数理解析研究所講究録 1309 巻 2003 年 181-188

遅れ型関数微分方程式に対する1つの同定問題

神戸大学工学部　中桐 信一 (Shin-ichi Nakagiri)
岡山理科大学理学部　春木 茂 (Shigeru Haruki)

1 はじめに

X を実数体 $\mathbf{R}$ 上の Banach 空間とする。最近 Lorenzi [2] は、次の同定問題を研究した。与えられた初期値 u_0 と入力値 $\varphi \in X$ 及び観測値 $G \in C^1([0,T];\mathbf{R})$ に対し、次の方程式系を満たす解 $u \in C^1([0,T];X)$ とスカラー外力関数 $f \in C^1([0,T];\mathbf{R})$ を一意的に決定できるか?

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} - Au(t) = f(t)\varphi, \quad \forall t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \\ \Phi[u(t)] = G(t), \quad \forall t \in [0,T]. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで、Φ は X の共役空間 X^* の元であり既知の観測作用素である。

Lorenzi は、この同定問題を A が X 上の線形有界作用素、つまり $A \in \mathcal{L}(X)$ であり、$\Phi[\varphi] \neq 0$ であるという条件のもとで、肯定的に解いた。同時に、対 (u,f) の積空間 $C([0,T];X) \times C([0,T];\mathbf{R})$ における u_0, φ, Φ, G 及び $\|A\|$ を用いたノルム評価を導いた。さらに、Lorenzi はその結果を同じ本 [2] において、次の2階の微分方程式

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} - A_1\frac{du(t)}{dt} - A_2u(t) = f(t)\varphi \tag{1.2}$$

および、1階の微分積分方程式

$$\frac{du(t)}{dt} - Au(t) + \int_0^t h(t-s)Bu(s)ds = F(t) \tag{1.3}$$

に拡張した。ここで、(1.2) においては、A_1, $A_2 \in \mathcal{L}(X)$、また (1.3) においては、A, $B \in \mathcal{L}(X)$、$h \in C([0,T];\mathbf{R})$ および $F \in C([0,T];X)$ を仮定している。

この原稿の目的は、Lorenzi の結果を Banach 空間 X 上の、次の遅れ型関数微分方程式

(FDE) に拡張することである。

$$\frac{du(t)}{dt} = A_0 u(t) + \sum_{r=1}^{m} A_r u(t-h_r) + \int_{-h}^{0} A_I(s) u(t+s) ds. + f_0(t)\varphi \tag{1.4}$$

方程式 (1.4) において、

$$0 < h_1 < \cdots < h_m \leq h, \quad A_r \in \mathcal{L}(X), \quad r = 0, 1, \cdots, m$$

及び

$$A_I(s) \in \mathcal{L}(X), \quad \text{a.e. } s \in [-h, 0]$$

を仮定する。遅れ型方程式 (1.4) の初期条件は、

$$u(0) = g^0, \quad u(s) = g^1(s), \quad \text{a.e. } s \in [-h, 0) \tag{1.5}$$

で与える。Lorenzi [2] と同様に 初期値問題 (1.4)、(1.5) の解 $u(t)$ は、次の $\Phi \in X^*$ により観測される。

$$\Phi[u(t)] = G(t), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{1.6}$$

我々は、与えられたデータ g^0, g^1, φ, Φ, G から決定される観測系 (1.4), (1.5), (1.6) から、対 u, f_0 が一意的に同定できるかどうかの問題を調べる。

また、 方程式 (1.4) の作用素 A_r、$A_I(s)$ 及び 初期値 (1.5) の同定問題については、スペクトル論を用いる結果 Nakagiri-Yamamoto [4], [5] がある事を注意しておく。この結果を使うと、適当な条件のもとで作用素や初期値も一意的に決定することができる。

2 仮定と準備

X を実 Banach 空間とし、そのノルムを $\|\cdot\|$ で表す。$h > 0$ を固定し $1 < p < \infty$ とする。A_r と $A_I(s)$ について、次の 2 つの仮定をおく。

(A1) 作用素 A_r, $r = 0, 1, \cdots, m$ は、有界、即ち $A_r \in \mathcal{L}(X)$.

