

渦糸の伸縮-局所誘導方程式の初期値問題として-

日大・理工 紺野 公明 (Kimiaki Konno)*

富山大・工 角畠 浩 (Hiroshi Kakuhata)**

*Department of Physics, College of Science and Technology,
Nihon University,

** Toyama University

1 初めに

我々は三次元空間で伸縮する弦 (string, filament) の運動について研究を行っている.[1][2][3] この報告では局所誘導方程式 (渦糸の運動方程式)

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_{ss} \tag{1}$$

について渦糸の伸縮と言う立場から初期値問題を考える. ここで, \mathbf{r} は位置ベクトル

$$\mathbf{r} = (X, Y, Z), \tag{2}$$

を表す.

方程式の厳密解は接線ベクトル $\mathbf{t} = \partial\mathbf{r}/\partial s$ の絶対値が $|\mathbf{t}| = 1$ を満たすため伸縮がない. では初期値として局所的に伸縮を持つ渦糸を考え, (1) の方程式に従って時間発展させたら, 伸縮のある領域とその渦糸の形が時間経過と共にどの様な運動を行うのか興味があり数値計算を行う. 初期値として, [1] 渦糸ソリトンとそれを基に作られた伸縮を持つ波形, [2] 2次元ループ状の形状で伸縮を持つ波形, それと [3] 2次元の孤立波の形状で伸縮のある波形の三種類を考える.

波形の伸縮性を理解するため例としてシェア一流の中での渦糸の運動について数値計算を行う. そのシェア一流によって渦糸が変形され, それを定義された局所伸縮という言葉で表す.

次の章では渦糸の局所伸縮の定義を行う. 第3章ではシェア一流の中での渦糸の運動を調べる. 第4章では与えられた初期値について数値計算の結果を示す. 最後にまとめを行う.

2 伸縮の定義

局所的な渦糸の長さ $dl(s)$ は

$$dl = \sqrt{(dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2} \tag{3}$$

で与えられ, (1) 式の弧長 s で書き直す.

$$dl(s) = \sqrt{(X_s)^2 + (Y_s)^2 + (Z_s)^2} ds \tag{4}$$

局所的な渦糸の伸縮 l_s を次のように定義する.

$$l_s = \frac{dl}{ds} = \sqrt{(X_s)^2 + (Y_s)^2 + (Z_s)^2}. \quad (5)$$

$l_s = 1$ は伸びのないことを意味し, $l_s > 1$ は渦糸が伸びていることを, $l_s < 1$ は渦糸が縮んでいることを表す.

3 シェア一流と渦糸の伸び

渦糸の伸縮を見るために x 方向に作用するシェア一流の中での渦糸の運動を見る. 運動方程式を

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_{ss} + \alpha \tanh \frac{Y}{\Delta} \mathbf{e}_1. \quad (6)$$

で与える. \mathbf{e}_1 は x 方向の単位ベクトルである. 定数を $\alpha = 2$ と $\Delta = 1$ に取る.

初期値として渦糸ソリトン解

$$\begin{aligned} X &= \frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \sin(2\Omega + \delta) \operatorname{sech}(2\Theta + \epsilon), \\ Y &= -\frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \cos(2\Omega + \delta) \operatorname{sech}(2\Theta + \epsilon), \\ Z &= s - \frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \tanh(2\Theta + \epsilon) \end{aligned} \quad (7)$$

を考える. Ω, Θ 及び定数は

$$\begin{aligned} \Omega &= \lambda_R s - \omega_R t, & \Theta &= \lambda_I s - \omega_I t, \\ \tan \delta &= -\frac{2\lambda_R \lambda_I}{\lambda_R^2 - \lambda_I^2}, & \epsilon &= -\frac{1}{2} \log \frac{|c_0|^2}{4\lambda_I^2} \end{aligned} \quad (8)$$

で与えられる. c_0 は定数である. 波数 $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ と振動数 $\omega = \omega_R + i\omega_I$ との関係は次の分散式から決められる.

$$\omega = 2\lambda^2 \quad (9)$$

数値計算の結果を図1に示す. 左図は初期に与えた渦糸ソリトンは正の方向に伝搬しているが, シェア一流のため渦糸の一部が時間と共に引き延ばされている波形を示している. z 軸の正の方向から見た中央の図で渦糸が x 方向の正と負の両側の方向に引き延ばされていく様子を見ることができる. 右図は局所伸縮を表すために横軸を Z に縦軸を局所伸縮 l_s に取ってある. 伸ばされている位置とその大きさを図から読みとることが出来る.

