ と $g(x)$ に C^1–級という仮定がある場合には，次のような簡単な記述で homoclinic trajectory の非存在が保証できる．

Theorem 3. 方程式系 (1) において，$g'(0)>0$ が成り立つならば，homoclinic trajectory は存在しない．

最後に，条件 (C_3) の方程式系 (1) が閉軌道をもたないための条件について述べる．前述したように，閉軌道が存在しないことは，零解が局所的漸近安定であるためには必要である．もちろん，零解の大域的な漸近安定性を議論する上でも不可欠な条件である．次の定理は Sugie and Hara [2] によって与えられた閉軌道の非存在に関する結果である．

Theorem B (Sugie and Hara). 方程式系 (1) において，$W = \min\{G(r_1),\ G(r_2)\}$ とおく．このとき

(7) $$F\left(G^{-1}(-w);k\right) \neq F\left(G^{-1}(w);k\right) \quad \text{for} \ \ 0 < w < W \ \ \text{and} \ \ k > 0$$

ならば，閉軌道は存在しない．

Theorem B は，方程式系 (1) が閉軌道をもたないことを示すのに役立つが，パラメータをいくつか含む具体的なモデルでは，$G(x)$ が複雑な形をしていることが多く，逆関数 $G^{-1}(w)$ を求めることが困難である．そのため，条件 (7) の解析的な表現を，次のように幾何的な表現を用いて言い換える．

Theorem C. 方程式系 (1) において，x をパラメータとする平面曲線 $(F(x;k), G(x))$ が自分自身と交わらないならば，閉軌道は存在しない．

Theorem C の中に出てくる曲線 $(F(x;k), G(x))$ の性質について概説する．関数 $G(x)$ は $r_1 < x < 0$ において単調減少し，$0 < x < r_2$ において単調増加する．また，$G(0) = 0$ であるから，曲線 $(F(x;k), G(x))$ の $r_1 < x < 0$ の部分は自分自身と交わらないし，$0 < x < r_2$ の部分も自分自身と交わらないことがわかる．したがって，曲線 $(F(x;k), G(x))$ が自分自身と交わらないならば

$$r_1 < x_1 < 0 < x_2 < r_2 \quad \text{and} \quad G(x_1) = G(x_2)$$

を満たす任意の x_1, x_2 に対して

$$F(x_1;k) \neq F(x_2;k)$$

でなければならない．

関数 $F(x;k)$ は x に関して C^2–級であるから，$F'(0;k)$ を考えることができる．3 節と 4 節では，この $F'(0;k)$ について場合分けして主定理を述べる．3 節では $F'(0;k)$ が零点をもつ場合を考え，4 節では $F'(0;k)$ が零点をもたない場合を考える．

3. 主定理 ($F'(0;k)$ が零点をもつ場合)

まず，条件

(8) $$\exists k^* > 0 \quad \text{s.t.} \quad F'(0;k^*) = 0$$

を仮定する．このとき，$F'(0;k)$ が k について連続であり，条件

(9) $$(k - k^*)F'(0;k) < 0 \quad \text{for} \ \ k > 0$$

が成り立つならば，$F'(0;k)$ は唯一の零点 $k = k^*$ をもち

$$\begin{cases} F'(0;k) > 0 \quad \text{for} \ \ 0 < k < k^*, \\ F'(0;k^*) = 0, \\ F'(0;k) < 0 \quad \text{for} \ \ k > k^* \end{cases}$$

となる．また，曲線 $(F(x;k),G(x))$ 上の各点における接線の傾きの逆数と，曲線 $(F(x;k),G(x))$ 上の各点と原点とを結ぶ直線の傾きの逆数をそれぞれ

$$\Gamma(x;k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F'(x;k)}{g(x)}, \qquad \Delta(x;k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F(x;k)}{G(x)}$$

と定義する．明らかに，$\Gamma(x;k)$ と $\Delta(x;k)$ は $x=0$ では定義されない．本研究によって得た定理は次のとうりである．

Theorem 4. 方程式系 (1) において，$F'(0;k)$ は k について連続とし，条件 (8), (9) を仮定する．さらに，条件

(10) all solutions of (1.1) are bounded,

(11) $$g'(0) > 0,$$

(12) $$\Gamma(x;k^*) \ \text{ or } \ \Delta(x;k^*) \ \text{ is strictly increasing for } \ x \neq 0,$$

(13) $$\lim_{x\to r_1} F(x;k) < \lim_{x\to r_2} F(x;k),$$

(14) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial k}F(x;k) \geq 0 & \text{for } \ r_1 < x < 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial k}F(x;k) \leq 0 & \text{for } \ 0 < x < r_2 \end{cases}$$

を満たすとする．このとき，次が成り立つ．

零解が局所的漸近安定：[LAS] $\iff$ 零解が大域的漸近安定：[GAS].

