

## 液体シートを伝播する 短波長攪乱に対する薄膜近似の有効性

阪大・基礎工 菅 健太郎 (Kentarou Kan)

阪大・基礎工 吉永 隆夫 (Takao Yoshinaga)

Faculty of Engineering Science, Osaka University

### 1 はじめに

液体シートの振る舞いはシート面上の表面張力波の安定性に大きく依存することはよく知られている。このような安定性の問題は流体力学での代表的な問題の一つであるばかりでなく、平板への塗装やコーティングにおけるカーテンフローコート法 [1], 噴水などの水空間の設計 [2] への応用等において重要である。

大変形する液体シートの解析では, シート表面が自由境界であるため境界条件が本質的に非線形となり, その解析的取り扱い是一般に困難である。しかし, シートが薄い場合, '薄膜近似' を用いて近似的にシートの運動が記述できることが知られている [3][4]。この近似ではシート内部での諸量の値を中心面上での値に置き換えることにより比較的簡単であるが強い非線形性をもつ発展方程式を導くことができる。

液体シートに関する研究は古くから行われているが, 特に重力の影響を無視した非粘性の平面液体シートを伝播する微小攪乱には, 二つのモードが存在することが知られている [5]。一つは, 図 1.1 のようにシートの中心線は直線で厚みが増減することによって起こる対称モード, もう一つは図 1.2 のようにシートの厚みは一定で中心線が増減することによって起こる反対称モードである。線形ではこの二つのモードが互いに独立であるが, 非線形の場合これらのモード間での結合が起こり, さらにシート形状が非一様になるような場合, 攪乱の空間的な増幅や減衰が起ることが予想される。

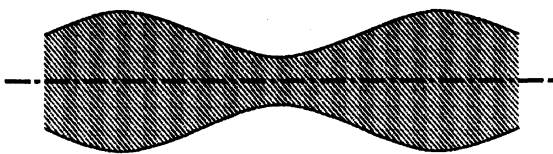


図 1.1: 対称モード

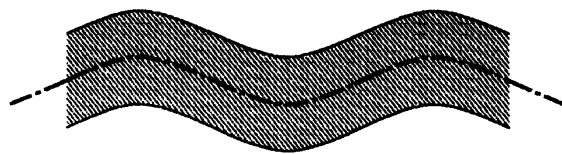


図 1.2: 反対称モード

そこで本研究では, 非線形でかつシート形状が非一様になる例として, 重力場で落下する液体平面シートを取り上げる。解析では, 攪乱の増幅減衰を伴うシートの振る舞いを薄膜近似を用いて調べ, その近似の有効性を明らかにする。特に, 重力の作用のため, シートの厚みは下流に行くに従い薄くなり, その速度は増加する。定常状態でのこのような平面シートは, 境界条件の特別な場合を除き図 1.3 のように空間的に振動する解をもつことがわかっている [6]。しかし, 特定の

境界値に対しては図 1.4 のような空間的に振動せず、下流に行くに従い厚みが一様に薄くなるような定常解も存在する。この‘振動する定常解’と‘振動しない定常解’の時間安定性を調べた結果、‘振動しない定常解’のみが時間が経過しても変化しないという意味で安定であることがわかった [6]。

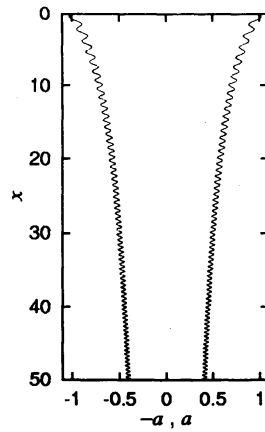


図 1.3: 振動する定常解

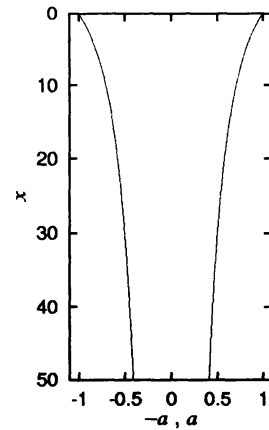


図 1.4: 振動しない定常解

そこで、攪乱の増幅、減衰を調べる上で、このような振動しない定常解の上にある対称または反対称モードの攪乱の非定常の振る舞いを調べる必要がある。また、落下する液体シートに関する研究の一つとして、長波近似を用いずにポテンシャル流を仮定した非定常弱非線形解析が行われている [7]。本解析では、近似の有効性を明らかにするため、このポテンシャル流による弱非線形解析の結果と‘薄膜近似’を用いて導出された基礎方程式(薄膜方程式)で得られた結果との比較を行っている。