(A2) 作用素関数 $A_I(\cdot)$ は、次の積分条件をみたす。

$$A_I(\cdot) \in L_q(-h, 0; \mathcal{L}(X)), \qquad 1/p + 1/q = 1.$$

我々は、X における次の遅れ型のＦＤＥの初期値問題を考える。

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = A_0 u(t) + \displaystyle\sum_{r=1}^{m} A_r u(t-h_r) + \int_{-h}^{0} A_I(s) u(t+s) ds + f(t), \quad \text{a.e.} \quad t \in [0,T] \\ u(0) = g^0, \qquad u(s) = g^1(s) \quad \text{a.e.} \quad s \in [-h, 0). \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで、問題 (2.1) において初期条件と外力は次の仮定をみたすとする。

$$g^0 \in X, \quad g^1 \in L_p(-h, 0;\ X), \quad f \in L_p(0, T;\ X). \tag{2.2}$$

積空間 $M_p = X \times L_p(-h, 0;\ X)$ は、問題 (2.1) の状態空間とよばれる。この空間は、次のノルムにより Banach 空間になる。

$$\|g\|_{M_p} = \left(\|g^0\|^p + \int_{-h}^{0} \|g^1(s)\|^p ds \right)^{1/p}, \qquad g = (g^0, g^1) \in M_p. \tag{2.3}$$

問題 (2.1) に対する解の存在、一意性および正則性について次の Proposition がなりたつ。この Proposition は、Delfour [1] により証明されている。

Proposition 1 (A1) と (A2) を仮定する。このとき、任意の $g = (g^0, g^1) \in M_p$ および $f \in L_p(0, T; X)$ に対して、問題 (2.1) の唯一つの解 u が存在して、この u は空間 $W^{1,p}(0, T; X)$ に属す。さらに、ある定数 C_T が存在して次の評価式が成り立つ。

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} \le C_T \left(\|g\|_{M_p} + \|f\|_{L_p(0,T;X)} \right). \tag{2.4}$$

以下において、簡単のため $h_0 = 0$ とおく。同定問題を解くために、次の遅れ部分に関する有界性の Proposition が必要になる。

Proposition 2 作用素 $K:\ L_p(-h, T; X) \to L_p(0, T; H)$ を次により定義する。

$$(Kw)(t) = \sum_{r=0}^{m} A_r w(t-h_r) + \int_{-h}^{0} A_I(s) w(t+s) ds, \quad \text{a.e.} \quad t \in [0, T]. \tag{2.5}$$

このとき、K は線形かつ有界であり、次のノルム評価を持つ。

$$\|K\|_{\mathcal{L}(L_p(-h,T;X), L_p(0,T;X))} \le \sum_{r=0}^{m} \|A_r\| + \|A_I(\cdot)\|_{L_q(-h,0;\mathcal{L}(X))} T^{1/p}. \tag{2.6}$$

ここで、$\|A_r\|$ は $\mathcal{L}(X)$ における作用素ノルムである。

(証明) Hölder 不等式を使って計算すればよい。まず、(2.5) の最後の積分項を考える。$w \in L_p(-h,T;X)$ とする。仮定 (A2) により Hölder 不等式 を使うと次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\| \int_{-h}^0 A_I(s)w(t+s)ds \right\|^p dt &\le \int_0^T \left(\int_{-h}^0 \|A_I(s)\|^q ds \right)^{\frac{p}{q}} \int_{-h}^0 \|w(t+s)\|^p ds\, dt \\
&\le \|A_I(\cdot)\|^p_{L_q(-h,0;\, \mathcal{L}(X))} \int_0^T \int_{-h}^T \|w(s)\|^p ds\, dt \\
&\le \|A_I(\cdot)\|^p_{L_q(-h,0;\, \mathcal{L}(X))} T\, \|w\|^p_{L_p(-h,T;X)}. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

前の離散遅れ項は、仮定 (A1) を用いて次の様に評価できる。

$$\int_0^T \|A_r w(t-h_r)\|^p dt \le \|A_r\|^p \int_{-h}^T \|w(t)\|^p dt, \quad r = 0,1,\cdots,m. \qquad (2.8)$$

(2.7) と (2.8) から、求める評価式 (2.6) が従う。

3　FDEの同定定理

(2.1) に対する同定問題を解くために、外力項 f は次の形で与えられているとする。

$$f(t) = f_0(t)\varphi, \quad f_0 \in L^2(0,T;\mathbf{R}), \quad \varphi \in X. \qquad (3.1)$$

ここで、 f_0 は未知のスカラー関数であり、φ は X に含まれる既知の元とする。また、$\Phi \in X^*$ として解のスカラー観測 $G(t)$ は、次で与えられる。

$$G(t) = \Phi[u(t)], \qquad \forall t \in [0,T]. \qquad (3.2)$$

解は、正則性 $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ を持つので、$G \in W^{1,p}(0,T;\mathbf{R})$ であり、

$$\frac{dG(t)}{dt} = \Phi\left[\frac{du(t)}{dt}\right], \qquad \text{a.e. } \ t \in [0,T] \qquad (3.3)$$