Proof. [GAS] $\Rightarrow$ [LAS] は明らかであるから，[LAS] $\Rightarrow$ [GAS] の部分を示せばよい．まず，零解が局所的漸近安定であることと同値な条件を求める．次に，[LAS] $\Rightarrow$ [GAS] であることを示す．

(I) 最初に，$0 < k \leq k^*$ の k に対して，方程式系 (1) が閉軌道をもたないことを示す．まず，$k = k^*$ のときについて考える．仮定より

$$F(0;k^*) = F'(0;k^*) = G(0) = g(0) = 0$$

であることに注意すると，ロピタルの定理から

$$\lim_{x\to 0} \Delta(x;k^*) = \lim_{x\to 0} \Gamma(x;k^*) = \lim_{x\to 0} \frac{F''(x;k^*)}{g'(x)}$$

である．そこで

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{F''(x;k^*)}{g'(x)}$$

とおく．ただし，l の値は正にも負にも零にもなり得る．しかし，$l = \pm\infty$ となることはない．実際，$l = \infty$ ならば

$$\lim_{x\to +0} \Gamma(x;k^*) = \lim_{x\to -0} \Gamma(x;k^*) = \infty$$

である．これは $\Gamma(x;k^*)$ が単調増加であることに矛盾する．ここで

$$\Gamma(0;k^*) = \Delta(0;k^*) = l$$

とすると，関数 $\Gamma(x;k^*)$ と $\Delta(x;k^*)$ は開区間 (r_1, r_2) 上で連続関数となる．したがって，条件 (12) より，$\Gamma(x;k^*)$ または $\Delta(x;k^*)$ が狭義に単調増加するならば，曲線 $(F(x;k^*), G(x))$ の概形を考慮すると，曲線 $(F(x;k^*), G(x))$ の $r_1 < x < 0$ の部分と $0 < x < r_2$ の部分が，原点を通る傾き $1/l$ の直線によって分離されることになる．ゆえに，曲線 $(F(x;k^*), G(x))$ は自分自身と交わらないから，Theorem C より，$k = k^*$ のとき方程式系 (1) は閉軌道をもたない．

次に，$0 < k < k^*$ に対して，方程式系 (1) が閉軌道をもたないことを示す．$k = k^*$ のとき，曲線 $(F(x;k^*), G(x))$ は自分自身と交わらないから

$$r_1 < x_1 < 0 < x_2 < r_2, \qquad G(x_1) = G(x_2)$$

を満たす任意の x_1, x_2 に対して

$$F(x_1;k^*) < F(x_2;k^*) \tag{15}$$

である．条件 (14) より，$0 < k < k^*$ に対して

$$F(x;k) \leq F(x;k^*) \quad \text{for} \quad r_1 < x < 0, \tag{16}$$
$$F(x;k^*) \leq F(x;k) \quad \text{for} \quad 0 < x < r_2 \tag{17}$$

が成り立つ．ゆえに，(15)–(17) を合わせると

$$r_1 < x_1 < 0 < x_2 < r_2, \qquad G(x_1) = G(x_2)$$

を満たす任意の x_1, x_2 に対して

$$F(x_1;k) \leq F(x_1;k^*) < F(x_2;k^*) \leq F(x_2;k) \quad \text{for} \quad 0 < k < k^*$$

となる．これは，$0 < k < k^*$ の k に対して，曲線 $(F(x;k), G(x))$ が自分自身と交わらないことを意味する．したがって，Theorem C より，方程式系 (1) は閉軌道をもたない．

以上より，$0 < k \leq k^*$ に対して，方程式系 (1) は閉軌道をもたないことが示せた．

(II)　Theorem 1 より，$g'(0) > 0$ のもとでは，$F'(0;k) > 0$ ならば零解は局所的漸近安定で，$F'(0;k) < 0$ ならば不安定である．また，条件 (10) から方程式系 (1) のすべての軌道は有界である．さらに，条件 (11) から，Theorem 3 より，方程式系 (1) は homoclinic trajectory をもたない．これらと (I) の閉軌道の非存在性を合わせると，2 節で述べたように，$F'(0;k) = 0$,すなわち $k = k^*$ のときも，方程式系 (1) の零解は局所的に漸近安定であることがわかる．よって

$$0 < k \leq k^* \quad \Longleftrightarrow \quad F'(0;k) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{零解が局所的漸近安定：[LAS]}$$

が成り立つ．

(III)　次に，零解が局所的漸近安定であると仮定する．(I) と (II) より，零解が局所的漸近安定であるとき，閉軌道は存在しない．したがって

- 零解が局所的漸近安定である，
- すべての解が有界である，
- 閉軌道は存在しない

の 3 つが成り立つから，Poincaré–Bendixson の定理より，方程式系 (1) の零解は大域的漸近安定であることがわかる． □

Theorem 4 において，条件 (13) の不等式の向きが逆の場合は，次のようにすればよい．

Theorem 5. 方程式系 (1) において，$F'(0;k)$ は k について連続とし，条件 (8)–(11) を仮定する．さらに，条件

(18) $$\Gamma(x;k^*) \ \text{or} \ \Delta(x;k^*) \ \text{is strictly decreasing for} \ x \neq 0,$$