4 初期値問題

4.1 渦糸ソリトン

先ず、初期値として渦糸ソリトン解 (7) に伸縮を与える因子 A を掛けた次の式を考える。

$$\begin{aligned} X &= A \frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \sin(2\Omega + \delta) \operatorname{sech}(2\Theta + \epsilon), \\ Y &= -A \frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \cos(2\Omega + \delta) \operatorname{sech}(2\Theta + \epsilon), \\ Z &= s - \frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \tanh(2\Theta + \epsilon), \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $A = 1$ とすると方程式 (1) の厳密解を与え局所伸縮を持たない。

局所伸縮は

$$\begin{aligned} l_s^2 &= A^2(X_s^2 + Y_s^2) + Z_s^2 \\ &= 1 + \frac{4\lambda_I^2}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} (A^2 - 1) [\operatorname{sech}^2(2\Theta + \epsilon) - \frac{\lambda_I^2}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \operatorname{sech}^4(2\Theta + \epsilon)] \end{aligned} \quad (11)$$

で与えられる。 $A < 1$ のとき局所的に縮んだ領域を持ち、 $A > 1$ のとき局所的に伸びた領域を持つ。

数値計算は、 $\lambda = 1.5 + i$, $c_0 = 1$ とし A の値 1, 0.8 と 1.2 の場合について行いそれぞれ図 2, 図 3 及び図 4 に示してある。特徴的なことは伸縮性を持つ初期値についてはその伸縮のある領域が時間経過にも関わらず同じ領域に固定されているように見える。波形の運動については、縮のある波形は速く伝搬し、次に伸縮のない波形、一番遅いのが伸びのある波形であることが観測された。

4.2 2次元ループ形状を持つ初期値

初期値として2次元ループ形状の波形

$$\begin{aligned} X &= 0, \\ Y &= A \operatorname{sech} ks, \\ Z &= s - 2 \tanh ks \end{aligned} \quad (12)$$

を考える。局所伸縮は

$$l_s^2 = 1 + 4(A^2 - 1) \operatorname{sech}^2 ks \tanh^2 ks. \quad (13)$$

で与えられる。ただし、 $k=2$ に取ってある。

A として局所伸縮のない場合、縮んでいる場合と伸びている場合に対応する 1, 0.8 と 1.2 のそれぞれの値に対し図 5, 図 6 と図 7 に結果を示した。この場合も渦糸ソリトンと同様、伸縮のある領域は時間経過をしても初期で与えられた領域に固定されたままであった。より詳しくは伸びのあるときは伸縮のある領域が初期で与えられた領域の周りを時間経過によって前後運動していた。この初期値で特徴的なことは伸びがない $A=1$ ときはループ状の波形は正の方向に伝搬するが、伸び $A=1.2$ と縮み $A=0.8$ を持つ波形はその伸縮している領域にピンニングされ、計算時間内では伝搬していないことが観測された。

4.3 2次元孤立波形状を持つ初期値

2次元孤立波形状を持つ初期値

$$\begin{aligned} X &= 0, \\ Y &= A \operatorname{sech} ks, \\ Z &= s \end{aligned} \quad (14)$$

を考える。局所伸縮は

$$l_s^2 = 1 + k^2 A^2 \operatorname{sech}^2 ks \tanh^2 ks. \quad (15)$$

で与えられる。ここで $A=1$ と $k=2$ にとり数計算を行った結果を図 8 に示す。伸びのある場所はやはり初期に与えた場所に固定されているが振幅は小さくなると共に正と負の方向に伝搬する回転する波を放出していることが見られた。

5 終わりに

我々は局所伸縮の定義を与えた。局所誘導方程式に局所伸縮を持つ初期値を与え、その伸縮が時間経過と共にどのように変わるか、また、波形が期間経過と共にどのように変化していくかを数値的に調べた。その主な結果は次の 2 点である。

- (1) 初期値で与えた伸縮のある領域は時間が経過してもほぼ同じ領域にフリーズされていた。
- (2) (12) で与えた初期に伸縮を持つ波形は、時間経過後もその伸縮のある領域に波形がピンニングされていた。

これらの局所伸縮のフリージング現象と波形のピンニング現象の詳細な解析はこれからの課題である。実験的にはタンク内に作られる渦糸には軸方向の流れが生成されるのでその効果を取り入れなければならない。その軸方向流を持つ流れの中での局所伸縮のフリージング現象とか波形のピンニング現象がどの様になるのか興味がある。

伸び縮の具体的例として局所誘導方程式にシェア一流を加え渦糸ソリトンの時間発展を見た。よく知られたシェア一流の効果で渦糸が伸びていく過程が見られた。しかし、局所伸縮の定義を与え、その立場で渦糸の伸び縮みを表現したの初めてであると思う。

References

- [1] Kimiaki Konno and Hiroshi Kakuata, An integrable system with two hierarchies and related topics in "Nonlinear Physics: Theory and Experiments II" (World Scientific) to appear in (2003).
- [2] K. Konno and H. Kakuata, Stretching and shrinking of loop soliton interacting with external field presented in NEEDS 2002, Cadiz, Spain June, 2002.
- [3] K. Konno and H. Kakuata, Stability of string soliton by balancing between its stretching and shrinking, to be submitted for publication.

