数理解析研究所講究録 1310 巻 2003 年 54-64

普遍指標多項式と KP 階層の拡張

津田 照久 (TSUDA, Teruhisa)

東京大学大学院数理科学研究科

概 要

普遍指標多項式 (universal character) が特徴付ける無限次元可積分系 (以下, UC 階層と呼ぶ) を構成する. UC 階層は無限階の非線形偏微分方程式系で与えられ, KP 階層の自然な拡張と見なせる. UC 階層の解空間は, 佐藤 Grassmann 多様体の直積を成し, その対称性は無限次元 Lie 環 $\mathfrak{gl}(\infty)\oplus\mathfrak{gl}(\infty)$ で与えられる.

はじめに

普遍指標多項式 (universal character) は, 小池和彦氏による, Schur 多項式の一般化である ([7, 8]). 良く知られるように, Schur 多項式 $S_\lambda(\mathbf{x})$ は一般線形群 $GL(n)$ の分割 λ に付随する既約多項式表現の指標を与える. 一方, 普遍指標多項式 $S_{[\lambda,\mu]}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ は $GL(n)$ の分割の組 λ, μ に付随する既約有理表現の指標を与える.

可積分系の理論と Schur 多項式には, 密接な関係がある. 実際, 佐藤幹夫氏が示したように, (重要なソリトン方程式のクラスである) KP 階層は, Schur 多項式が特徴付ける無限次元可積分系である ([15, 16]). 従って以下の疑問は自然であろう:

「普遍指標多項式の特徴付ける無限次元可積分系は何か?」

本稿では, 上の問題に一つの解答を与える. 始めに, 普遍指標多項式の特徴付ける可積分系 (以下, **UC 階層**と呼ぶ) を構成する. UC 階層は, 無限階の非線形偏微分方程式系として与えられ, KP 階層の自然な拡張と見做せる. 次に, 代数構造を調べることで, UC 階層と無限次元 Grassmann 多様体や無限次元 Lie 環の関係を明らかにする.

最後に, パンルベ方程式やその一般化であるガルニエ系等, モノドロミ保存変形の有限次元可積分系と, UC 階層の関係について論ずる.

1 普遍指標多項式と UC 階層

この節では, 普遍指標多項式の上昇演算子の母関数である頂点作用素を導入し, それを用いて, 普遍指標多項式の特徴付ける無限次元可積分系 (UC 階層) を構成する. また, UC 階層の特徴的な解のクラス (多項式解, ソリトン解) について説明する.

まずは普遍指標多項式の定義を復習しよう.

定義 1.1 (K. Koike) 分割 (Young 図形) の組 $[\lambda,\mu]=[(\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_l),(\mu_1\geq\cdots\geq\mu_{l'})]$ に対して, 普遍指標多項式 $S_{[\lambda,\mu]}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ とは, 以下で定義される $(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1,x_2,\cdots,y_1,y_2,\cdots)$ についての多項式である：

$$S_{[\lambda,\mu]}(\mathbf{x},\mathbf{y})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\det\begin{pmatrix} q_{\mu_{l'-i+1}+i-j}(\mathbf{y}), & 1\leq i\leq l' \\ p_{\lambda_{i-l'}-i+j}(\mathbf{x}), & l'+1\leq i\leq l+l'\end{pmatrix}_{1\leq i,j\leq l+l'}. \tag{1.1}$$

但し $\sum_{n=0}^{\infty}p_n(\mathbf{x})k^n=e^{\xi(\mathbf{x},k)}$, $\xi(\mathbf{x},k)=\sum_{n=1}^{\infty}x_nk^n$ および $p_{-n}(\mathbf{x})=0$ $(n>0)$ とおいた. また $q_n(\mathbf{y})$ は $p_n(\mathbf{x})$ において $\mathbf{x}\to\mathbf{y}$ と変数を書き換えたものとした.

$p_n(\mathbf{x})$ は

$$p_n(\mathbf{x})=\sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}}{k_1!k_2!\cdots k_n!} \tag{1.2}$$

と書けることに注意しておく. 変数の次数を $\deg x_n=n$, $\deg y_n=-n$ と数えると, $S_{[\lambda,\mu]}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ は次数 $|\lambda|-|\mu|$ の (重み付き) 同次多項式になる. また $S_{[\lambda,\mu]}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ は多項式環 $\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ の基底を与える ([7]).

例 1.2 (i) $\mu=\emptyset$ の場合. $S_{[\lambda,\emptyset]}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\det(p_{\lambda_i-i+j}(\mathbf{x}))=S_\lambda(\mathbf{x})$：Schur 多項式.

