数理解析研究所講究録 1311 巻 2003 年 111-123

磁性流体自由表面解析における界面磁場方程式の解の検証

北大大学院工学研究科　水　田　　洋　(Yo Mizuta)
Grad. Sch. of Engineering Sciences, Hokkaido Univ.

1　はじめに

磁性流体の自由表面現象の解析で，特異な表面形状を決定したり，動的解析，周波数解析，安定性解析を行う場合，界面近傍の磁場分布を正確に求めることが重要になる．これらの解析では，多くの場合，界面のみで働く磁気応力差

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu_j}\right](\mu_1\mu_2 h_{\mathrm{s}}^2 + b_{\mathrm{n}}^2) \quad (>0) \tag{1}$$

で磁場から流体への作用を取り込むが，その評価には「界面磁場」，すなわち磁場の接線成分 h_{s}，磁束密度の法線成分 b_{n} が必要となる．ここで，μ_1，μ_2 は磁性流体と真空の透磁率，$[1/\mu_j]$ は $1/\mu_2 - 1/\mu_1$ を表す．界面磁場を決める条件は，磁束保存と無電流条件から導かれる「解析性」と，界面をはさんで h_{s} と b_{n} が連続という「界面条件」であるが，多価となるほど大きく複雑に変形した界面について，任意に与えた既知の外場から，近似なく求めなければならない．これは容易なようでいて，曖昧になったり手間取ったりしがちである．これらの諸条件を満たしながら，有限要素法のような本格的な数値解析法よりずっと軽い負担で界面磁場を求め，磁性流体自由表面解析を見通しよく行うため，本研究では，界面磁場だけで閉じた「界面磁場方程式」を導き，これを解くようにしてきた [1]．本稿では，その導出についてまとめ,「透磁性円筒と線磁極」の厳密解でこれを検証し，さらに，任意の界面形状でも有効な一般的解法について述べる．

2　界面磁場方程式の誘導

2.1　複素磁場の解析性

磁性流体領域を $j=1$，真空領域を $j=2$ として，各領域の磁場 $\boldsymbol{h}_j = (h_{xj}, h_{yj})$・磁束密度 $\boldsymbol{b}_j = (b_{xj}, b_{yj})$・透磁率 μ_j から，「複素磁場」

$$f_j = b_{xj} - ib_{yj} = \mu_j(h_{xj} - ih_{yj}) \tag{2}$$

を定義する．磁束保存 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{b}_j = 0$・無電流 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h}_j = \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$（$\boldsymbol{i}$：電流密度）の各条件を成分表示すれば，これらは複素関数論における Cauchy-Riemann の関係 と見ることができる．その結果，特異点以外の領域で f_j に 解析性が付与され，以下の性質を利用できるようになる．

1. f_j は $z = x + iy$ だけの関数，
2. $f_j(z) = -\mathrm{d}w_j(z)/\mathrm{d}z$ で複素磁場を導く，複素ポテンシャル $w_j(z)$ の実部・虚部の Laplace 性，
3. 特異点を含まない閉積分路 C で，Cauchy の積分定理 $\oint_C \mathrm{d}z f_j(z) = 0$，
4. Hilbert 変換，
5. Real Space の $f_j(z)$ と Flat Space の複素磁場 $F_j(Z)$ 同士の 写像変換．

特異点となるのは磁極であるが，実磁極 のほか，界面をはさむ鏡像点に現われる 仮磁極 に注意が必要である．$f_1(z)$ は磁性流体領域，$f_2(z)$ は真空領域で定義されているが，解析性があれば，これらの定義を本来の領域から相対する領域まで拡張できる．

2.2 界面磁場と界面条件

勾配角 θ の界面上で，磁場の接線成分 h_s と磁束密度の法線成分 b_n を磁場・磁束密度の x, y 成分で表し整理すれば,「複素界面磁場」g_j は

$$g_j \equiv -\mu_j h_s - i b_n = f_j(z) e^{i\theta} \tag{3}$$

のように複素磁場と関係づけられる．次にこれから,「界面条件関数」

$$\begin{cases} \gamma_s \equiv \dfrac{g_2^*}{\mu_2} - \dfrac{g_1}{\mu_1} = -[h_s] + i\left(\dfrac{1}{\mu_1} + \dfrac{1}{\mu_2}\right) b_n, \\ \gamma_n \equiv g_2^* + g_1 \quad = -(\mu_1 + \mu_2) h_s + i[b_n] \end{cases} \tag{4}$$