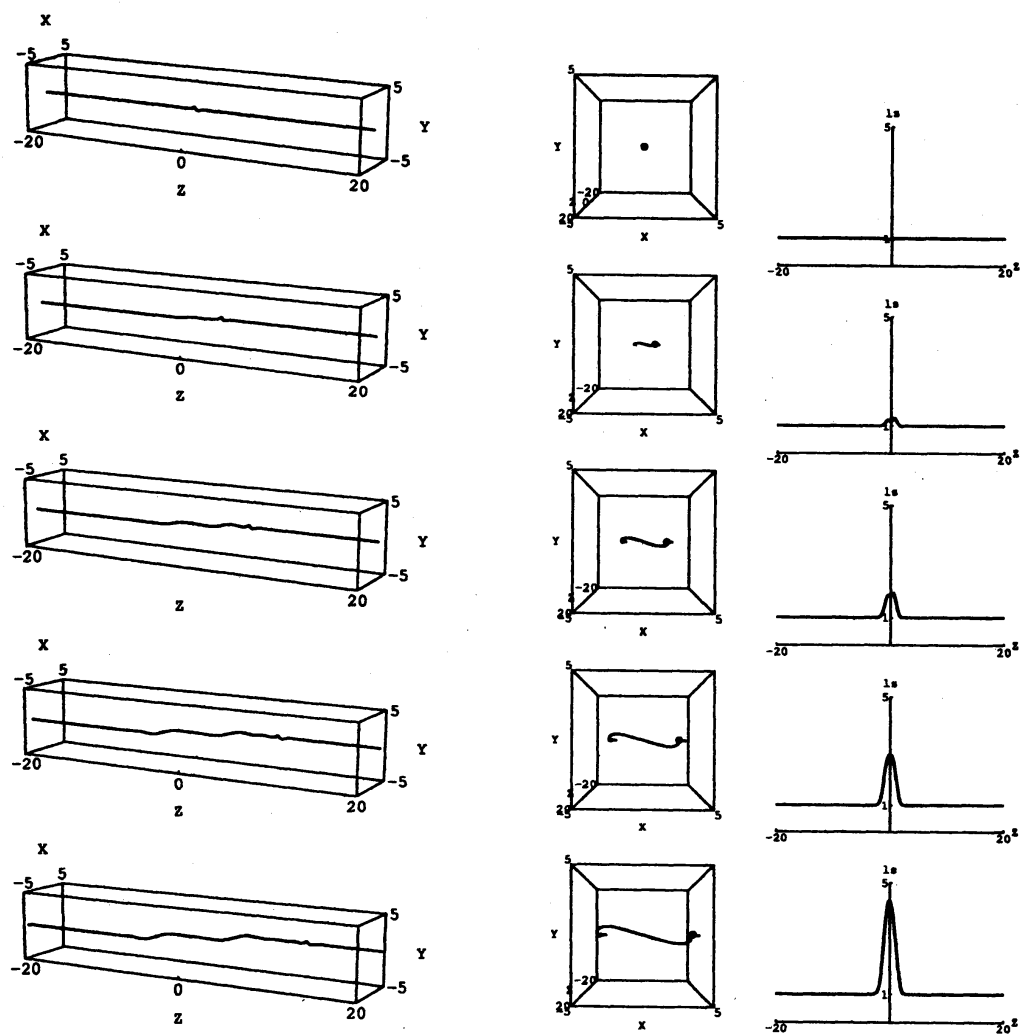


Figure 1: Time evolution of filament(left), its top view from the positive Z axis(middle) and local stretch l_s vs. Z (right) at $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ from the top to the bottom.