(ii) $\lambda=(1)$, $\mu=(1)$ の場合： $S_{[\square,\square]}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\begin{vmatrix} q_1 & q_0\\ p_0 & p_1\end{vmatrix}=x_1y_1-1.$

(iii) $\lambda=(2,1)$, $\mu=(1)$ の場合：

$$S_{[\boxplus,\square]}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\begin{vmatrix} q_1 & q_0 & q_{-1}\\ p_1 & p_2 & p_3\\ p_{-1} & p_0 & p_1\end{vmatrix}=y_1\left(\frac{x_1^3}{3}-x_3\right)-x_1^2.$$

天下りに以下の微分作用素 X_n, Y_n $(n\in\mathbb{Z})$ を導入する：

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}X_nk^n=\exp(\xi(\mathbf{x}-\widetilde{\partial}_{\mathbf{y}},k))\exp(-\xi(\widetilde{\partial}_{\mathbf{x}},k^{-1})), && (1.3)\\ Y(k) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}Y_nk^{-n}=\exp(\xi(\mathbf{y}-\widetilde{\partial}_{\mathbf{x}},k^{-1}))\exp(-\xi(\widetilde{\partial}_{\mathbf{y}},k)). && (1.4)\end{aligned}$$

但し $\widetilde{\partial}_{\mathbf{x}}=(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_3},\cdots)$ とした. 上の $X(k)$, $Y(k)$ のような微分作用素を**頂点作用素**と呼ぶ. X_n, Y_n は多項式 $p_n(\mathbf{x})$ を用いて,

$$X_n=X_n(\mathbf{x},\partial_{\mathbf{x}},\partial_{\mathbf{y}})=\sum_{i\geq 0}p_{n+i}(\mathbf{x}-\widetilde{\partial}_{\mathbf{y}})p_i(-\widetilde{\partial}_{\mathbf{x}}),$$

$$Y_n=Y_n(\mathbf{y},\partial_{\mathbf{x}},\partial_{\mathbf{y}})=\sum_{i\geq 0}p_{n+i}(\mathbf{y}-\widetilde{\partial}_{\mathbf{x}})p_i(-\widetilde{\partial}_{\mathbf{y}})$$

と具体的に書ける. これらは次の定理の意味で普遍指標多項式の上昇演算子を与える.

定理 1.3 $S_{[\lambda,\mu]}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = X_{\lambda_1}\cdots X_{\lambda_l} Y_{\mu_1}\cdots Y_{\mu_{l'}}\cdot 1.$

未知関数 $\tau = \tau(\mathbf{x},\mathbf{y})$ に対する双線形の関係式

$$\sum_{m+n=-1} X_m^*\tau \otimes X_n\tau = \sum_{m+n=-1} Y_m^*\tau \otimes Y_n\tau = 0 \tag{1.5}$$

を考える. ここで「双対な」作用素 $X_n^* = X_n(-\mathbf{x}, -\partial_{\mathbf{x}}, -\partial_{\mathbf{y}})$, $Y_n^* = X_n(-\mathbf{y}, -\partial_{\mathbf{x}}, -\partial_{\mathbf{y}})$ を導入した. 実は関係式 (1.5) は $\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})$ に対する以下の無限階の非線形微分方程式系に等価である：

$$\sum_{k+l+m=-1} p_k(-2\mathbf{u})p_{-l}(\widetilde{D}_{\mathbf{x}})p_m(\widetilde{D}_{\mathbf{y}})\exp\left(\sum_{j\geq 1}(u_jD_{x_j}+v_jD_{y_j})\right)\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\tau(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0, \tag{1.6}$$

$$\sum_{k+l+m=-1} p_k(-2\mathbf{v})p_{-l}(\widetilde{D}_{\mathbf{y}})p_m(\widetilde{D}_{\mathbf{x}})\exp\left(\sum_{j\geq 1}(u_jD_{x_j}+v_jD_{y_j})\right)\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\tau(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0. \tag{1.7}$$

但し $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (u_1,u_2,\cdots,v_1,v_2,\cdots)$ は任意パラメタとする. D_{x_n}, D_{y_n} は広田微分の記号：

$$P(D_{\mathbf{x}},D_{\mathbf{y}})f(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot g(\mathbf{x},\mathbf{y}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} P(\partial_{\mathbf{a}},\partial_{\mathbf{b}})f(\mathbf{x}+\mathbf{a},\mathbf{y}+\mathbf{b})\cdot g(\mathbf{x}-\mathbf{a},\mathbf{y}-\mathbf{b})|_{\mathbf{a}=\mathbf{b}=0}$$

である. また $\widetilde{D}_{\mathbf{x}} = (D_{x_1}, \frac{1}{2}D_{x_2}, \frac{1}{3}D_{x_3},\cdots)$ と書いた. 上の (1.6)-(1.7) を $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ について Taylor 展開することで $\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})$ の微分方程式を得る.

定義 1.4 (1.6)-(1.7) に含まれている微分方程式全体を UC 階層と呼ぶ.

例えば (1.6) の定数項からは, $\sum_{m\geq 0} p_{m+1}(\widetilde{D}_{\mathbf{x}})p_m(\widetilde{D}_{\mathbf{y}})\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\tau(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ を得る. これは無限階の微分方程式である. 実は UC 階層の含む微分方程式は全て無限階である. (この点は KP 階層との大きな違いである.)