## 2 問題の定式化

図 2.1 に示すような二次元液体平面シートを考える。座標系は鉛直下向を  $x$ 、水平方向を  $y$  とする直交座標をとる。中心面は  $y = \eta(x, t)$  で与えられている。流体の  $x, y$  方向の速度成分をそれぞれ  $u, v$  とし、シート厚みの半分の  $a$  とする。  $A_0, U_0$  はそれぞれ  $x = 0$  での半厚みと  $x$  方向の速度である。また、  $\sigma$  は液体の表面張力係数、  $\rho$  は液体の密度、  $g$  は重力加速度であり、液体は非粘性非圧縮と仮定する。また、シート外部の流体の運動の影響はないとする。

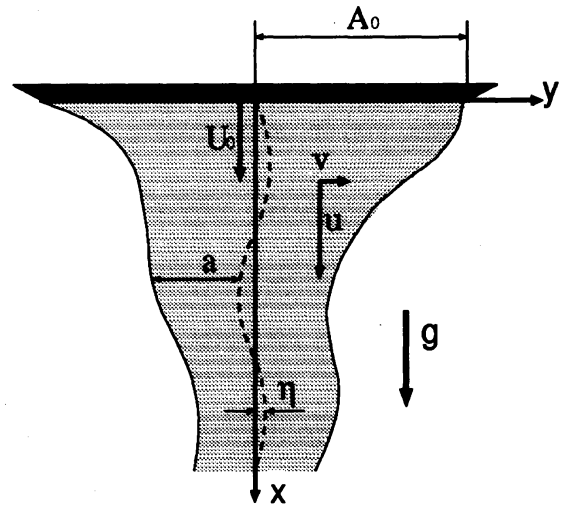


図 2.1: 液体シートの図

### 2.1 基礎方程式および境界条件

まず、連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.1)$$

次に  $x, y$  方向のナビア-ストークス方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.3)$$

で与えられ、この三つの基礎方程式を次に述べる境界条件の下で解く。

運動学的条件よりシート両表面  $y = \eta \pm a$  では

$$v = \frac{\partial(\eta \pm a)}{\partial t} + u \frac{\partial(\eta \pm a)}{\partial x}, \quad (2.4)$$

を満足しなければならない。また、シート両表面での圧力と表面張力による力の釣り合いより

$$p_{\pm} = \mp \sigma \frac{(\partial^2(\eta \pm a)/\partial x^2)}{[1 + (\partial(\eta \pm a)/\partial x)^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.5)$$

ここで、 $p_+$  と  $p_-$  はそれぞれシート右側面と左側面での圧力である。

## 2.2 薄膜方程式

上で示された基礎方程式及び境界条件より薄膜近似を用いて非線形方程式を導出する。まず、シート厚みが薄いとして  $u, v, p$  を厚みに関する量  $(y - \eta)$  で

$$u = u_0 + u_1(y - \eta) + u_2(y - \eta)^2 + \dots, \quad (2.6)$$

$$v = v_0 + v_1(y - \eta) + v_2(y - \eta)^2 + \dots, \quad (2.7)$$

$$p = p_0 + p_1(y - \eta) + p_2(y - \eta)^2 + \dots, \quad (2.8)$$

のように展開する ( $|y - \eta| \leq a/2 \sim O(a)$ )。基礎方程式と境界条件に式(2.6)~(2.8)を代入し、シート厚みの2乗程度  $O(a^2)$  以上の微小項を無視すると、最終的に  $a, \eta, u_0, v_0$  に関する4連立の非線形発展方程式(薄膜方程式)を得る。その方程式で  $x, a, \eta$  は  $A_0$  で、 $u$  と  $v$  は  $U_0$  で、 $t$  は  $A_0/U_0$  で、 $p$  は  $\sigma/A_0$  でそれぞれ無次元化して書き直した結果を以下に示す:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(au_0) = 0, \quad (2.9)$$

$$v_0 = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{1}{We} \left( -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\Delta P}{a} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{1}{2Fr^2}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} = -\frac{1}{2We} \frac{\Delta P}{a}. \quad (2.12)$$

ただし、 $P = (p_+ + p_-)/2$ ,  $\Delta P = p_+ - p_-$  であり、 $p_{\pm}$  は

$$p_{\pm} = \mp \frac{(\partial^2(\eta \pm a)/\partial x^2)}{[1 + (\partial(\eta \pm a)/\partial x)^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.13)$$