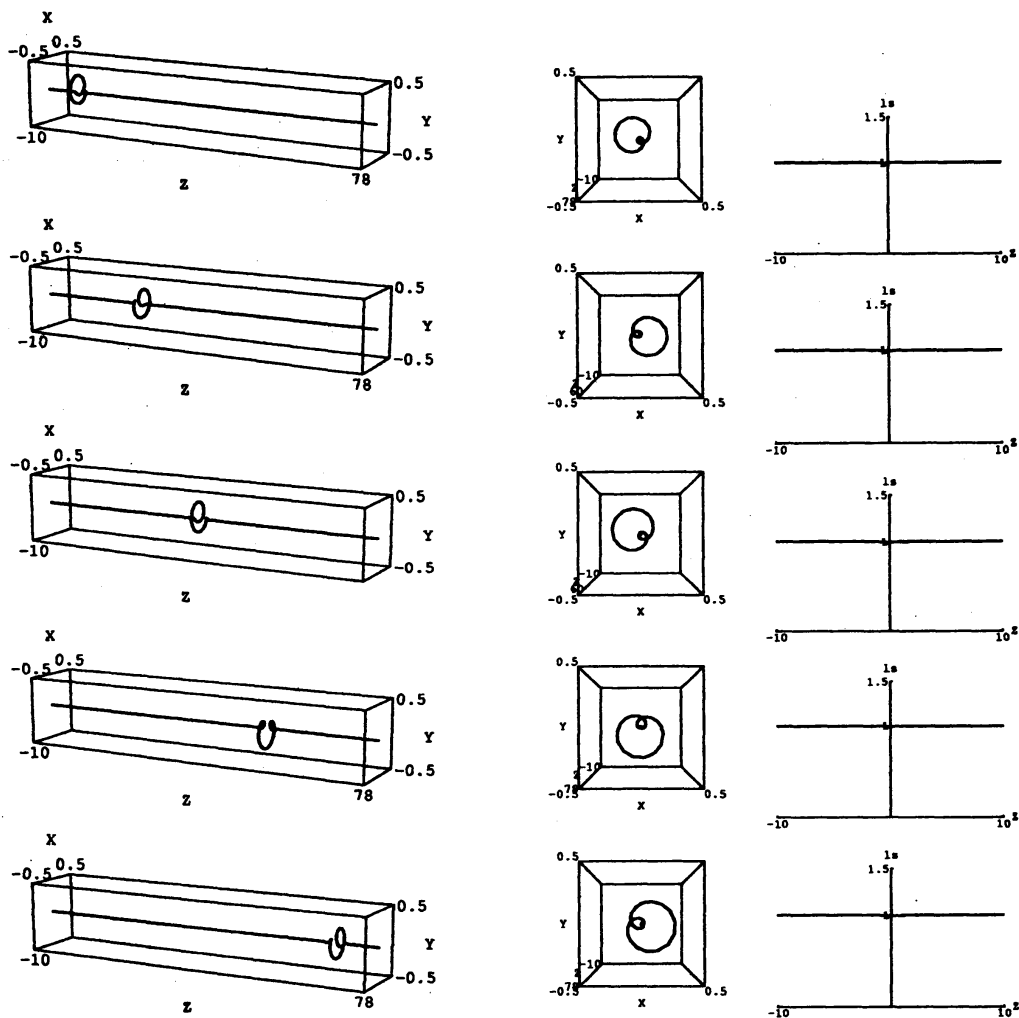


Figure 2: Time evolution of filament(left), its top view from the positive Z axis(middle) and local stretch l_s vs. Z (right) at $t = 0, 3, 6, 9, 12$ for $A = 1$ and $\lambda = 1.5 + i$ from the top to the bottom.