(19) $$\lim_{x\to r_1} F(x;k) > \lim_{x\to r_2} F(x;k),$$

(20) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial k}F(x;k) \leq 0 & \text{for} \ r_1 < x < 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial k}F(x;k) \geq 0 & \text{for} \ 0 < x < r_2 \end{cases}$$

を満たすとする．このとき，次が成り立つ．

零解が局所的漸近安定 : [LAS] $\iff$ 零解が大域的漸近安定 : [GAS].

4. 主定理 ($F'(0;k)$ が零点をもたない場合)

次に，$F'(0;k)$ が零点をもたない場合を考える．Theorem 1 より，$F'(0;k) < 0$ ならば方程式系 (1) の零解は不安定であるから，零解の大域的漸近安定性を議論するとき

(21) $$F'(0;k) > 0 \quad \text{for} \ k > 0$$

と仮定しなければならない．ここで

$$H(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} F(x;k)$$

と定義する．ただし，$H(x)$ は任意の $x \in (r_1, r_2)$ に対して，連続であるとする．そこで

(22) $$H'(0) = 0$$

と定義すれば，$k^* = \infty$ と解釈できる．同様にして

$$\widetilde{\Gamma}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{H'(x)}{g(x)}, \qquad \widetilde{\Delta}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{H(x)}{G(x)}$$

と定義する．証明は Theorem 4 のときと同様に行えば，次が成り立つ．ただし，曲線 $(H(x), G(x))$ が Theorem 4 での曲線 $(F(x;k^*), G(x))$ に対応する．

Theorem 6. 方程式系 (1) において，条件 (10), (11), (13), (14), (21), (22) を仮定する．さらに，条件

(23) $$\widetilde{\Gamma}(x) \ \text{or} \ \widetilde{\Delta}(x) \ \text{is strictly increasing for} \ x \neq 0,$$

を満たすとする．このとき，次が成り立つ．

零解が局所的漸近安定 : [LAS] $\iff$ 零解が大域的漸近安定 : [GAS].

条件 (13) の不等式の向きが逆の場合も，同様に Theorem 5 に対応する定理が得られる．

ここで，$k^* = \infty$ の場合は，曲線 $(H(x), G(x))$ が傾き $1/l$ の直線と一致していてもかまわないことに注意する．しかし，$0 < k < \infty$ の k に対しては，曲線 $(F(x;k), G(x))$ が自分自身と交わってはならない．このことを考慮すると，次のような結果が成り立つ．

Theorem 7. 方程式系 (1) において，条件 (10), (11), (13), (21), (22) を仮定する．さらに，条件

(24) $$\widetilde{\Gamma}(x) \ \text{ or } \ \widetilde{\Delta}(x) \ \text{ is non-decreasing for } \ x \neq 0,$$

(25) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial k}F(x;k) > 0 & \text{for } \ r_1 < x < 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial k}F(x;k) < 0 & \text{for } \ 0 < x < r_2 \end{cases}$$

を満たすとする．このとき，次が成り立つ．

零解が局所的漸近安定 : [LAS] $\Longleftrightarrow$ 零解が大域的漸近安定 : [GAS].

Theorem 6 と Theorem 7 を比較すると，条件 (23) が条件 (24) へ弱くなり，条件 (14) が条件 (25) へ強くなっている．

5. 今後の課題

方程式系 (1) の零解が局所的漸近安定であるための条件として，homoclinic trajectory が存在しないことが必要であった．そのため，本研究では方程式系 (1) に対する homoclinic trajectory の非存在定理を導いたが，逆に存在するための十分条件を求めることも興味深い課題として残っている．

参考文献

[1] J. Sugie and T. Hara, *Existence and non-existence of homoclinic trajectories of the Liénard system,* Disc. Conti. Dynam. Syst. **2** (1996), 237–254.

[2] J. Sugie and T. Hara, *Non-existence of periodic solutions of the Liénard system,* J. Math. Anal. Appl. **159** (1991), 224–236.

[3] J. Sugie and M. Katayama, *Global asymptotic stability of a predator-prey system of Holling type,* Nonlinear Anal. **38** (1999), 105–121.

[4] J. Sugie, R. Kohno and R. Miyazaki, *On a predator-prey system of Holling type,* Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2041–2050.

[5] J. Sugie, K. Miyamoto and K. Morino, *Absence of limit cycles of a predator-prey system with a sigmoid functional response,* Appl. Math. Lett. **9** (1996), 85–90.

[6] 吉沢 太郎, 微分方程式入門, 朝倉書店 (1967).