$\tau = \tau(\mathbf{x},\mathbf{y})$ が変数 $\mathbf{y}$ に依らないと仮定する. すると (1.7) は自明な方程式 $0 = 0$ に退化し, (1.6) は

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(-2\mathbf{u})p_{k+1}(\widetilde{D}_{\mathbf{x}})\exp\left(\sum_{j\geq 1}u_jD_{x_j}\right)\tau\cdot\tau = 0 \tag{1.8}$$

となる. (1.8) は KP 階層の微分方程式に等しい. 即ち UC 階層は KP 階層の拡張を与える.

以下, UC 階層の解をいくつか見ることにする.

命題 1.5 全ての普遍指標多項式 $S_{[\lambda,\mu]}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ は UC 階層の解である.

UC 階層のソリトン解を構成するために微分作用素

$$\begin{aligned}
\Gamma^+(p,q) &= e^{\xi(\mathbf{x}-\widetilde{\partial}_{\mathbf{y}},p)-\xi(\mathbf{x}-\widetilde{\partial}_{\mathbf{y}},q)}e^{-\xi(\widetilde{\partial}_{\mathbf{x}},p^{-1})+\xi(\widetilde{\partial}_{\mathbf{x}},q^{-1})}, && (1.9)\\
\Gamma^-(p,q) &= e^{\xi(\mathbf{y}-\widetilde{\partial}_{\mathbf{x}},p^{-1})-\xi(\mathbf{y}-\widetilde{\partial}_{\mathbf{x}},q^{-1})}e^{-\xi(\widetilde{\partial}_{\mathbf{y}},p)+\xi(\widetilde{\partial}_{\mathbf{y}},q)} && (1.10)
\end{aligned}$$

を考える．ここで $\Gamma^+(p,q)$ と $\Gamma^-(p',q')$ は互いに可換であることに注意しておく．正規積 : : をコロンの中では，微分を右へ，掛け算を左へ持って行く記号として定める．つまり

$$:x\frac{\partial}{\partial x}: = :\frac{\partial}{\partial x}x: = x\frac{\partial}{\partial x}$$

である．すると，

$$\Gamma^{\pm}(p_i,q_i)\Gamma^{\pm}(p_{i'},q_{i'}) = a_{ii'} : \Gamma^{\pm}(p_i,q_i)\Gamma^{\pm}(p_{i'},q_{i'}) : \tag{1.11}$$

を得る．但し $a_{ii'} = (p_i - p_{i'})(q_i - q_{i'})(p_i - q_{i'})^{-1}(q_i - p_{i'})^{-1}$ とした．(1.11) より，特に $\Gamma^{\pm}(p,q)^2 = 0$ である．さて，(c_i, p_i, q_i) を $p_i \neq q_j$ $(i \neq j)$ なる定数として関数

$$\tau(\mathbf{x},\mathbf{y};\mathbf{c},\mathbf{p},\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^{m} e^{c_i\Gamma^+(p_i,q_i)} \prod_{j=1}^{n} e^{c_{-j}\Gamma^-(p_{-j},q_{-j})} \cdot 1 \tag{1.12}$$

を考える．ここで $I = \{1,\cdots,m\}$, $J = \{-1,\cdots,-n\}$, および

$$\eta_i = \begin{cases} \sum_{k\geq 1}(p_i^k - q_i^k)x_k & (i>0) \\ \sum_{k\geq 1}(p_i^{-k} - q_i^{-k})y_k & (i<0) \end{cases}$$

とおくと，(1.12) は次のように書き換えられる．

$$\tau(\mathbf{x},\mathbf{y};\mathbf{c},\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{K\subset I\cup J}\left(\prod_{i\in K} c_i\right)\left(\prod_{i<j\in K} a_{ij}\right)\exp\left(\sum_{i\in K}\eta_i\right). \tag{1.13}$$

命題 1.6 関数 (1.13) は UC 階層の解である．

この解を UC 階層の (m,n)-ソリトン解と呼ぶ．

2 UC 階層の代数構造

2.1 ボゾン＝フェルミオン対応

次の基本関係式を満たす文字 ψ_i, ψ_i^*, ϕ_i, ϕ_i^* $(i \in \mathbb{Z}+1/2)$, (フェルミオン) を考える：

$$[\psi_m,\psi_n]_+ = [\psi_m^*,\psi_n^*]_+ = 0, [\psi_m,\psi_n^*]_+ = \delta_{m+n,0},$$
$$[\phi_m,\phi_n]_+ = [\phi_m^*,\phi_n^*]_+ = 0, [\phi_m,\phi_n^*]_+ = \delta_{m+n,0},$$
$$[\psi_m,\phi_n] = [\psi_m,\phi_n^*] = [\psi_m^*,\phi_n] = [\psi_m^*,\phi_n^*] = 0.$$

但し $[X,Y] = XY - YX$, および $[X,Y]_+ = XY + YX$ とした．フェルミオン ψ_i, ψ_i^*, ϕ_i, ϕ_i^* $(i \in \mathbb{Z}+1/2)$ が $\mathbb{C}$ 上生成する代数を $\mathcal{A}$ と書く．