を定義する．ここで，界面をはさむ値の跳び $(2-1)$ を $[\cdots]$ と表せば，界面条件は $[h_s] = 0, [b_n] = 0$ となる．界面条件関数は，界面条件と界面磁場を同時に考察する上で都合がよい．ただし，$e^{i\theta}$ はそれだけでは解析的でないため，複素磁場と異なり，複素界面磁場と界面条件関数は解析関数ではない．

2.3 合成場

特異点以外の全領域で解析的な $f_j(z)$ より,「合成場」

$$\begin{cases} B(z) = \left\{\dfrac{f_1(z)}{\mu_1} - \dfrac{f_2(z)}{\mu_2}\right\} \Big/ \left\{\delta\left(\dfrac{1}{\mu_1} + \dfrac{1}{\mu_2}\right)\right\}, \\ H(z) = \{f_1(z) - f_2(z)\} / \{\delta(\mu_1 + \mu_2)\} \end{cases} \tag{5}$$

を定義すれば，$B(z)$, $H(z)$ は，$f_j(z)$ の特異点を合わせた以外の領域で解析的である．ただし，$\delta \equiv (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2)$ は透磁率差パラメータで，$\mu_1(1-\delta) = \mu_2(1+\delta)$ となる．

(5) より，複素磁場は合成場で逆に

$$\begin{cases} f_1(z) = \mu_1 H(z) - B(z), \\ f_2(z) = \mu_2 H(z) - B(z) \end{cases} \tag{6}$$

と表されるので，これと(3)を順に(4)に代入すれば，界面条件関数は

$$\begin{cases} \gamma_s = -\left[\dfrac{1}{\mu_j}\right] S_r + i\left(\dfrac{1}{\mu_1} + \dfrac{1}{\mu_2}\right) S_i - 2iN_i, \\ \gamma_n = (\mu_1 + \mu_2) N_r - 2S_r - i\,[\mu_j]\,N_i, \end{cases} \tag{7}$$
$$S \equiv B(z)e^{i\theta} = S_r + iS_i, \quad N \equiv H(z)e^{i\theta} = N_r + iN_i$$

となる．これを(4)と比較すれば，界面条件と界面磁場の合成場による表現が得られる．

$$\begin{cases} [b_n] = -[\mu_j]\,\mathrm{Im}\,H(z)e^{i\theta} = 0, \\ [h_s] = [1/\mu_j]\,\mathrm{Re}\,B(z)e^{i\theta} = 0, \end{cases} \tag{8a}$$

$$\begin{cases} b_n = \ \ \mathrm{Im}\,B(z)e^{i\theta}, \\ h_s = -\mathrm{Re}\,H(z)e^{i\theta}. \end{cases} \tag{8b}$$

すなわち界面条件は，$H(z)$ が界面に平行，$B(z)$ が界面に垂直という，境界値指定の境界条件に置き換えられたことになる．

2.4 Hilbert 変換式への界面条件の組み込み

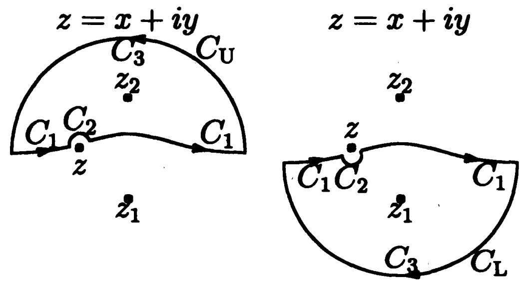

Fig. 1: Closed contours for the Hilbert equation.