また、上式で用いられている Weber 数  $We$  と Froude 数  $Fr$  はそれぞれ表面張力と重力の効果を示す無次元数であり、以下のように定義する:

$$We = \frac{U_0^2}{(\sigma/\rho A_0)}, \quad Fr = \frac{U_0}{\sqrt{2A_0g}}. \quad (2.14)$$

このように薄膜近似から得られた式(2.9)~(2.12)と(2.13)を用いて、 $a, \eta, u_0, v_0$  の発展を調べることができる。

### 2.3 ポテンシャル流

ここでは流れが渦なしであると仮定し、速度ポテンシャル  $\Phi(x, y, t)$  を用いて、基礎方程式と境界条件を書き換える。ただし、以下では 2.3 節と同様の無次元化を行っている。まず、式 (2.1) ~ (2.3) より

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi = 0. \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{We} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2Fr^2}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{1}{We} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.17)$$

となる。式 (2.16) を  $x$  で、式 (2.17) を  $y$  で積分し

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} = -\frac{p}{We} + \frac{x}{2Fr^2} + \frac{1}{2}, \quad (2.18)$$

を得る。ただし、 $x=0$  で  $a=u=1, \eta=v=0$  を用いて積分定数を決めている。

一方、運動学的条件式 (2.4) より

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial(\eta \pm a)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial(\eta \pm a)}{\partial x}, \quad (2.19)$$

となり、シート両表面の圧力  $p_{\pm}$  は式 (2.5) より無次元化して式 (2.13) で与えられる。従って、問題は式 (2.15) を式 (2.18), (2.19), (2.13) を用いて解くことに帰着される。

## 3 定常解

§2.2 で得られた薄膜方程式から、定常状態でのシート形状を調べる。定常状態での諸量は  $x$  のみの関数であり、以下では添字  $-$  をつけた量で表す。

まず、定常状態では液体シートは対称モードであると考えられるので  $\bar{\eta} = 0$  とする。  $\partial/\partial t = 0$  であるので式 (2.10) より  $\bar{v}_0 = 0$  となる。さらに式 (2.13) より

$$\bar{p}_{\pm} = -\frac{(d^2 \bar{a}/dx^2)}{[1 + (d\bar{a}/dx)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.1)$$

となるので、

$$\Delta \bar{P} = 0, \quad (3.2)$$

$$\bar{P} = -\frac{(d^2 \bar{a}/dx^2)}{[1 + (d\bar{a}/dx)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.3)$$

となる。また、式 (2.9) より  $d(\bar{a}\bar{u}_0)/dx = 0$  となり、 $x=0$  で  $\bar{a} = \bar{u}_0 = 1$  であるので

$$\bar{a}\bar{u}_0 = 1, \quad (3.4)$$

となる。さらに式 (2.11) は

$$\bar{u}_0 \frac{d\bar{u}_0}{dx} = -\frac{1}{We} \frac{d\bar{P}}{dx} + \frac{1}{2Fr^2}, \quad (3.5)$$

となるので, 式(3.3),(3.4)を用いて

$$-\frac{1}{\bar{a}^3} \frac{d\bar{a}}{dx} = \frac{1}{We} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{(d^2\bar{a}/dx^2)}{[1 + (d\bar{a}/dx)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} + \frac{1}{2Fr^2}, \quad (3.6)$$

が得られる. よって, 上式が定常状態での液体シートの半厚み  $\bar{a}(x)$  を記述する方程式である.

§1 で述べたように安定な定常解は空間的に振動しないので, 重力の効果がそれほど強くなければ  $d^2\bar{a}/dx^2 \ll 1$  と仮定でき, これより式(3.6)は

$$-\frac{1}{\bar{a}^3} \frac{d\bar{a}}{dx} = \frac{1}{2Fr^2}, \quad (3.7)$$

となり,  $x=0$  で  $\bar{a}=1$  より

$$\bar{a} = \frac{1}{\sqrt{x/Fr^2 + 1}}, \quad (3.8)$$

を得て, さらに  $\bar{a}\bar{u}_0 = 1$  であるので

$$\bar{u}_0 = \sqrt{\frac{x}{Fr^2} + 1}. \quad (3.9)$$

一方, §2.3 でも定常解を仮定し,  $\partial\Phi/\partial x = \bar{u}_0$ ,  $\partial\Phi/\partial y = 0$ , さらに  $d^2\bar{a}/dx^2 \ll 1$  となり  $p \sim P = 0$  とおけば式(2.18)より式(3.9)が得られる. また, 式(2.15)を  $y$  で積分して得られた  $\bar{a}\bar{u}_0 = 1$  を用いて式(3.8)を得る.