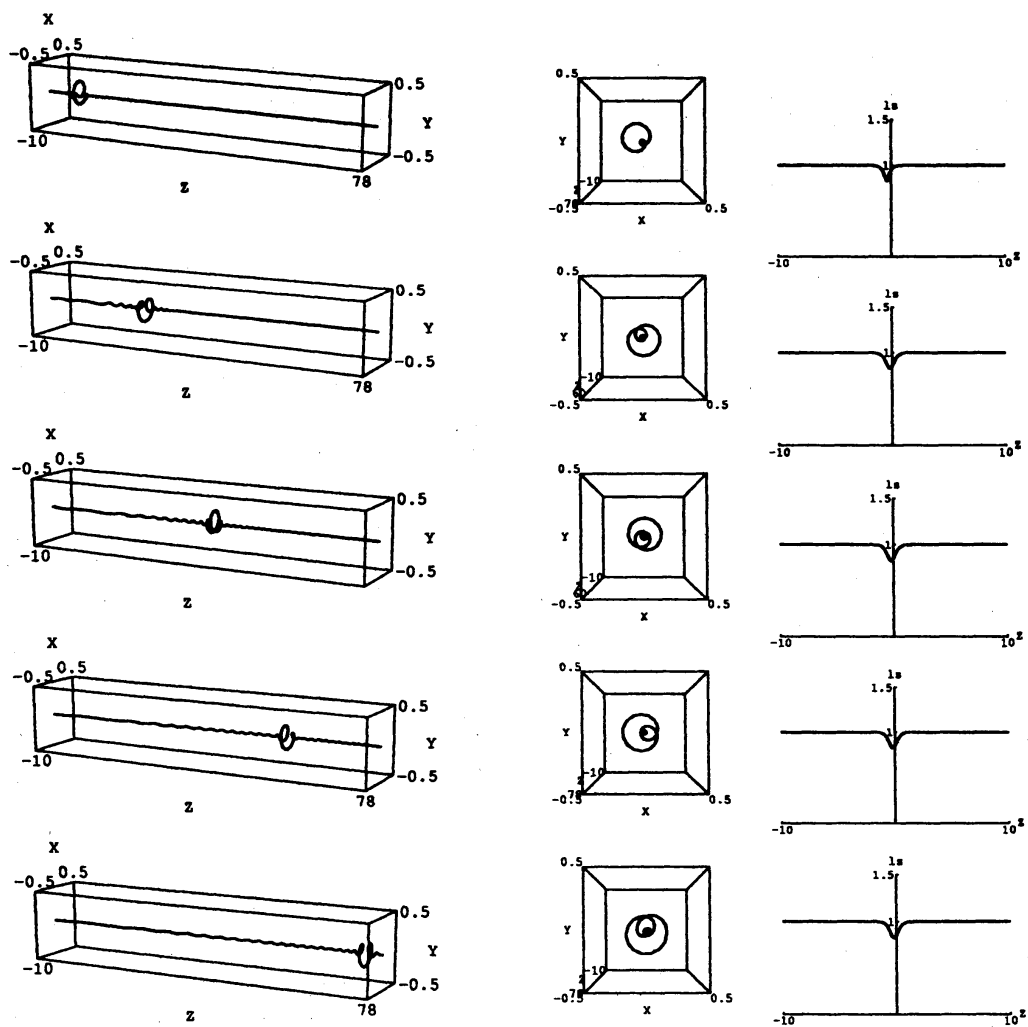


Figure 3: Time evolution of filament(left), its top view from the positive Z axis(middle) and local stretch l_s vs. Z (right) at $t = 0, 3, 6, 9, 12$ for $A = 0.8$ and $\lambda = 1.5 + i$ from the top to the bottom.

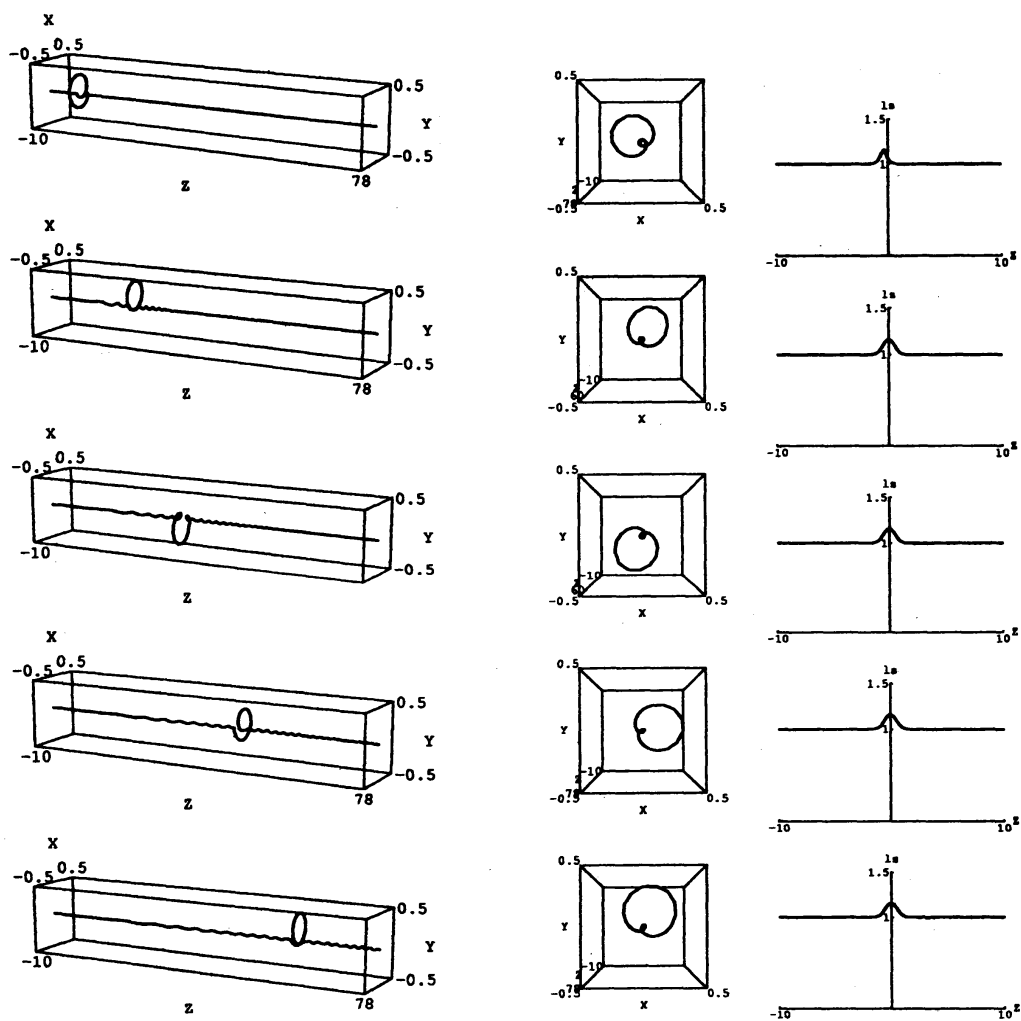


Figure 4: Time evolution of filament(left), its top view from the positive Z axis(middle) and local stretch l_s vs. Z (right) at $t = 0, 3, 6, 9, 12$ for $A = 1.2$ and $\lambda = 1.5 + i$ from the top to the bottom.