特異点以外の全領域で合成場 $B(z), H(z)$ が解析的であるとして，Fig. 1 に示す2つの閉積分路 C_U, C_L について，複素積分 $\displaystyle\oint_{C_U,C_L} \frac{dz'}{z'-z}\begin{pmatrix} B(z') \\ H(z') \end{pmatrix}$ を求める．ただし，実磁極が上半面／下半面に応じて C_U／C_L を使い分ける．Fig. 1において，z は界面上の観測点，z_1, z_2 は磁極またはその鏡像点，

C_1 は界面に沿う経路，C_2 は z を迂回する半円，C_3 は無限遠方半円である．Cauchy の積分定理によれば，この複素積分の値は特異点の留数和で表すことができる．積分路を C_1, C_2, C_3 へ分解し，C_3 からの寄与を落とせば，C_{U}, C_{L} それぞれについて「Hilbert 変換式」

$$\begin{cases} \text{上半面:} \begin{pmatrix} B(z) \\ H(z) \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} B^{(2)}(z) \\ H^{(2)}(z) \end{pmatrix} + \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{C_1} \dfrac{\mathrm{d}z'}{z'-z}\begin{pmatrix} B(z') \\ H(z') \end{pmatrix}, \\ \text{下半面:} \begin{pmatrix} B(z) \\ H(z) \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} B^{(1)}(z) \\ H^{(1)}(z) \end{pmatrix} - \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{C_1} \dfrac{\mathrm{d}z'}{z'-z}\begin{pmatrix} B(z') \\ H(z') \end{pmatrix} \end{cases} \tag{9}$$

が導かれる．$B^{(2)}(z), H^{(2)}(z)$ ／ $B^{(1)}(z), H^{(1)}(z)$ が上半面／下半面にある特異点の留数和を表すが，上半面の特異点が z_2，下半面の特異点が z_1 だけなら，

$$\begin{cases} \text{上半面:} \begin{pmatrix} B^{(2)}(z) \\ H^{(2)}(z) \end{pmatrix} = -\lim\limits_{z' \to z_2} \dfrac{z'-z_2}{z'-z}\begin{pmatrix} B(z') \\ H(z') \end{pmatrix}, \\ \text{下半面:} \begin{pmatrix} B^{(1)}(z) \\ H^{(1)}(z) \end{pmatrix} = -\lim\limits_{z' \to z_1} \dfrac{z'-z_1}{z'-z}\begin{pmatrix} B(z') \\ H(z') \end{pmatrix} \end{cases} \tag{10}$$

のようになる．これらは，既知量としての外場を与える．

Hilbert 変換式 (9) において，界面形状が直線で，第 1 式／第 2 式で上半面／下半面に特異点が存在しないとき，いわゆる Hilbert 変換が両辺の実部・虚部から導かれる．

任意形状の界面を $z(t) = x(t) + iy(t)$ と媒介変数表示するときの界面座標 t の関数として，界面磁場を直接求める方程式を導出する．なお，界面勾配角 $\theta(t)$・空間収縮率 $\tau(t)$ との関係は，$\mathrm{d}z(t)/\mathrm{d}t = e^{i\theta(t)-\tau(t)}$ となる．以後，$z = z(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\tau = \tau(t)$, $z' = z(t')$, $\theta' = \theta(t')$, $\tau' = \tau(t')$ と略記する．

(8b) に基づいて界面磁場が求められることから，(9) の両辺に $e^{i\theta}$ をかけ

て実部または虚部を取り，界面条件 (8a) を用いれば，「界面磁場方程式」

$$\begin{cases} \text{上半面:} \begin{pmatrix} b_{\mathrm{n}}(t) \\ h_{\mathrm{s}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{\mathrm{n}}^{(2)}(t) \\ h_{\mathrm{s}}^{(2)}(t) \end{pmatrix} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \frac{K(t,t')}{t'-t} \begin{pmatrix} b_{\mathrm{n}}(t') \\ h_{\mathrm{s}}(t') \end{pmatrix}, \\ \text{下半面:} \begin{pmatrix} b_{\mathrm{n}}(t) \\ h_{\mathrm{s}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{\mathrm{n}}^{(1)}(t) \\ h_{\mathrm{s}}^{(1)}(t) \end{pmatrix} - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \frac{K(t,t')}{t'-t} \begin{pmatrix} b_{\mathrm{n}}(t') \\ h_{\mathrm{s}}(t') \end{pmatrix} \end{cases} \tag{11}$$