## 4 弱非線形解析

ここでは §2.2 で得られた薄膜方程式を基にした弱非線形解析を行う. さらに, §2.3 のポテンシャル流による方程式を用いて得られた弱非線形解析の結果を比較のために示す.

まず, 重力による効果がそれほど大きくないとして  $Fr^{-1} \sim O(\epsilon)$  と仮定し次の多重尺度を導入する:

$$x_n = \epsilon^n x, \quad t_n = \epsilon^n t. \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.1)$$

ただし, 添字  $n$  が大きくなるにつれ各変数はゆるやかな変動を表す.  $Fr^{-1} = \epsilon Fr_0^{-1}$  と置くと, 式(3.8)より定常解  $\bar{a}$  が有意な変化をするためには

$$\bar{a}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{x_2/Fr_0^2 + 1}}, \quad (4.2)$$

のような  $x_2$  の関数となり, また, 式(3.4)より  $\bar{u}_0$  も  $x_2$  の関数となる.

次に攪乱の波数と角周波数をそれぞれ  $k, \omega$  とおく. このとき波数, 角周波数ともに定常状態での主流速度  $\bar{u}_0$  と同程度のゆるやかさで空間的に変動するものと仮定できるので,  $k$  と  $\omega$  はゆるやかな変数  $x_2$  のみの関数となる. このとき, 攪乱の位相  $\theta$  は

$$\theta = k(x_2)x_0 - \omega(x_2)t_0. \quad (4.3)$$

上式と式(4.1)より, 空間, 時間微分は  $\epsilon$  で展開できて,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots = k \frac{\partial}{\partial \theta} + \sum_{n=1} \epsilon^n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \cdots = -\omega \frac{\partial}{\partial \theta} + \sum_{n=1} \epsilon^n \frac{\partial}{\partial t_n}, \quad (4.5)$$

となる. 上式の微分展開から得られる  $\partial^2/\partial x \partial t$  と  $\partial^2/\partial t \partial x$  が等しいという変数の連続条件より,  $d\omega/dx_2 = 0$  となり, これより  $\omega$  は定数となるので, 式(4.3)は

$$\theta = k(x_2)x_0 - \omega t_0, \quad (4.6)$$

と書ける.

#### 4.1 薄膜方程式の弱非線形解析

まず,  $a, \eta, u_0, v_0, P, \Delta P$  をそれぞれ

$$a = \bar{a}(x_2) + \tilde{a}(\theta, x_1, x_2, \cdots, t_1, t_2, \cdots), \quad (4.7)$$

$$\eta = \tilde{\eta}(\theta, x_1, x_2, \cdots, t_1, t_2, \cdots), \quad (4.8)$$

$$u_0 = \bar{u}_0(x_2) + \tilde{u}_0(\theta, x_1, x_2, \cdots, t_1, t_2, \cdots), \quad (4.9)$$

$$v_0 = \tilde{v}_0(\theta, x_1, x_2, \cdots, t_1, t_2, \cdots), \quad (4.10)$$

$$P = \bar{P}(x_2) + \tilde{P}(\theta, x_1, x_2, \cdots, t_1, t_2, \cdots), \quad (4.11)$$

$$\Delta P = \Delta \tilde{P}(\theta, x_1, x_2, \cdots, t_1, t_2, \cdots). \quad (4.12)$$

とおく. ただし,  $\tilde{\cdot}$  のついた量は攪乱であり, 大きさが  $\epsilon$  程度であると仮定し,

$$\tilde{a} = \sum_{n=1} \epsilon^n A_n(\theta, x_1, x_2, \cdots, t_1, t_2, \cdots), \quad (4.13)$$

$$\tilde{\eta} = \sum_{n=1} \epsilon^n E_n(\theta, x_1, x_2, \cdots, t_1, t_2, \cdots), \quad (4.14)$$

$$\tilde{u}_0 = \sum_{n=1} \epsilon^n U_n(\theta, x_1, x_2, \cdots, t_1, t_2, \cdots), \quad (4.15)$$

$$\tilde{v}_0 = \sum_{n=1} \epsilon^n V_n(\theta, x_1, x_2, \cdots, t_1, t_2, \cdots), \quad (4.16)$$

$$\tilde{P} = \sum_{n=1} \epsilon^n P_n(\theta, x_1, x_2, \cdots, t_1, t_2, \cdots), \quad (4.17)$$

$$\Delta \tilde{P} = \sum_{n=1} \epsilon^n \Delta P_n(\theta, x_1, x_2, \cdots, t_1, t_2, \cdots). \quad (4.18)$$