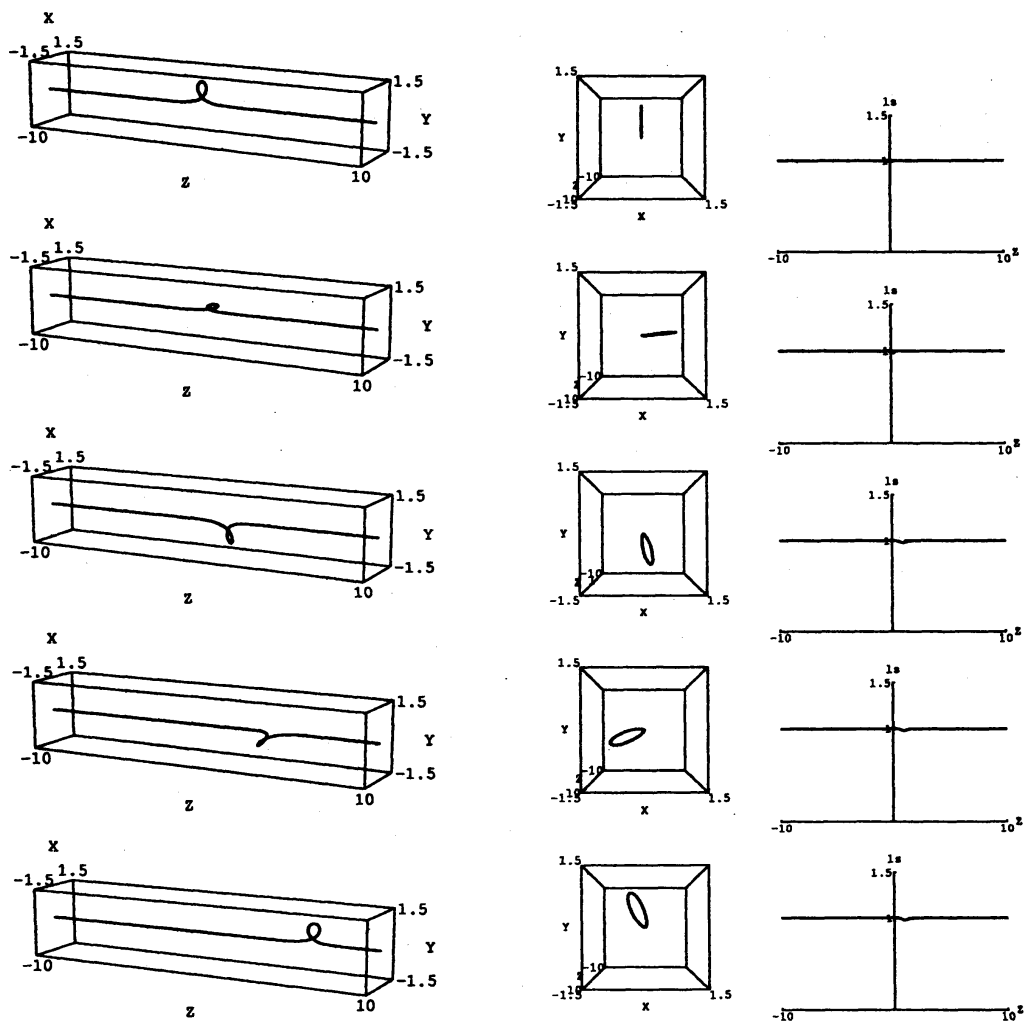


Figure 5: Time evolution of filament(left), its top view from the positive Z axis(middle) and local stretch l_s vs. Z (right) at $t = 0, 3, 6, 9, 12$ for $A = 1$ and $k = 2$ from the top to the bottom.