が導かれる．ただし，外場の界面に関する成分および積分核を

$$\begin{cases} \text{上半面:} \begin{pmatrix} b_{\mathrm{n}}^{(2)}(t) \\ h_{\mathrm{s}}^{(2)}(t) \end{pmatrix} \equiv 2 \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\, B^{(2)}(z) e^{i\theta} \\ -\mathrm{Re}\, H^{(2)}(z) e^{i\theta} \end{pmatrix}, \\ \text{下半面:} \begin{pmatrix} b_{\mathrm{n}}^{(1)}(t) \\ h_{\mathrm{s}}^{(1)}(t) \end{pmatrix} \equiv 2 \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\, B^{(1)}(z) e^{i\theta} \\ -\mathrm{Re}\, H^{(1)}(z) e^{i\theta} \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{12}$$

$$K(t,t') \equiv \mathrm{Im}\, \frac{e^{i\theta(t)-\tau(t')}(t'-t)}{z(t')-z(t)} \tag{13}$$

と表した．界面形状を直線とすれば $K(t,t')=0$ となることから，この積分核は界面の曲率効果を表すと考えられる．界面磁場方程式 (11) は，b_{n}, h_{s} ごとに互いに独立に解ける．第１式・第２式は，実磁極が上半面・下半面いずれにあるかで使い分け，両方にあれば，それぞれの解を重ね合わせる．

2.5　透磁性円筒と線磁極の厳密解による界面磁場方程式の検証

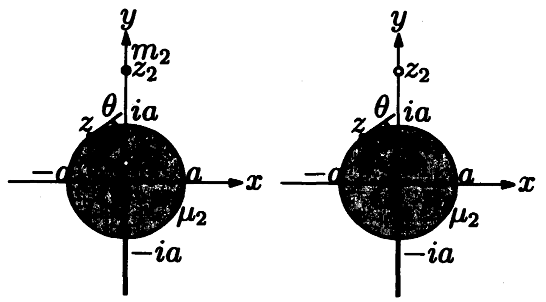

Fig. 2: Permeable cylinder and external (left) or internal (right) linear magnetic pole.

界面形状が一般的な場合，界面磁場方程式は，後に述べるような方法で近似的に解くことになるが，界面が直線あるいは円形なら，磁場分布は解析的

に求めることができ，それにより，界面磁場方程式の正当性を確認できる．Fig. 2のように，半径 a の透磁性円筒の外部 z_2 に強さ m_2，または内部 z_1 に強さ m_1 の線磁極があるとき，円筒外部の複素磁場 $f_2(z)$ と円筒内部の複素磁場 $f_1(z)$ は厳密に，

$$\text{外部磁極:}\begin{cases} f_2(z)=\mu_2\left(\dfrac{m_2}{z-z_2}-\dfrac{\delta m_2}{z-z_1}+\dfrac{\delta m_2}{z}\right), \\ f_1(z)=\mu_1\left(\dfrac{m_2}{z-z_2}-\dfrac{\delta m_2}{z-z_2}\right), \end{cases} \tag{14}$$

$$\text{内部磁極:}\begin{cases} f_2(z)=\mu_2\left(\dfrac{m_1}{z-z_1}+\dfrac{\delta m_1}{z-z_1}\right), \\ f_1(z)=\mu_1\left(\dfrac{m_1}{z-z_1}+\dfrac{\delta m_1}{z-z_2}-\dfrac{\delta m_1}{z}\right) \end{cases} \tag{15}$$

となる．ただし，$z_1\equiv ir_1$ と $z_2\equiv ia^2/r_1$ は，界面に関して互いの鏡像点である．このとき，(5) にしたがって求めた合成場は次のようになる．

$$\text{外部磁極:}\begin{cases} B(z)=\dfrac{\mu_1\mu_2 m_2}{\mu_1+\mu_2}\left(-\dfrac{1}{z-z_2}+\dfrac{1}{z-z_1}-\dfrac{1}{z}\right), \\ H(z)=\dfrac{\mu_2 m_2}{\mu_1+\mu_2}\left(\dfrac{1}{z-z_2}+\dfrac{1}{z-z_1}-\dfrac{1}{z}\right), \end{cases} \tag{16}$$

$$\text{内部磁極:}\begin{cases} B(z)=\dfrac{\mu_1\mu_2 m_1}{\mu_1+\mu_2}\left(\dfrac{1}{z-z_2}-\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z-z_1}\right), \\ H(z)=\dfrac{\mu_1 m_1}{\mu_1+\mu_2}\left(\dfrac{1}{z-z_2}-\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-z_1}\right). \end{cases} \tag{17}$$