フェルミオンを二つの組に分けて

$$\{\psi_n,\psi_n^*,\phi_n,\phi_n^*\} \quad (n<0) \quad \text{を生成演算子}$$
$$\{\psi_n,\psi_n^*,\phi_n,\phi_n^*\} \quad (n>0) \quad \text{を消滅演算子}$$

と呼ぶ. 真空 $|\mathrm{vac}\rangle$ を $\psi_n|\mathrm{vac}\rangle = \psi_n^*|\mathrm{vac}\rangle = \phi_n|\mathrm{vac}\rangle = \phi_n^*|\mathrm{vac}\rangle = 0$ $(n>0)$ によって定義する. (つまり消滅演算子は真空を消す.) フェルミオンの Fock 空間 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{A}\cdot|\mathrm{vac}\rangle = \{\, a|\mathrm{vac}\rangle \mid a \in \mathcal{A}\,\} \tag{2.1}$$

で導入する. 容易に分かるように, $\mathcal{F}$ は基底ベクトル

$$\psi_{m_1}\cdots\psi_{m_r}\psi^*_{n_1}\cdots\psi^*_{n_s}\phi_{\tilde{m}_1}\cdots\phi_{\tilde{m}_{r'}}\phi^*_{\tilde{n}_1}\cdots\phi^*_{\tilde{n}_{s'}}|\mathrm{vac}\rangle \tag{2.2}$$

$(m_1<\cdots<m_r<0,\ n_1<\cdots<n_s<0,\ \tilde{m}_1<\cdots<\tilde{m}_{r'}<0,\ \tilde{n}_1<\cdots<\tilde{n}_{s'}<0)$ の線形包である. 同様にして, 双対 Fock 空間 $\mathcal{F}^*$ を

$$\mathcal{F}^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle\mathrm{vac}|\cdot\mathcal{A} = \{\, \langle\mathrm{vac}|a \mid a \in \mathcal{A}\,\} \tag{2.3}$$

で導入する. 但し $\langle\mathrm{vac}|$ を $\langle\mathrm{vac}|\psi_n = \langle\mathrm{vac}|\psi_n^* = \langle\mathrm{vac}|\phi_n = \langle\mathrm{vac}|\phi_n^* = 0$ $(n<0)$ で定める. 後の準備のために真空, および双対真空, の平行移動 $|l_1,l_2\rangle$, $\langle l_1,l_2|$ を

$$\begin{aligned}&\langle l_1,l_2|\psi_n = 0 \quad (n<-l_1), \quad \langle l_1,l_2|\psi_n^* = 0 \quad (n<l_1)\\ &\psi_n|l_1,l_2\rangle = 0 \quad (n>-l_1) \quad \psi_n^*|l_1,l_2\rangle = 0 \quad (n>l_1)\end{aligned}$$

によって定める (ϕ, ϕ^* についても同様の性質を要請する).

さて, **真空期待値**と呼ばれる非退化なペアリング $\langle\ \rangle : \mathcal{F}^*\times\mathcal{F}\to\mathbb{C}$,

$$\big(\langle\mathrm{vac}|u, v|\mathrm{vac}\rangle\big) \mapsto \langle\mathrm{vac}|u\cdot v|\mathrm{vac}\rangle = \langle uv\rangle$$

を性質 $\langle\mathrm{vac}|\mathrm{vac}\rangle = 1$ によって定義する. またフェルミオンの二次式に対して

$$\begin{aligned}:\psi_m\psi_n^*: &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \psi_m\psi_n^* - \langle\psi_m\psi_n^*\rangle\\ :\phi_m\phi_n^*: &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \phi_m\phi_n^* - \langle\phi_m\phi_n^*\rangle\end{aligned} \tag{2.4}$$

とし, $H_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2}\psi_{-j}\psi^*_{j+n}$, $\widetilde{H}_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2}\phi_{-j}\phi^*_{j+n}$, $(n=1,2,\cdots)$ とおく. ハミルトニアン $H = H(\mathbf{x},\mathbf{y};\partial_{\mathbf{x}},\partial_{\mathbf{y}})$ を

$$H(\mathbf{x},\mathbf{y};\partial_{\mathbf{x}},\partial_{\mathbf{y}}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(x_n - \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial y_n}\right)H_n + \left(y_n - \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\widetilde{H}_n\right\} \tag{2.5}$$

で導入する. 今, $\mathcal{F}$ からボゾンの Fock 空間

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{l_1,l_2\in\mathbb{Z}} z_1^{l_1}z_2^{l_2}\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y},z_1^{\pm},z_2^{\pm}]$$

への線形写像 $\sigma:\mathcal{F}\to\mathcal{B}$ を

$$\sigma(|u\rangle) = \sum_{l_1,l_2\in\mathbb{Z}} z_1^{l_1}z_2^{l_2}\langle l_1,l_2|e^{H(\mathbf{x},\mathbf{y};\partial_{\mathbf{x}},\partial_{\mathbf{y}})}|u\rangle \tag{2.6}$$

定理 2.1 (Fock 空間の同型) $\sigma : \mathcal{F} \simeq \mathcal{B}$.