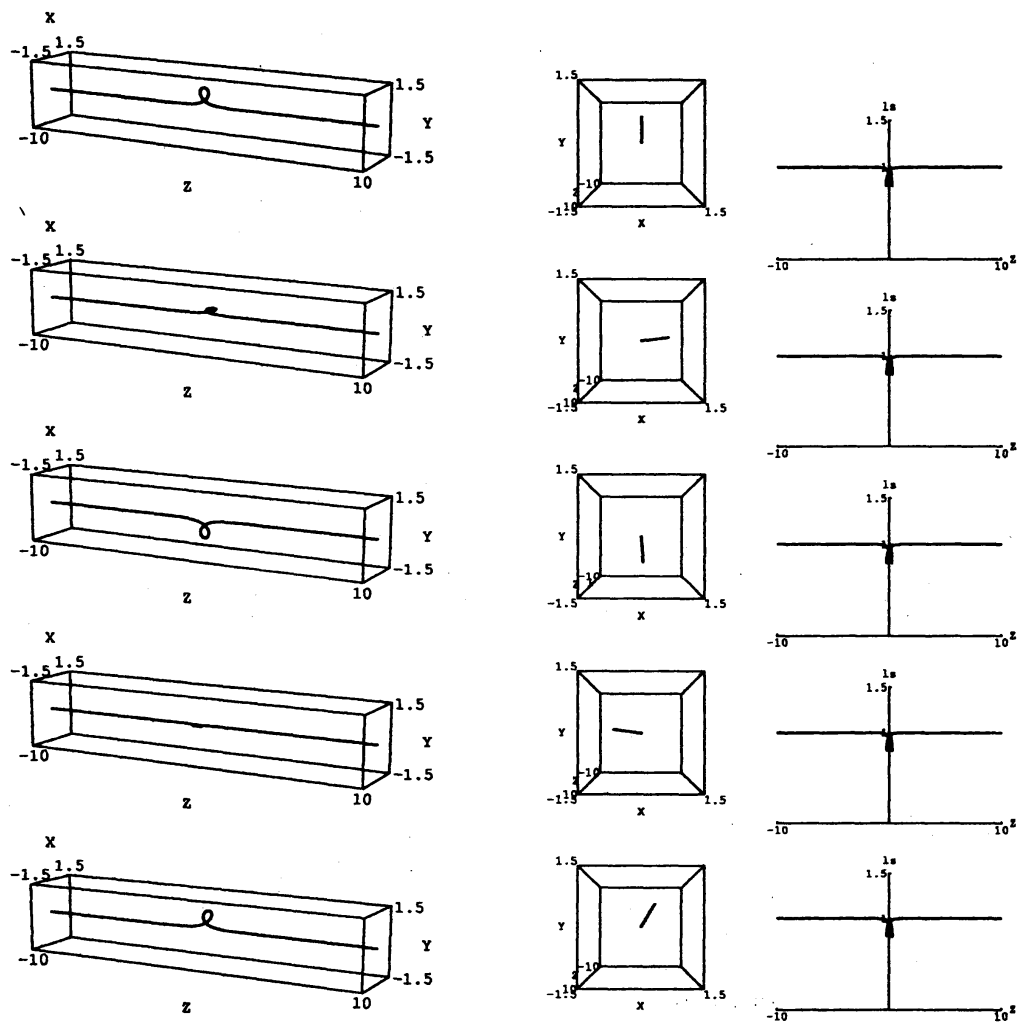


Figure 6: Time evolution of filament(left), its top view from the positive Z axis(middle) and local stretch l_s vs. Z (right) at $t = 0, 3, 6, 9, 12$ for $A = 0.8$ and $k = 2$ from the top to the bottom.