(14),(15) の $f_2(z)$, $f_1(z)$ は z だけの関数なので，特異点以外で解析性を満たす．一方，界面条件 $[h_\mathrm{s}]=0$, $[b_\mathrm{n}]=0$ を満たすことは，(16),(17) を (8a) に代入して示される．このとき，円筒の表面の方程式 $z=iae^{-it}$ $(-\pi<t<\pi)$ および $z_1z_2^*=a^2$ から導かれた，以下の関係を用いる．

$$\begin{cases} zz^*=a^2, \quad \mathrm{d}z(t)/\mathrm{d}t=ae^{-it}=e^{i\theta-\tau}\ \to\ e^{i\theta}=z/ia, \\ \dfrac{z}{z-z_1}=\left(\dfrac{z_2}{z_2-z}\right)^*, \quad \dfrac{z}{z-z_2}=\left(\dfrac{z_1}{z_1-z}\right)^*. \end{cases} \tag{18}$$

(16),(17) を界面磁場方程式 (11) に直接代入して，その正当性を確認する [2]．ただし，上半面 (2) が円筒外部，下半面 (1) が円筒内部に対応する．ま

ず (12) で定義した外場 $b_{\rm n}^{(1,2)}$, $h_{\rm s}^{(1,2)}$ については，$B^{(2)}(z)$, $H^{(2)}(z)$ は円筒外部，$B^{(1)}(z)$, $H^{(1)}(z)$ は円筒内部にある特異点の留数を集めて，

$$\begin{cases} \text{外部磁極:} \begin{pmatrix} b_{\rm n}^{(2)}(t) \\ h_{\rm s}^{(2)}(t) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -\dfrac{\mu_1\mu_2 m_2}{\mu_1+\mu_2}\mathrm{Im}\,\dfrac{1}{z-z_2}e^{i\theta} \\ -\dfrac{\mu_2 m_2}{\mu_1+\mu_2}\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{z-z_2}e^{i\theta} \end{pmatrix}, \\ \text{内部磁極:} \begin{pmatrix} b_{\rm n}^{(1)}(t) \\ h_{\rm s}^{(1)}(t) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \dfrac{\mu_1\mu_2 m_1}{\mu_1+\mu_2}\mathrm{Im}\left(-\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z-z_1}\right)e^{i\theta} \\ -\dfrac{\mu_1 m_1}{\mu_1+\mu_2}\mathrm{Re}\left(-\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-z_1}\right)e^{i\theta} \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{19}$$

一方積分項は，$b_{\rm n}$, $h_{\rm s}$ の合成場による表現 (8b) と積分核の定義 (13) を置き戻して（複号は外部磁極・内部磁極に対応），

$$\pm\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\frac{K(t,t')}{t'-t}\begin{pmatrix} b_{\rm n}(t') \\ h_{\rm s}(t') \end{pmatrix}$$

$$\to \pm\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\mathrm{d}t'\frac{K(t,t')}{t'-t}\begin{pmatrix} b_{\rm n}(t') \\ h_{\rm s}(t') \end{pmatrix} = \mp\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t'\begin{pmatrix} -\mathrm{Re}\,\dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}\dfrac{B(z')e^{i\theta}}{z'-z} \\ -\mathrm{Im}\,\dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}\dfrac{H(z')e^{i\theta}}{z'-z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} -\begin{pmatrix} \dfrac{\mu_1\mu_2 m_2}{\mu_1+\mu_2}\mathrm{Im}\left(-\dfrac{1}{z-z_2}-\dfrac{1}{z-z_1}+\dfrac{1}{z}\right)e^{i\theta} \\ -\dfrac{\mu_2 m_2}{\mu_1+\mu_2}\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z-z_2}-\dfrac{1}{z-z_1}+\dfrac{1}{z}\right)e^{i\theta} \end{pmatrix} & \text{:外部磁極,} \\ +\begin{pmatrix} \dfrac{\mu_1\mu_2 m_1}{\mu_1+\mu_2}\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z-z_2}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-z_1}\right)e^{i\theta} \\ -\dfrac{\mu_1 m_1}{\mu_1+\mu_2}\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z-z_2}+\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z-z_1}\right)e^{i\theta} \end{pmatrix} & \text{:内部磁極.} \end{cases} \tag{20}$$