注 2.2 $\mathcal{F}$ の基底ベクトル (2.2) のうち $r = s$, $r' = s'$ であるようなもの全体で張られる部分空間を $\mathcal{F}_{0,0}$ とおくと, $\sigma : \mathcal{F}_{0,0} \simeq \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. 特に $\sigma(|\mathrm{vac}\rangle) = 1$ である. また写像 σ は $\mathcal{F}_{0,0}$ の基底ベクトルを普遍指標多項式に移す.

さらに, 以下見るように, フェルミオンの Fock 空間への作用は前述の頂点作用素を用いてボゾンの Fock 空間 $\mathcal{B}$ 上に実現できる. フェルミオンの母関数:

$$\begin{aligned} \psi(k) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_n k^{-n-1/2}, \quad \psi^*(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_n^* k^{-n-1/2} \\ \phi(k) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}+1/2} \phi_n k^{-n-1/2}, \quad \phi^*(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}+1/2} \phi_n^* k^{-n-1/2} \end{aligned} \tag{2.7}$$

とおく. 作用素 k^{H_0}, $k^{\widetilde{H}_0}$ を

$$\left(k^{H_0} f\right)(\mathbf{x}, \mathbf{y}; z_1, z_2) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}; kz_1, z_2), \quad \left(k^{\widetilde{H}_0} f\right)(\mathbf{x}, \mathbf{y}; z_1, z_2) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}; z_1, kz_2)$$

として,

$$\begin{aligned} \Psi(k) &= z_1 e^{\xi(\mathbf{x}-\widetilde{\partial}_\mathbf{y}, k)} e^{-\xi(\widetilde{\partial}_\mathbf{x}, k^{-1})} k^{H_0}, \quad \Psi^*(k) = z_1^{-1} e^{-\xi(\mathbf{x}-\widetilde{\partial}_\mathbf{y}, k)} e^{\xi(\widetilde{\partial}_\mathbf{x}, k^{-1})} k^{-H_0} \\ \Phi(k) &= z_2 e^{\xi(\mathbf{y}-\widetilde{\partial}_\mathbf{x}, k)} e^{-\xi(\widetilde{\partial}_\mathbf{y}, k^{-1})} k^{\widetilde{H}_0}, \quad \Phi^*(k) = z_2^{-1} e^{-\xi(\mathbf{y}-\widetilde{\partial}_\mathbf{x}, k)} e^{\xi(\widetilde{\partial}_\mathbf{y}, k^{-1})} k^{-\widetilde{H}_0} \end{aligned} \tag{2.8}$$

とおく.

定理 2.3 (フェルミオンの実現) 任意の $|u\rangle \in \mathcal{F}$ に対して

$$\begin{aligned} \sigma(\psi(k)|u\rangle) &= \Psi(k)\sigma(|u\rangle), \quad \sigma(\psi^*(k)|u\rangle) = \Psi^*(k)\sigma(|u\rangle) \\ \sigma(\phi(k)|u\rangle) &= \Phi(k)\sigma(|u\rangle), \quad \sigma(\phi^*(k)|u\rangle) = \Phi^*(k)\sigma(|u\rangle) \end{aligned} \tag{2.9}$$

が成り立つ.

2.2 リー環 $\mathfrak{gl}(\infty) \oplus \mathfrak{gl}(\infty)$ と双線形恒等式

$|i-j| \gg 1$ のとき $a_{ij} = b_{ij} = 0$ であるような無限行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ $(i, j \in \mathbb{Z}+1/2)$ を考える. すると線形空間

$$\mathfrak{gl}(\infty) \oplus \mathfrak{gl}(\infty) = \left\{ X_{A\oplus B} \,\middle|\, X_{A\oplus B} = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}+1/2} \left(a_{ij} : \psi_{-i}\psi_j^* : + b_{ij} : \phi_{-i}\phi_j^* :\right) \right\} \oplus \mathbb{C}\cdot 1 \tag{2.10}$$

は Lie 環を定めることが分かる. これが $\mathfrak{gl}(\infty) \oplus \mathfrak{gl}(\infty)$ である. 対応する群を

$$G = \left\{ e^{X_1} e^{X_2} \cdots e^{X_k} \,\middle|\, X_i \in \mathfrak{gl}(\infty) \oplus \mathfrak{gl}(\infty) \right\} \tag{2.11}$$

とおく. 次の定理が成り立つ.

定理 2.4 $|u\rangle \in \mathcal{F}_{0,0}$ に対して以下は同値である.

(i) $|u\rangle$ は双線形恒等式：

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_{-j}|u\rangle \otimes \psi_j^*|u\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}+1/2} \phi_{-j}|u\rangle \otimes \phi_j^*|u\rangle = 0 \tag{2.12}$$

を満たす.