が成り立つ。次の形で FDEの同定問題 (IP) を定式化する。

問題 (IP) 与えられた $g = (g^0, g^1) \in M_p$, $\Phi \in X^*$ および $G \in W^{1,p}(0,T;\mathbf{R})$ に対して、FDEで記述される次の観測系から、解 $u \in W^{1,p}(0,T;H)$ および スカラー外力 $f_0 \in L_p(0,T;\mathbf{R})$ を一意的に決定せよ。

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \displaystyle\sum_{r=0}^m A_r u(t-h_r) + \int_{-h}^0 A_I(s)u(t+s)ds + f_0(t)\varphi, & \text{a.e. } \ t \in [0,T] \\ u(0) = g^0, \qquad u(s) = g^1(s) \quad \text{a.e.} \quad s \in [-h,0) \\ \Phi[u(t)] = G(t), \qquad t \in [0,T]. \end{cases} \qquad (3.4)$$

この問題 (IP) を解くことを考える。(3.4) の最初の方程式に $\Phi \in X^*$ を作用させると、

$$\frac{dG(t)}{dt} = \Phi\left[\sum_{r=0}^{m} A_r u(t-h_r) + \int_{-h}^{0} A_I(s)u(t+s)ds\right] + f_0(t)\Phi[\varphi], \quad \text{a.e. } t \in [0,T] \tag{3.5}$$

がいえる。今 $\Phi[\varphi] \neq 0$ と仮定する。このとき、(3.5) より f_0 は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \Phi[\varphi]^{-1}\frac{dG(t)}{dt} \\ &\quad -\Phi[\varphi]^{-1}\Phi\left[\sum_{r=0}^{m} A_r u(t-h_r) + \int_{-h}^{0} A_I(s)u(t+s)ds\right], \quad \text{a.e. } t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

さて、 $W(t)$ を方程式 (2.1) の基本解とする。このとき、$W(t)$ は、強連続であり、(3.4) の解 $u(t)$ は次の形で表現できる。

$$u(t) = W(t)g^0 + \int_{-h}^{0} U_t(s)g^1(s)ds + \int_0^t W(t-s)f_0(s)\varphi ds, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.7}$$

ここで、

$$U_t(s) = \sum_{r=1}^{m} \chi_{[-h_r,0]}(s)W(t-s-h_r)A_r + \int_{-h}^{s} W(t-s+\xi)A_I(\xi)d\xi, \quad \text{a.e. } t \in [0,T] \tag{3.8}$$

であり、$\chi_{[-h_r,0]}$ は 区間 $[-h_r, 0]$ 上の特性関数を表す。さらに、$U_t \in L_q(-h,0;\ \mathcal{L}(X))$ なる事も確かめられる。これらの証明は、Nakagiri [3] を参照されたい。

また Proposition 1 により、写像

$$f \longmapsto W * f = \int_0^{\cdot} W(\cdot - s)f(s)ds$$

は、$L_p(0,T;X)$ から $W^{1,p}(0,T;X)$ の中への線形作用素になる。さらに Hölder 不等式を使うと次の評価が得られる。

$$\|W * f\|_{L_p(0,T;X)} \le T^{1/p}\|W(\cdot)\|_{L_q(0,T;\mathcal{L}(X))}\|f\|_{L_p(0,T;X)}, \quad \forall f \in L_p(0,T;X). \tag{3.9}$$

f_0 の表示式 (3.6) を定数変化公式 (3.7) に代入すると、次の u に関する遅れ型の積分方程式が得られる。

$$\left\{\begin{aligned} & u(t) = W(t)g^0 + \int_{-h}^{0} U_t(s)g^1(s)ds + \Phi[\varphi]^{-1}\int_0^t W(t-s)G'(s)\varphi ds \\ & \qquad -\Phi[\varphi]^{-1}\int_0^t W(t-s)\Phi\left[\sum_{r=0}^{m} A_r u(s-h_r) + \int_{-h}^{0} A_I(\xi)u(s+\xi)d\xi\right]\varphi ds, \quad t \in [0,T] \\ & u(s) = g^1(s) \quad \text{a.e. } s \in [-h,0). \end{aligned}\right. \tag{3.10}$$

ここで、$G'(s) = \dfrac{dG(s)}{dt}$ である。この積分方程式の解として $u(t)$ を見出そう。まず、

$$\theta(t) = W(t)g^0 + \int_{-h}^{0} U_t(s)g^1(s)ds + \Phi[\varphi]^{-1}\int_0^t W(t-s)G'(s)\varphi ds \tag{3.11}$$