となる．ただし，z_0 が円筒外部，円筒内部かに応じて，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t'\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}\frac{1}{z'-z}\frac{1}{z'-z_0} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{z-z_0}\oint\mathrm{d}z'\left(\frac{1}{z'-z}-\frac{1}{z'-z_0}\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{z-z_0}(\pi i - 0\pi i) = \dfrac{i}{z-z_0} & \text{: 円筒外部,} \\ \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{z-z_0}(\pi i - 2\pi i) = -\dfrac{i}{z-z_0} & \text{: 円筒内部} \end{cases} \tag{21}$$

を用いた．(19) と (20) を加え合わせれば (8b) の右辺に一致し，結局，界面磁場方程式を満たすことが示される．

3　界面磁場方程式の解法 [2]

透磁性円筒と線磁極の厳密解が界面磁場方程式を満たすことで，界面磁場方程式の正当性を示すことができたが，円以外の界面形状でも，できるだけ正確に解を求める方法を確立しておく必要がある．

3.1　繰り返し法

界面磁場方程式の2本の式をまとめて，次のように表す．

$$x(t) = x^{(0)}(t) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t'}{t'-t}K(t,t')x(t'). \tag{22}$$

通常，解 $x(t)$ は界面上の離散点 $t = t_k$ $(1 \le k \le N)$ で求めるので，これらの点における値を集合的に $\boldsymbol{x} \equiv \{x(t_k)\}$ $(1 \le k \le N)$ と表せば，(22) は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \tag{23}$$

となる．ただし，(22) の積分項

$$g(x(t)) = \mathsf{H}f(t,t'), \tag{24}$$
$$f(t,t') \equiv K(t,t')x(t'), \quad \mathsf{H}h(t') \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t'}{t'-t}h(t')$$

の $t = t_k$ における値を集合的に $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ で表した．ここで，(24) の $f(t,t')$ を直交関係

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\psi_i^*(t')\psi_j(t') = \delta_{ij} \ \sim \ \boldsymbol{\Psi}^*\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{I} \tag{25}$$

を満たす基底関数 $\boldsymbol{\Psi} \equiv \{\psi_i(t')\}$ $(t' = t_k,\ 1 \le i, k \le N)$ で，

$$f(t,t') = \sum_{i=1}^{N}\psi_i(t')\tilde{f}_i(t) \ \sim \ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\Psi}\tilde{\boldsymbol{f}} \tag{26}$$

と展開する．展開係数は

$$\tilde{f}_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \psi_i^*(t') f(t,t') \ \sim\ \tilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{\Psi}^* \boldsymbol{f} = \{\tilde{f}_i(t)\}\ (1 \le i \le N) \tag{27}$$

と求めることができるが，これには t 依存性が残っている．

基底関数が三角関数のとき，展開(26)はFourier級数となるが，Hilbert演算子を基底関数に作用させた結果は，

$$\mathsf{H} \cos it' = -\sin it, \quad \mathsf{H} \sin it' = \cos it$$

のように，互いに逆な対称性を持つ基底関数列に移り変わるので，

$$\varphi_i(t) = \mathsf{H}\psi_i(t') = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t'}{t'-t}\psi_i(t') \ \sim\ \boldsymbol{\Phi} = \mathsf{H}\boldsymbol{\Psi} \tag{28}$$

と置くことにする．ただし，Hilbert変換後の基底関数 $\boldsymbol{\Phi} \equiv \{\varphi_i(t)\}$ についても，直交関係

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \varphi_i^*(t)\varphi_j(t) = \delta_{ij} \ \sim\ \boldsymbol{\Phi}^*\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{I} \tag{29}$$