とおく. 上式で  $P_n$  と  $\Delta P_n$  が  $A_n$  と  $E_n$  で記述できる事を考慮し,  $A_1, E_1, U_1, V_1$  が位相  $\theta$  の正弦攪乱を仮定して, 次のように置く:

$$A_1 = \hat{A}_1 \exp(i\theta) + C.C, \quad (4.19)$$

$$E_1 = \hat{E}_1 \exp(i\theta) + C.C, \quad (4.20)$$

$$U_1 = \hat{U}_1 \exp(i\theta) + C.C, \quad (4.21)$$

$$V_1 = \hat{V}_1 \exp(i\theta) + C.C. \quad (4.22)$$

ただし,  $\hat{A}_1, \hat{E}_1, \hat{U}_1, \hat{V}_1$  は攪乱の複素振幅で,  $x_1, x_2, \dots, t_1, t_2, \dots$  の関数であり, C.C は複素共役を示している.  $O(\epsilon^2)$  以上の  $A_n, E_n, U_n, V_n$  ( $n > 1$ ) については非線形性のために発生する高調波等を考慮して

$$A_n = \sum_{j=0} \hat{A}_{n,j} \exp(ji\theta) + C.C, \quad (4.23)$$

$$E_n = \sum_{j=0} \hat{E}_{n,j} \exp(ji\theta) + C.C, \quad (4.24)$$

$$U_n = \sum_{j=0} \hat{U}_{n,j} \exp(ji\theta) + C.C, \quad (4.25)$$

$$V_n = \sum_{j=0} \hat{V}_{n,j} \exp(ji\theta) + C.C, \quad (4.26)$$

のようにかけると仮定する.

薄膜方程式(式(2.9)~(2.12))に式(4.7)~(4.26)を代入し $\epsilon$ のべきで整理する. まず $O(\epsilon)$ で

$$\begin{bmatrix} iS & -1 & 0 & 0 \\ \frac{k^2}{\bar{a}We} & iS & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & k\bar{a} \\ 0 & 0 & \frac{k^3}{We} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{V}_1 \\ \hat{A}_1 \\ \hat{U}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

を得る. ただし,  $S = k\bar{u}_0 - \omega$  とおいている. 上式を満足する解は自明な解 ( $\hat{E}_1 = \hat{V}_1 = \hat{A}_1 = \hat{U}_1 = 0$ ) を除くと

$$\hat{E}_1 = \hat{V}_1 = 0 \quad \text{かつ} \quad S^2 = \frac{k^4 \bar{a}}{We}, \quad (4.28)$$

もしくは

$$\hat{A}_1 = \hat{U}_1 = 0 \quad \text{かつ} \quad S^2 = \frac{k^2}{\bar{a}We}, \quad (4.29)$$

のどちらかである. 式(4.28)は対称モード攪乱 ( $\hat{E}_1 = \hat{V}_1 = 0$ ) とその分散関係を表し, 式(4.29)は反対称モード攪乱 ( $\hat{A}_1 = \hat{U}_1 = 0$ ) とその分散関係(この場合分散無し)を示す.

#### 4.1.1 対称モード

まず対称モードについて考える.  $S = k\bar{u}_0 - \omega$  を用いて式(4.28)を $k$ について解くと

$$k_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{We}{\bar{a}}} \left( \bar{u}_0 - \sqrt{\bar{u}_0^2 \mp 4\omega \sqrt{\frac{\bar{a}}{We}}} \right). \quad (4.30)$$

となる. ただし,  $S > 0$  のとき  $k = k_+$ ,  $S < 0$  のとき  $k = k_-$  であるとする. 次に  $O(\epsilon^2)$  で

$$\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial t_1} + Vg \frac{\partial \hat{A}_1}{\partial x_1} = 0, \quad (4.31)$$

$$Vg = Vg_{\pm} = \sqrt{\bar{u}^2 \mp 4\omega\sqrt{\frac{\bar{a}}{We}}}, \quad (4.32)$$