とおく。このとき Proposition 1 により、$\theta \in W^{1,p}(0,T;X)$ である。次に $w \in L_p(0,T;X)$ に対し、作用素 $S \in \mathcal{L}(L_p(0,T;X))$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
&(Sw)(t) = \Phi[\varphi]^{-1}(W * (\Phi[K\bar{w}]\varphi))(t) \\
= \ & \Phi[\varphi]^{-1}\int_0^t W(t-s)\Phi\left[\sum_{r=0}^{m} A_r\bar{w}(s-h_r) + \int_{-h}^{0} A_I(s+\xi)\bar{w}d\xi\right]\varphi ds, \quad t \in [0,T].
\end{aligned}$$

ここで、w の拡張 $\bar{w}$ は、次で与えられる。

$$\bar{w}(t) = \begin{cases} w(t) & \text{a.e.} \quad t \in [0,T] \\ g^1(t) & \text{a.e.} \quad t \in [-h,0). \end{cases}$$

従って、(3.10) の解は次の作用素方程式の不動点として求められる。

$$u = Fu \equiv \theta - Su \quad \text{in} \ \ L_p(0,T;X). \tag{3.12}$$

まず、十分小さな $T_0 < T$ に対して、F が空間 $L_p(0,T_0;X)$ 上で縮小写像になっていることを示そう。以下簡単のため、全ての作用素ノルムを $\|\cdot\|$ で表す。u_1, $u_2 \in L_p(0,T;\ X)$ とすると、(3.9), (3.12) および Proposition 2 により、次の評価が得られる。

$$\begin{aligned}
&\|Fu_1 - Fu_2\|_{L_p(0,T;X)} = \|Su_1 - Su_2\|_{L_p(0,T;X)} \\
\leq \ & T^{1/p}|\Phi[\varphi]|^{-1}\|W(\cdot)\|\|\Phi[K(\overline{u_1-u_2})]\varphi\|_{L_p(0,T;X)} \\
\leq \ & T^{1/p}|\Phi[\varphi]|^{-1}\|W(\cdot)\|\|\Phi\|\|\varphi\|\|K\|\|u_1-u_2\|_{L_p(0,T;X)}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

ここで、$\|W(\cdot)\| = \|W(\cdot)\|_{L_q(0,T;\mathcal{L}(X))}$ である。従って、T_0 が条件

$$T_0 < \left(\frac{|\Phi[\varphi]|}{\|W(\cdot)\|\|\Phi\|\|\varphi\|\|K\|}\right)^p \tag{3.14}$$

をみたすならば、F は $L_p(0,T_0;X)$ 上の縮小写像になる。この事から、作用素方程式 (3.12) は、唯一つの 解 u を持つ。

次に、f_0 を区間 $[0,T_0]$ 上で、ここで得られた u と $G'(t)$ を用いて

$$\begin{aligned}
f_0(t) = \ & \Phi[\varphi]^{-1}G'(t) \\
& -\Phi[\varphi]^{-1}\Phi\left[\sum_{r=0}^{m} A_r u(t-h_r) + \int_{-h}^{0} A_I(s)u(t+s)ds\right], \quad \text{a.e.} \quad t \in [0,T_0]
\end{aligned}$$

により定義する。この時、対 (u, f_0) は 観測系 (3.4) において方程式を $[0, T_0]$ でみたし、初期条件をみたす。さらに、(3.4) の最初の方程式に Φ を掛け、方程式 (3.6) を使う事により、

$$G'(t) = \Phi\left[\frac{du}{dt}(t)\right], \quad a.e.\ t \in [0, T_0]$$

が得られる。両立条件 $G(0) = \Phi[g^0]$ を仮定すると、この式を $[0, t]$ 上で積分することにより

$$G(t) = \Phi[u(t)], \qquad \forall t \in [0, T_0]$$

が示される。つまり、対 (u, f_0) は 観測系 (3.4) の全ての方程式を区間 $[0, T_0]$ 上でみたす。

次のステップに進む。T_0 を条件 (3.14) をみたすようにとり、固定する。区間 $[0, T_0]$ 上での $\tilde{u}(t)$ に関する遅れ型積分方程式

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{u}(t) = W(t)\tilde{g}^0 + \int_{-h}^{0} U_t(s)\tilde{g}^1(s)ds + \Phi[\varphi]^{-1}\int_0^t W(t-s)\tilde{G}'(s)\varphi ds \\ \qquad -\Phi[\varphi]^{-1}\int_0^t W(t-s)\Phi\left[\sum_{r=0}^{m} A_r\tilde{u}(s-h_r) + \int_{-h}^{0} A_I(\xi)\tilde{u}(s+\xi)d\xi\right]\varphi ds, \quad t \in [0, T_0] \\ \tilde{u}(s) = \tilde{g}^1(s) \qquad \text{a.e.} \quad s \in [-h, 0) \end{array}\right. \tag{3.15}$$