(ii) $|u\rangle = g|\mathrm{vac}\rangle$ なる $g \in \boldsymbol{G}$ が存在する. (つまり $|u\rangle$ は真空の $\boldsymbol{G}$-軌道.)

(iii) $\sigma(|u\rangle) \in \mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ は UC 階層の解である.

実は, ボゾン＝フェルミオン対応によって双線形恒等式 (2.12) をボゾンの Fock 空間 (多項式環) 上に表現したものが UC 階層の微分方程式系 ((1.5), (1.6)-(1.7)) に他ならない. また上の定理により, 無限次元 Lie 環 $\mathfrak{gl}(\infty) \oplus \mathfrak{gl}(\infty)$ が UC 階層の解の無限小変換として作用することが分かる. $\mathfrak{gl}(\infty) \oplus \mathfrak{gl}(\infty)$ の多項式環上での表現は上述の頂点作用素 $\Gamma^{\pm}(p,q)$ ((1.9)-(1.10)) を用いて与えられる.

定理 2.5 ($\mathfrak{gl}(\infty) \oplus \mathfrak{gl}(\infty)$ の頂点作用素表現) 微分作用素 Z_{ij}, $\widetilde{Z}_{ij}$ を母関数

$$Z(p,q) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}+1/2} Z_{ij} p^{-i-1/2} q^{-j-1/2} = \frac{1}{p-q}(\Gamma^+(p,q) - 1)$$

$$\widetilde{Z}(p,q) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}+1/2} \widetilde{Z}_{ij} p^{i+1/2} q^{j+1/2} = \frac{1}{p^{-1}-q^{-1}}(\Gamma^-(p,q) - 1)$$

によって定める. このとき

$$\sum_{i,j\in\mathbb{Z}+1/2} \left(a_{ij} : \psi_{-i}\psi_j^* : + b_{ij} : \phi_{-i}\phi_j^* :\right) \mapsto \sum_{i,j\in\mathbb{Z}+1/2} \left(a_{ij} Z_{-ij} + b_{ij} \widetilde{Z}_{-ij}\right)$$

は $\mathfrak{gl}(\infty) \oplus \mathfrak{gl}(\infty)$ の多項式環 $\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ 上への表現を与える.

2.3 双線形恒等式と Plücker 関係式

半整数の列 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_j)_{j\geq 1}$ が条件：

(i) 全ての $j \geq 1$ に対して $\alpha_j < \alpha_{j+1}$

(ii) $\alpha_{j+1} = \alpha_j + 1$ $(j \gg 1)$

を満たすとき $\boldsymbol{\alpha}$ を**マヤ図形**という ([12]). また $\boldsymbol{\alpha}$ に対して, (i) を無視して (ii) のみを要請したものを**符号付きマヤ図形**と呼ぶ. マヤ図形 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_j)_{j\geq 1}$ に対して「荷電」$l = \lim_{j\to\infty}(j - \alpha_j - 1/2)$ とおく. 一定の荷電 l を持つマヤ図形全体の集合を $\mathcal{M}_l$ $(l \in \mathbb{Z})$ と表すことにする.

注 2.6 良く知られているように, 分割 (Young 図形) の集合 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{M}_l$ の間には一対一対応がある ([2] 参照). 実際, 荷電 0 のマヤ図形 $\boldsymbol{\alpha} = \{m_1, \cdots, m_r\} \cup (\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1/2) \setminus \{-n_1, \cdots, -n_r\}$ に対し, Frobenius の記法 ([9] 参照) の下で分割

$$\lambda = (-m_1 - 1/2, \cdots, -m_r - 1/2 | -n_1 - 1/2, \cdots, -n_r - 1/2)$$

を対応させると, これは一対一である.

さて, 半整数 $m_1 < \cdots < m_r < 0$, $n_1 < \cdots < n_r < 0$, $\widetilde{m}_1 < \cdots < \widetilde{m}_s < 0$, $\widetilde{n}_1 < \cdots < \widetilde{n}_s < 0$ に対し (荷電 0 の) マヤ図形の組

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \{m_1, \cdots, m_r\} \cup (\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1/2) \setminus \{-n_1, \cdots, -n_r\} \\ \boldsymbol{\beta} &= \{\widetilde{m}_1, \cdots, \widetilde{m}_s\} \cup (\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1/2) \setminus \{-\widetilde{n}_1, \cdots, -\widetilde{n}_s\} \end{aligned}$$

を対応させて, $\mathcal{F}_{0,0}$ の基底ベクトルを

$$|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle = \psi_{m_1} \cdots \psi_{m_r} \psi^*_{n_1} \cdots \psi^*_{n_r} \phi_{\widetilde{m}_1} \cdots \phi_{\widetilde{m}_s} \phi^*_{\widetilde{n}_1} \cdots \phi^*_{\widetilde{n}_s} |\mathrm{vac}\rangle \tag{2.13}$$

と表す. すると任意の $|u\rangle \in \mathcal{F}_{0,0}$ は線形和

$$|u\rangle = \sum_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{M}_0} c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) |\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle \tag{2.14}$$

と書ける. これを双線形恒等式 (2.12) に代入すると, 以下の定理を得る.