が得られる. 上式は  $x_1$  スケールでは攪乱は  $Vg$  で伝播することを示している. さらに  $O(\epsilon^3)$  で

$$i\left(\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial t_2} + Vg\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial x_2}\right) + P\frac{\partial^2 \hat{A}_1}{\partial x_1^2} = Q\hat{A}_1|\hat{A}_1|^2 + iT\hat{A}_1 + \alpha\hat{A}_1, \quad (4.33)$$

を得る. ただし

$$P = -\frac{S}{k^2}, \quad (4.34)$$

$$Q = \frac{S}{4}(7\bar{u}^2 + 3k^2), \quad (4.35)$$

$$T = \frac{(2S - k\bar{u}_0)^2 + 5k^2\bar{u}_0^2}{16Fr_0^2k\bar{u}_0^2(2S - k\bar{u}_0)}, \quad (4.36)$$

であり,  $\alpha$  は  $x_2$  のみの関数である. ここで

$$\epsilon\hat{A}_1 = \hat{a}\exp(-i\theta_0), \quad (4.37)$$

$$\theta_0 = \int \frac{\alpha}{Vg} dx_2, \quad (4.38)$$

とおき, 式(4.33)に代入し, 元の変数  $x, t$  に戻すと

$$i\left(\frac{\partial \hat{a}}{\partial t} + Vg\frac{\partial \hat{a}}{\partial x}\right) + P\frac{\partial^2 \hat{a}}{\partial x^2} = Q\hat{a}|\hat{a}|^2 + iT'\hat{a}, \quad (4.39)$$

となる. ただし

$$T' = \frac{(2S - k\bar{u}_0)^2 + 5k^2\bar{u}_0^2}{16Fr^2k\bar{u}_0^2(2S - k\bar{u}_0)}, \quad (4.40)$$

である. ここで, 式(4.7),(4.13),(4.19),(4.37),(4.38)より,  $\tilde{a} \simeq \hat{a}\exp\{i(\theta - \theta_0)\}$  であり,  $\theta_0$  は搬送波の位相からのゆるやかなずれ,  $\hat{a}$  は攪乱の包絡部となる. 式(4.39)は非線形シュレディンガー(NLS)方程式に線形の増幅項が加わった形となっている. 重力無し( $Fr \rightarrow \infty$ )の場合には  $T' = 0$ , さらに式(4.34),(4.35)より  $PQ < 0$  であるので NLS 方程式には sech 型の孤立波解が存在することが知られている. この方程式の解は分散項と非線形項が釣り合うことによる定常進行波解をもち, 一定振幅で伝播する.

次に  $T'$  の符号について調べる.  $k = k_{\pm} > 0$  より, どちらの  $k$  に対しても  $T'$  の正負は  $2S - k\bar{u}_0$  の正負によって決定される. まず  $k = k_+$  の場合, 式(4.28)より  $S = \sqrt{\bar{a}/We}k^2$  となるので, 式(4.30)を用いて

$$2S - k\bar{u}_0 = k\left(2\sqrt{\frac{\bar{a}}{We}}k - \bar{u}_0\right) = -k\left(\sqrt{\bar{u}_0^2 - 4\omega\sqrt{\frac{\bar{a}}{We}}}\right) < 0, \quad (4.41)$$

となり, 常に  $T' < 0$  となる. 一方,  $k = k_-$  の場合  $S < 0, \omega > 0$  より

$$2S - k\bar{u}_0 = S - \omega < 0 \quad (4.42)$$

となり, 常に  $T' < 0$  となる. よって, 対称攪乱に対しては重力の効果により下流方向に伝播する攪乱は減衰していく. また,  $Vg_{\pm} > 0$  より上流方向に伝播する攪乱は現れない.



### 4.1.2 反対称モード

反対称モードの分散関係式 (4.29) より  $k\bar{u}_0 - \omega = \pm k/\sqrt{\bar{a}We}$  であるので

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{\bar{u}_0 \mp \frac{1}{\sqrt{\bar{a}We}}}, \quad (4.43)$$

となる。  $O(\epsilon^2)$  の結果から  $x_1$  スケールでは攪乱は  $Vg$  で伝播し、さらに  $O(\epsilon^3)$  の結果より

$$i \left( \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} + Vg \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \right) = Q \hat{\eta} |\hat{\eta}|^2 + iT' \hat{\eta}, \quad (4.44)$$