を考える。ここで、$\tilde{G}'(s)$ は、

$$\tilde{G}'(s) = G'(s + T_0)$$

で与えられ、$\tilde{g}^0$, $\tilde{g}^1(s)$ は、それぞれ $u(t)$, $t \in [0, T_0]$ を用いて

$$\tilde{g}^0 = u(T_0), \quad \tilde{g}^1(s) = u(s + T_0)$$

で与えられる。この遅れ型積分方程式の解 $\tilde{u}(t)$ は、次の作用素方程式の不動点として与えられる。

$$\tilde{u} = \tilde{F}\tilde{u} \equiv \tilde{\theta} - \tilde{S}\tilde{u} \quad \text{in} \;\; L_p(0, T_0; X), \tag{3.16}$$

方程式 (3.16) において、

$$\tilde{\theta}(t) = W(t)\tilde{g}^0 + \int_{-h}^{0} U_t(s)\tilde{g}^1(s)ds + \Phi[\varphi]^{-1}\int_0^t W(t-s)\tilde{G}'(s)\varphi ds, \quad t \in [0, T_0]$$

であり、$\tilde{S}$ は (3.12) において g^0, $g^1(s)$, $G'(s)$ を $\tilde{g}^0$, $\tilde{g}^1(s)$, $\tilde{G}'(s)$ と入れ替えた写像として定義できる。このとき、 $\tilde{F}$ は不等式 (3.13) から 空間 $L_p(0, T_0; X)$ における縮小写像に

なることが確かめられる。よって、 $\tilde{F}$ は唯一つの 不動点 $\tilde{u} \in L_p(0, T_0; X)$ をもつ。この $\tilde{u}$ を用いて $u(t)$ を区間 $[0, 2T_0]$ 上に、次の式により延長する。

$$u(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, T_0] \\ \tilde{u}(t - T_0), & t \in [T_0, 2T_0]. \end{cases}$$

さらに、この区間 $[0, 2T_0]$ の u と $G'(t)$ を用いて f_0 を 等式 (3.6) により $[0, 2T_0]$ まで延長する。このとき、$\tilde{u}$ の作り方により $u(t)$ は 観測系 (3.4) の最初の方程式

$$\frac{du(t)}{dt} = A_0 u(t) + \sum_{r=1}^{m} A_r u(t - h_r) + \int_{-h}^{0} A_I(s) u(t+s) ds + f_0(t)\varphi$$

を $[T_0, 2T_0]$ 上でみたしている事がわかる。さらに、$G'(t) = \Phi\left[\frac{du}{dt}(t)\right]$, *a.e.* $t \in [T_0, 2T_0]$ も成り立つ。この事から、等式 $G(t) = \Phi[u(t)]$ が $[0, 2T_0]$ 上で成り立つ。よって、さきの議論を有限回繰り返す事により、全区間 $[0, T]$ 上で観測系 (3.4) の全ての方程式をみたす、解の対 (u, f_0) を一意的に見出すことが出来る。

以上を纏めると、次の定理が証明された。

Theorem 1 (A1) と (A2) を仮定する。 このとき、$\Phi[\varphi] \neq 0$ および $\Phi[g^0] = G(0)$ をみたす任意の $g = (g^0, g^1) \in M_p$, $\varphi \in X$, $\Phi \in X^*$, $G \in W^{1,p}(0, T; \mathbf{R})$ に対して、問題 (IP) の唯一つの 解 $u \in W^{1,p}(0, T; X)$ および $f_0 \in L_p(0, T; \mathbf{R})$ が存在する。

参考文献

[1] M. C. Delfour, State theory of linear hereditary differential systems, *J. Math. Anal. Appl.*, **60**(1977), 8-35.

[2] A. Lorenzi, "An Introduction to Identification Problems via Functional Analysis", Inverse and Ill-Posed Problems Series, VSP, Utrecht-Boston-Köln-Tokyo, 2001.

[3] S. Nakagiri, Structural properties of functional differential equations in Banach spaces, *Osaka J. Math.*, **25**(1988), 353-398.

[4] S. Nakagiri and M. Yamamoto, Identifiability of linear retarded systems in Banach spaces, *Funkcial. Ekvac.*, **31** (1988), 315-329.

[5] S. Nakagiri and M. Yamamoto, Unique identification of coefficient matrices, time delays and initial functions of functional-differential equations, *J. Math. Systems Estim. Control*, **5** (1995), 323-344.