定理 2.7 $|u\rangle \in \mathcal{F}_{0,0}$ について, $|u\rangle = g|\mathrm{vac}\rangle$ なる元 $g \in \boldsymbol{G}$ が存在するための必要十分条件は (2.14) の展開係数 $c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ が **Plücker 関係式**:

$$\sum_{j \geq 1} (-1)^j c(\boldsymbol{\alpha} \ominus \alpha_j, \boldsymbol{\beta}) c(\boldsymbol{\gamma} \oplus \alpha_j, \boldsymbol{\delta}) = 0 \tag{2.15}$$

$$\sum_{j \geq 1} (-1)^j c(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \ominus \alpha_j) c(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\gamma} \oplus \alpha_j) = 0 \tag{2.16}$$

を満たすことである. 但し $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta}$ はそれぞれ荷電 1, 0, -1, 0 を持った任意のマヤ図形とする. また記号 $\boldsymbol{\alpha} \ominus \alpha_j$ と $\boldsymbol{\gamma} \oplus \alpha_j$ はそれぞれ $\boldsymbol{\alpha}$ から α_j を取り除いたマヤ図形と $\boldsymbol{\gamma}$ に α_j を付け加えたマヤ図形を表すものとする.

係数 $c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ についての二次関係式 (2.15)-(2.16) は無限次元 Grassmann 多様体 (佐藤 Grassmann 多様体) SGM の直積空間 $SGM \times SGM$ の Plücker 関係式に他ならない.

2.4 UC 階層の解

実はボゾン＝フェルミオン対応 σ は $\mathcal{F}_{0,0}$ の基底ベクトル (2.13) を普遍指標多項式に移す:

$$\begin{aligned} \sigma(|u\rangle) &= \langle \mathrm{vac} | e^{H(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}})} |u\rangle \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^{r}(n_i + 1/2) + r(r-1)/2 + \sum_{j=1}^{s}(\widetilde{n}_j + 1/2) + s(s-1)/2} S_{[\lambda, \mu]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \tag{2.17}$$

但し分割の組 λ, μ は Frobenius の記法の下で

$$\lambda = (-m_1 - 1/2, \cdots, -m_r - 1/2 | -n_1 - 1/2, \cdots, -n_r - 1/2) \tag{2.18}$$
$$\mu = (-\widetilde{m}_1 - 1/2, \cdots, -\widetilde{m}_s - 1/2 | -\widetilde{n}_1 - 1/2, \cdots, -\widetilde{n}_s - 1/2) \tag{2.19}$$

とおいた．これからも，普遍指標多項式 $S_{[\lambda,\mu]}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ が多項式環 $\mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ の基底を成すことが従う．任意の多項式 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ は普遍指標多項式の一次結合

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{\lambda,\mu\in\mathcal{P}} f_{\lambda\mu} S_{[\lambda,\mu]}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{2.20}$$

で表される．展開係数は

$$f_{\lambda\mu} = f_{\lambda\mu}(\mathbf{0},\mathbf{0}), \quad f_{\lambda\mu}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{\eta,\nu,\tau\in\mathcal{P}} C^{\eta}_{\tau\lambda} C^{\nu}_{\tau\mu} S_{\eta}(\widetilde{\partial}_{\mathbf{x}}) S_{\nu}(\widetilde{\partial}_{\mathbf{y}}) f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{2.21}$$

で定まる．ここで $C^{\lambda}_{\mu\nu}$ は Littlewood-Richardson 係数と呼ばれる組合せ論的な非負整数である．定理 2.7 と合わせることで，次の定理が得られる．

定理 2.8 $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ に対して以下は同値である
(i) $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ は UC 階層の解である．
(ii) 係数 $f_{\lambda\mu}$ は Plücker 関係式 (2.15)-(2.16) を満たす．
(iii) $f_{\lambda\mu}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ は Plücker 関係式 (2.15)-(2.16) を満たす．

この定理により，$\{$UC 階層の解全体$\} \simeq SGM \times SGM$ であること，および UC 階層の含む無限階の微分方程式が Plücker 関係式を起源に持つことが分かる．(これは $f_{[\lambda,\mu]}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ が f の無限階微分を含んでいることに整合している．)

以上の UC 階層についての結果は，佐藤-佐藤，伊達-神保-柏原-三輪らによる KP 階層の理論 ([2, 3, 12, 15, 16] 参照) の自然な拡張を与えている．

次の定理は UC 階層の解と KP 階層の解の関係を具体的に記述する．

定理 2.9 $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{C}[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ が UC 階層の解であるための必要十分条件は，

$$\tau_1(\mathbf{x} - \widetilde{\partial}_{\mathbf{y}})\tau_2(\mathbf{y} - \widetilde{\partial}_{\mathbf{x}}) \cdot 1 = \tau(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{2.22}$$

を満たす KP 階層の解 $\tau_1(\mathbf{x}), \tau_2(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ が存在することである．