を得る。ただし

$$Vg = Vg_{\pm} = \bar{u}_0 \mp \frac{1}{\sqrt{\bar{a}We}}, \quad (4.45)$$

$$Q = \frac{Sk^2(1 - 6k^2\bar{a}^2)}{2(1 - 4k^2\bar{a}^2)}, \quad (4.46)$$

$$T' = \frac{Vg}{4\bar{u}_0} \frac{d\bar{u}_0}{dx}, \quad (4.47)$$

となる。ここで、対称モードの場合と同様に  $\hat{\eta}$  は攪乱の包絡部である。式 (4.44) は分散項のない NLS 方程式に線形の増幅項が加わった形となっている。このとき、 $T'$  の正負は  $\bar{u}_0, d\bar{u}_0/dx > 0$  を考慮すると

$$\begin{cases} T' < 0, & (Vg < 0) \\ T' > 0. & (Vg > 0) \end{cases} \quad (4.48)$$

よって攪乱は上流方向に伝播する場合に減衰し、下流方向に伝播する場合は増幅する。

## 4.2 ポテンシャル流

§4.1 と同様に、 $a, \eta, \Phi$  をそれぞれ

$$a = \bar{a}(x_2) + \sum_{n=1} \epsilon^n A_n(\theta, x_1, x_2, \dots, t_1, t_2, \dots), \quad (4.49)$$

$$\eta = \sum_{n=1} \epsilon^n E_n(\theta, x_1, x_2, \dots, t_1, t_2, \dots), \quad (4.50)$$

$$\Phi = \epsilon^{-2} \bar{\Phi}(x_2) + \sum_{n=1} \epsilon^n \Phi_n(\theta, x_1, x_2, \dots, t_1, t_2, \dots), \quad (4.51)$$

とおき、 $A_n$  は式 (4.19), (4.23),  $E_n$  は式 (4.20), (4.24) により与えられている。ただし、このとき §4.1 とは異なり、対称モードでは  $\hat{\eta} \equiv 0$ , 反対称モードでは  $\bar{a} \equiv 0$  と仮定し、 $\bar{u}_0 = d\Phi(x_2)/dx_2$  で与えられる。これらを式 (2.15)~(2.19) に代入し、 $\epsilon$  のべきで整理する。 $\hat{a}, \hat{\eta}$  はそれぞれ対称、反対称攪乱の包絡部として、得られた結果を以下に示す。

#### 4.2.1 対称モード

$O(\epsilon)$  で  $S = k\bar{u}_0 - \omega$  とおいて分散関係

$$S^2 = \frac{k^3}{We} \tanh(k\bar{a}), \quad (4.52)$$

を得る. 前節と同様に  $O(\epsilon^3)$  で線形の増幅項を伴う NLS 方程式

$$i \left( \frac{\partial \hat{a}}{\partial t} + Vg \frac{\partial \hat{a}}{\partial x} \right) + P \frac{\partial^2 \hat{a}}{\partial x^2} = Q\hat{a}|\hat{a}|^2 + iT'\hat{a}, \quad (4.53)$$

を得る. ただし

$$Vg = \bar{u}_0 - \frac{3(k\bar{u}_0 - \omega)}{2k} - \frac{\bar{a}(k\bar{u}_0 - \omega)}{2 \cosh(k\bar{a}) \sinh(k\bar{a})}, \quad (4.54)$$

$$P = \frac{dVg}{dk}, \quad (4.55)$$

$$T' = -\frac{1}{2(k\bar{u}_0 - \omega)} k\bar{u}_0 \left( \frac{d\bar{u}_0}{dx} + \frac{\omega}{k^2} \frac{dk}{dx} \right) + \frac{1}{2} \frac{d\bar{u}_0}{dx} \{k\bar{a} \tanh(k\bar{a}) - 1\} \\ + \frac{1}{4} \left( 2k \frac{d\bar{u}_0}{dx} + \frac{\omega}{k} \frac{dk}{dx} + \bar{u}_0 \frac{dk}{dx} \right) \left[ \frac{1}{k} + \bar{a} \{ \coth(k\bar{a}) - \tanh(k\bar{a}) \} \right], \quad (4.56)$$

である. 重力無しの場合は  $k$  も  $\bar{u}_0$  も一定となるので  $T' = 0$  となり, 攪乱は増幅も減衰もしない. 図 4.1 は  $We = 10, Fr = \sqrt{10}$  での  $x$  と  $T'$  の関係を示している. ただし, 図 4.1(a) は  $S > 0$ , 図 4.1(b) は  $S < 0$  の場合である. これより  $S$  の正負に関わらず  $T' < 0$  となり, 攪乱は常に減衰することがわかる. これは薄膜方程式の場合の結果と定性的に一致する.