があるとする．以上により，積分項(24)は，基底関数による展開表示で

$$\begin{aligned} g(x(t)) &= \mathsf{H}f(t,t') = \mathsf{H}\sum_{i=1}^{N}\psi_i(t')\tilde{f}_i(t) = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i(t)\tilde{f}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\varphi_i(t)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\psi_i^*(t')f(t,t') \\ &\sim\ \boldsymbol{g} = \mathsf{H}\boldsymbol{f} = \mathsf{H}\boldsymbol{\Psi}\tilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{\Phi}\tilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}^*\boldsymbol{f} \end{aligned} \tag{30}$$

と表される．すなわち，Hilbert演算子の作用結果を評価するには，特異積分を数値的に行うまでもなく，基底関数で $f(t,t')$ を展開後，基底関数を入れ換えればよい．

(23)に基づけば，まず $\boldsymbol{x}^{(0)}$ で $\boldsymbol{x}$ を近似し，次に右辺全体で $\boldsymbol{x}$ を更新し，この更新を繰り返して $\boldsymbol{x}$ を求めて行く手続きが考えられる．しかし実際にこの手続きを実行してみると発散し，その程度は N が大きいほど著しくなる．

3.2 逆演算子法

繰り返しによらず，界面方程式の解を直接的に求める方法を考える．今，$x(t)$ を基底関数で

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(t)\tilde{x}_i \sim \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}\tilde{\boldsymbol{x}} \tag{31}$$

のように展開するとき，展開係数

$$\tilde{x}_i = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\varphi_i^*(t)x(t) \sim \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\Phi}^*\boldsymbol{x}. \tag{32}$$

を界面方程式から求めることにする．(24) の積分項 $g(x(t))$ も (31) と同様に展開するが，$g(x(t))$ は $x(t)$ について線形なので，展開係数 $\tilde{g}_i$ は，結果として，以下のように $\tilde{x}_i$ の線形結合となる．

$$g(x(t)) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(t)\tilde{g}_i = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(t) \left\{ \sum_{j=1}^{N} G_{ij}\tilde{x}_j \right\} \sim \boldsymbol{g} = \boldsymbol{\Phi}\tilde{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{x}}. \tag{33}$$

(23) の $x(t)$, $g(x(t))$ に展開 (31),(33) を用いた

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}^{(0)} - \boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{x}} \tag{34}$$

は，$\tilde{\boldsymbol{x}}$ について次のように解くことができる．

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G})^{-1}\tilde{\boldsymbol{x}}^{(0)}. \tag{35}$$

積分項係数 $\boldsymbol{G}$ を決めるため，積分項の中の $x(t)$ を (31) で展開すれば，

$$\begin{aligned} g(x(t)) &= \mathsf{H}\{K(t,t')x(t')\} = \sum_{j=1}^{N} \{\mathsf{H}K(t,t')\varphi_j(t')\}\tilde{x}_j \equiv \sum_{j=1}^{N} \{\mathsf{H}f_j(t,t')\}\tilde{x}_j \\ &\sim \boldsymbol{g} = \mathsf{H}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}) = \mathsf{H}(\boldsymbol{K}\Phi)\tilde{\boldsymbol{x}} \equiv \mathsf{H}\boldsymbol{F}\tilde{\boldsymbol{x}}. \end{aligned} \tag{36}$$

次いで $\mathsf{H}f_j(t,t')$ を，(30) の $\mathsf{H}f(t,t')$ と同様，基底関数の入れ換えで扱えば，

$$\mathsf{H}f_j(t,t') = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\psi_i^*(t')f_j(t,t') \right\} \sim \mathsf{H}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}^*\boldsymbol{F}. \tag{37}$$

(36) と (33) を等値すれば，$\boldsymbol{\Phi G}$ に $\mathsf{H}\boldsymbol{F}$ が対応することから，積分項係数は以下のように求められる．

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \varphi_i^*(t) \mathsf{H} f_j(t,t') \\ &\sim \boldsymbol{G} = \boldsymbol{\Phi}^* \mathsf{H} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\Phi}^*(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}^*\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{\Phi}^*(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}^*\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}). \end{aligned} \tag{38}$$

すなわち，$\boldsymbol{G}$ を求めるには，$K(t,t')\varphi_j(t') \sim \boldsymbol{K\Phi}$ を用意して，$\boldsymbol{\Psi}^*, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Phi}^*$ を順に作用させる．このとき，$\boldsymbol{K}$ が含む t により，$\boldsymbol{\Phi}$ と共に $\boldsymbol{\Psi}^*\boldsymbol{K\Phi}$ が t に依存するため，(29) に基づいて最後の 2 つの作用を対にして省略することはできない．