注 2.10 (2.22) は

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \tau_1(\mathbf{x} - \widetilde{\partial}_{\mathbf{y}})\tau_2(\mathbf{y} - \widetilde{\partial}_{\mathbf{x}}) \cdot 1 \\ &= e^{-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{\partial^2}{\partial x_n \partial y_n}} \tau_1(\mathbf{x})\tau_2(\mathbf{y}) e^{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{\partial^2}{\partial x_n \partial y_n}} \cdot 1 \\ &= e^{-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{\partial^2}{\partial x_n \partial y_n}} \tau_1(\mathbf{x})\tau_2(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

と表すこともできる．

3 おわりに

本稿では普遍指標多項式の特徴付ける無限次元可積分系 (= UC 階層) を構成し, その代数構造を調べた. まとめると,

(1) UC 階層は無限階の非線形偏微分方程式系で与えられ, KP 階層の自然な拡張を成す.
(2) UC 階層の解空間は佐藤 Grassmann 多様体の直積 $SGM \times SGM$ である.
(3) UC 階層の対称性は無限次元 Lie 環 $\mathfrak{gl}(\infty) \oplus \mathfrak{gl}(\infty)$ で記述される.

最後に, 無限次元可積分系 (KP 階層, UC 階層) とモノドロミ保存変形型の有限次元可積分系 (パンルベ方程式 P_{J} ($\mathrm{J} = \mathrm{I}, \cdots, \mathrm{VI}$), ガルニエ系) の関係について議論する. 良く知られているように (少なくとも) P_{II}, P_{IV}, P_{V} は KP 階層のある種の**簡約化** (similarity reduction) として得られる. また簡約化によって KP 階層の多項式解である Schur 多項式は構造を保ったまま, P_{II}, P_{IV}, P_{V} の有理関数解に付随する特殊多項式に移行するという顕著な事実がある ([5, 6, 13, 14] 参照).

また最近の研究によって, パンルベ方程式やガルニエ系の代数関数解に Schur 多項式の一般化である普遍指標多項式が現れることが明らかになった ([10, 11, 18, 19] 参照). 従って, UC 階層からパンルベ方程式, およびガルニエ系への具体的な簡約化を構成することは興味ある問題と云えよう.

参考文献

[1] M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia, (1981).

[2] E. Date, M. Jimbo, T. Miwa, and M. Kashiwara, *Transformation groups for soliton equations*, Proc. Japan Acad. **57A**(1981), 342-7, 387-92; J. Phys. Soc. Jpn. **50**(1981), 3806-12, 3813-18; Physica **4D**(1982), 343-65; publ. RIMS, Kyoto Univ. **18**(1982), 1111-19, 1077-110.

[3] M. Jimbo and T. Miwa, *Solitons and infinite dimensional Lie algebras*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **18**(1983), 943-1001.

[4] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, (1990).

[5] K. Kajiwara and Y. Ohta, *Determinant structure of the rational solutions for the Painlevé II equation*, J. Math. Phys. **37**(1996), 4693-704.

[6] ———, *Determinant structure of the rational solutions for the Painlevé IV equation*, J. Phys. A **31**(1998), 2431-46.

[7] K. Koike, *On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups: By means of the universal characters*, Adv. Math. **74**(1989), 57-86.

[8] 小池和彦, 古典群の表現について, 数学 **48** (1996), 242-258.

[9] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials* (Second Edition), Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press Inc., New York, (1995).

[10] T. Masuda, Y. Ohta, and K. Kajiwara, *A determinant formula for a class of rational solutions of Painlevé V equation*, Nagoya Math. J. **168**(2002), 1-25.

[11] T. Masuda, *On a class of algebraic solutions to the Painlevé VI equation, its determinant formula and coalescence cascade*, to appear in Funkcial. Ekvac. **46**(2003).

[12] 三輪哲二・神保道夫・伊達悦朗, ソリトンの数理, 岩波書店 (1993).

[13] M. Noumi, S. Okada, K. Okamoto, and H. Umemura, *Special polynomials associated with the Painlevé equations II*, Integrable Systems and Algebraic Geometry, eds. Saito, M.H., Shimizu, Y. and Ueno, K. (World Scientific, Singapore, 1998), 349-372.

[14] M. Noumi and Y. Yamada, *Symmetries in the fourth Painlevé equation and Okamoto polynomials*, Nagoya Math. J. **153**(1999), 53-86.

[15] M. Sato, *Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmann manifold*, 数理解析研究所講究録 **439**(1981), 30-46.

[16] 佐藤幹夫述・野海正俊記, ソリトン方程式と普遍グラスマン多様体, 上智大学講究録 **18** (1984).

[17] T. Tsuda, *Universal characters and an extension of the KP hierarchy*, preprint (2002).

[18] ———, *Toda equation and special polynomials associated with the Garnier system*, submitted to Math. Ann., preprint (2002).

[19] 津田 照久, ガルニエ系に付随する戸田方程式および特殊多項式, 数理解析研究所講究録 **1296**(2002), 128-136.