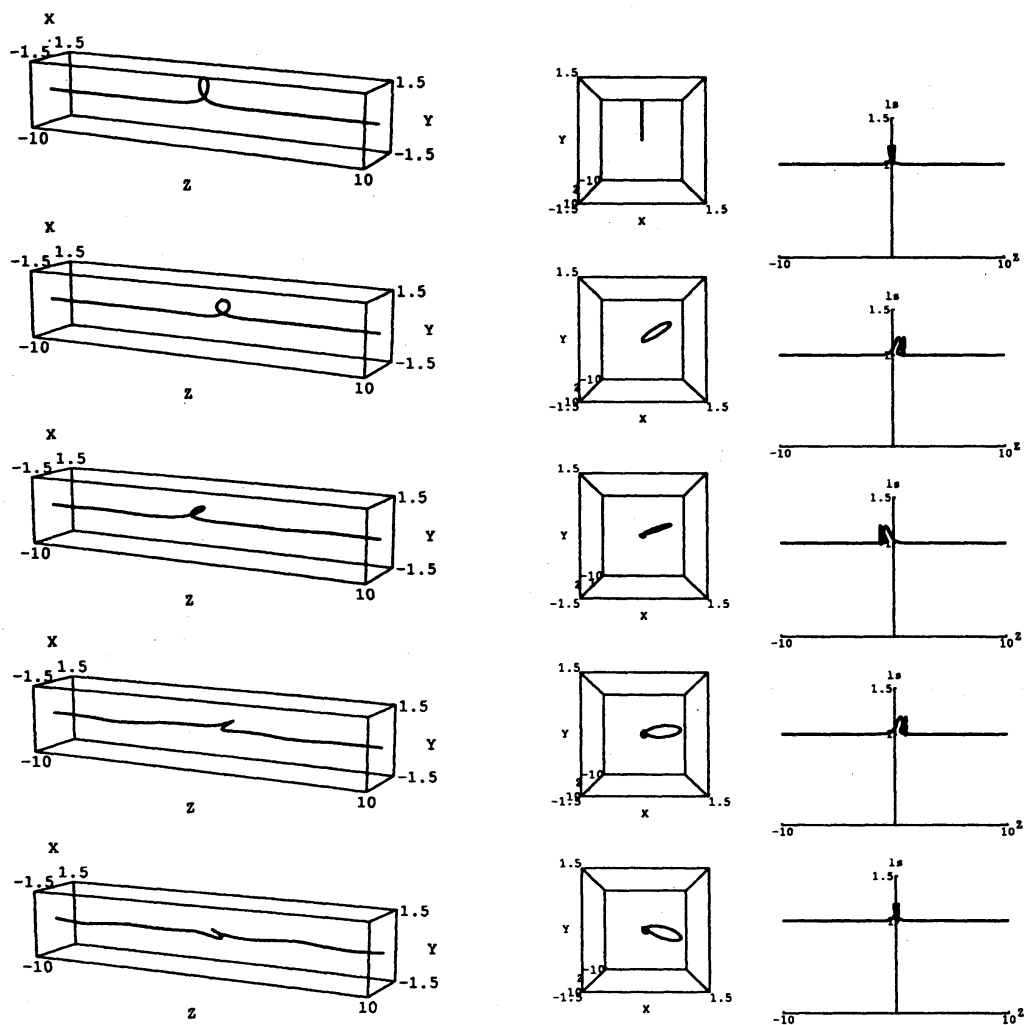


Figure 7: Time evolution of filament(left), its top view from the positive Z axis(middle) and local stretch l_s vs. Z (right) at $t = 0, 3, 6, 9, 12$ for $A = 1.2$ and $k = 2$ from the top to the bottom.

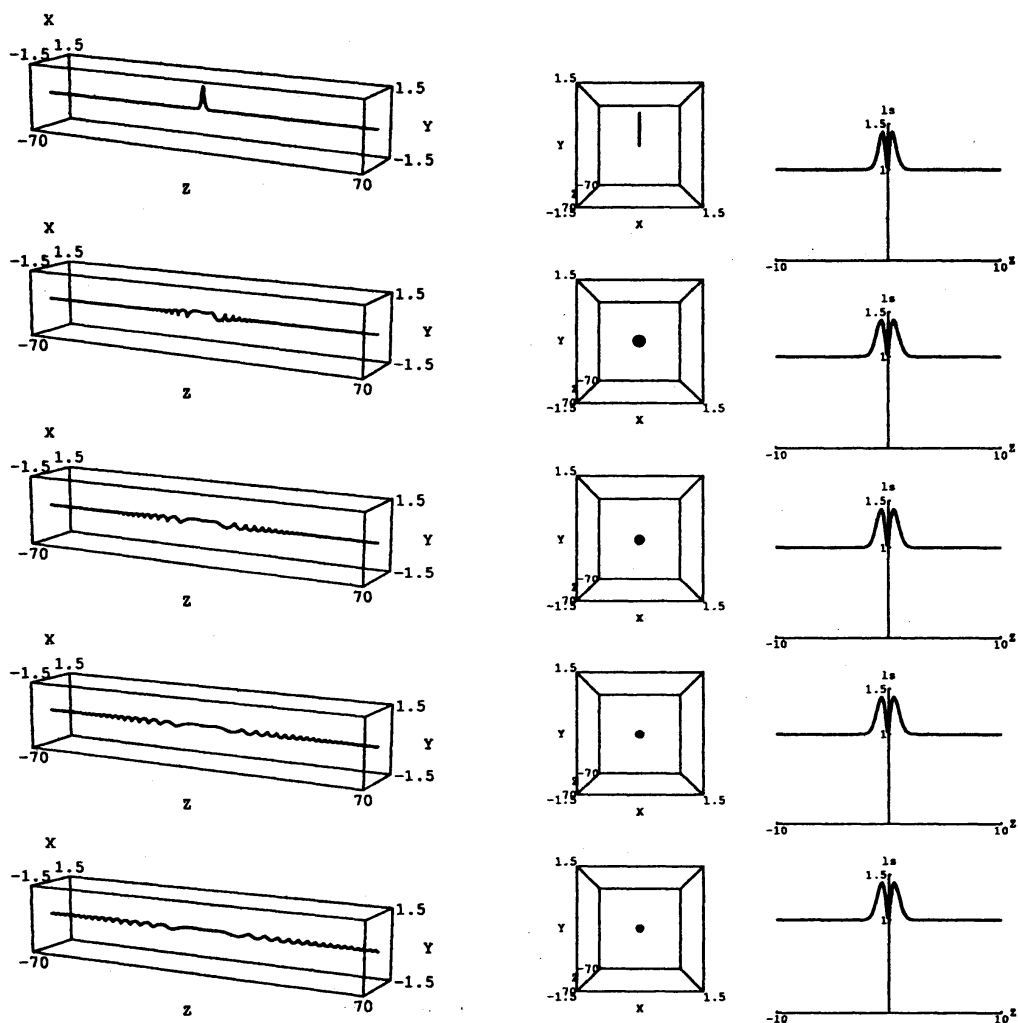


Figure 8: Time evolution of filament(left), its top view from the positive Z axis(middle) and local stretch l_s vs. Z (right) at $t = 0, 3, 6, 9, 12$ for $A = 1$ and $k = 2$ from the top to the bottom.