4 逆演算子法による界面磁場方程式の数値解

Fig. 3 に，厳密解と比較して，逆演算子法で数値的に求めた界面磁場方程式の解を示す．(a),(b) はそれぞれ，外部磁極・内部磁極の場合で，各図左は界面と磁極の位置，各図右の横軸は $t = -\theta\,(-\pi < t < \pi)$，破線・実線は h_s・b_n，細線・太線は厳密解・数値解を表す．h_s の分布は $t = 0$ に関して反対称，b_n の分布は対称なため，基底関数 $\varphi_i(t)$ にはそれぞれ $\sin it \cdot \cos(i-1)t$ を用いた．外部磁極の場合，$|\theta| \simeq 3\pi/4$ 付近の h_s の膨らみを除けば，数値解は比較的厳密解に近いが，内部磁極の場合，h_s では全体的に近いものの，

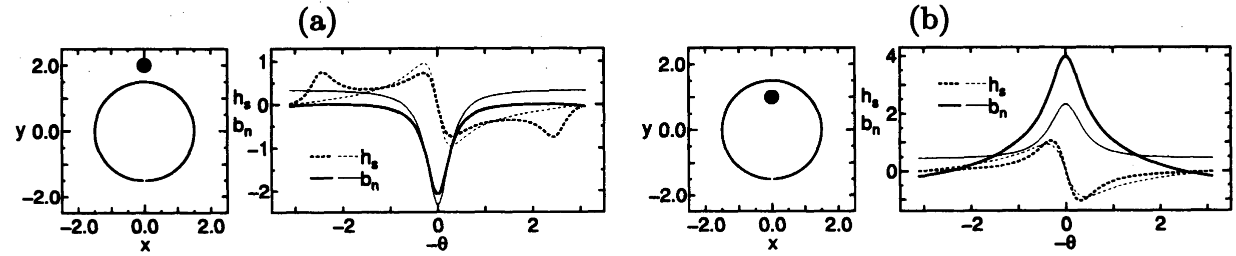

Fig. 3: Comparison of calculated (thick) and theoretical (thin) interface magnetic fields h_s (dotted) and b_n (solid) on the surface of a permeable cylinder by a magnetic pole line outside (a) and inside (b) of it.

$\theta \simeq 0$ 付近で $b_{\rm n}$ の差が大きくなっている．

5　より厳密な界面磁場決定方法

磁性流体自由表面のような大きく複雑に変形した界面でも，任意に与えた既知の外場から界面磁場を近似なく求めるために，解析性と界面条件に基づいて「界面磁場方程式」を導出し,「透磁性円筒と線磁極」について，その数値解を厳密解と比較したが，よりよい一致を得るにはまだ改良の余地がある．その検討中に，解析性と密接に関係した (1) 写像変換，(2) 複素ポテンシャル，(3) Hilbert 変換，を援用すれば，界面磁場を求めるためのもっと簡明な方法を示せることがわかった．モデル的でない既知の外場から界面磁場を厳密に求められるが，それにもかかわらず，解析の負担は，有限要素法のような本格的な数値解析法はもとより，前節までの界面磁場方程式に較べてもずっと軽く，以前実行していた写像変換法に匹敵する [3, 4]．また，3 次元解析へも拡張できる．この方法を用いた界面形状の決定や動的解析については，日を置かず，報告したい．

参考文献

[1] 水田　洋: 磁性流体自由表面解析における界面磁場方程式; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の構造と力学」, **1271**, p.61 (2002).

[2] 水田　洋: 磁場－流体強結合系の発展方程式とその解; 数値流体力学シンポジウム講演論文集, **16** (http://www.ad.mech.tohoku.ac.jp/cfd16/), D15-2 (2002).

[3] 水田　洋: 強磁場における磁性流体表面波の解析; 京都大学数理解析研究所講究録「波の非線形現象の数理とその応用」, **949**, p.40 (1996).

[4] Y.Mizuta: Analysis on large free surface deformation of magnetic fluid; Mathematical Sciences and Applications, **10**, p.337 (1997).