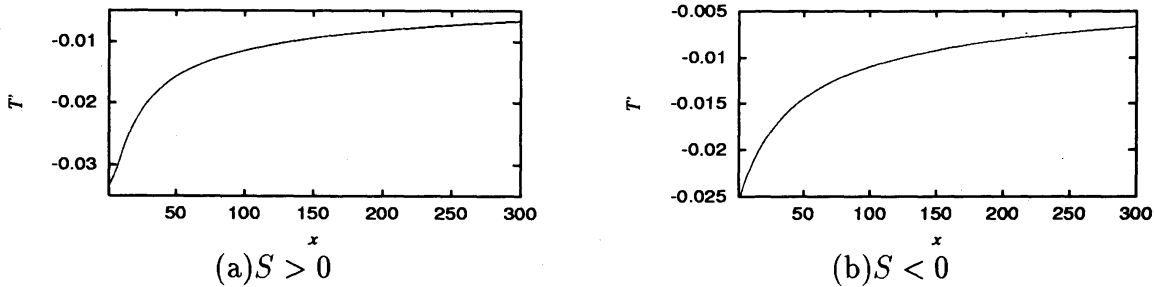


図 4.1: 対称モードの増幅率  $T'$

#### 4.2.2 反対称モード

対称モードの場合と同様に,  $S = k\bar{u}_0 - \omega$  とおくと分散関係

$$(k\bar{u}_0 - \omega)^2 = \frac{k^3}{We} \coth(k\bar{a}), \quad (4.57)$$

を得る.  $O(\epsilon^3)$  で攪乱の包絡部は前節と同様な NLS 方程式

$$i \left( \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} + Vg \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \right) + P \frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial x^2} = Q\hat{\eta}|\hat{\eta}|^2 + iT'\hat{\eta}, \quad (4.58)$$

で表される. ただし

$$Vg = \bar{u}_0 - \frac{3(k\bar{u}_0 - \omega)}{2k} + \frac{\bar{a}(k\bar{u}_0 - \omega)}{2 \cosh(k\bar{a}) \sinh(k\bar{a})}, \quad (4.59)$$

$$P = \frac{dVg}{dk}, \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} T' = & -\frac{1}{2(k\bar{u}_0 - \omega)} k\bar{u}_0 \left( \frac{d\bar{u}_0}{dx} + \frac{\omega}{k^2} \frac{dk}{dx} \right) + \frac{k\bar{u}_0 - \omega}{2} \tanh(k\bar{a}) \frac{d\bar{a}}{dx} \\ & + \frac{1}{4} \left( 2k \frac{d\bar{u}_0}{dx} + \frac{\omega}{k} \frac{dk}{dx} + \bar{u}_0 \frac{dk}{dx} \right) \left[ \frac{1}{k} + \bar{a} \{ \tanh(k\bar{a}) - \coth(k\bar{a}) \} \right] \\ & + \frac{dk}{dx} \left[ \frac{(k\bar{u}_0 - \omega)}{4k^2} - \frac{1}{2} \bar{a}\bar{u}_0 \coth(k\bar{a}) + \frac{\bar{a}(k\bar{u}_0 - \omega)}{4k} \{ \tanh(k\bar{a}) + \coth(k\bar{a}) \} \right] \\ & + \frac{1}{2} \left( \bar{a} \frac{dk}{dx} + k \frac{d\bar{a}}{dx} \right) \left[ \frac{\omega}{k} \tanh(k\bar{a}) + \bar{a}(k\bar{u}_0 - \omega) \{ 1 - \tanh^2(k\bar{a}) \} \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{d\bar{u}_0}{dx} \{ k\bar{a} \coth(k\bar{a}) - 1 \}, \end{aligned} \quad (4.61)$$

である。重力無しの場合は対称モードの場合と同様  $T' = 0$  となり、攪乱は増幅も減衰もしない。図 4.2 は  $We = 10, Fr = \sqrt{10}$  での  $x$  と  $T'$  の関係を示している。ただし、図 4.1(a) は  $S > 0$ 、図 4.1(b) は  $S < 0$  の場合であり、 $We = 10$  では常に  $Vg > 0$  である。 $S > 0$  で  $x = 0$  付近を除くと、 $S$  の正負に関わらず  $T' > 0$  となり、攪乱は増幅する。このことは、薄膜近似では式 (4.48) からわかるように、 $Vg > 0$  で  $T' > 0$  となることと矛盾しない。よって  $x = 0$  付近以外では薄膜方程式の場合の結果とは定性的に一致する。

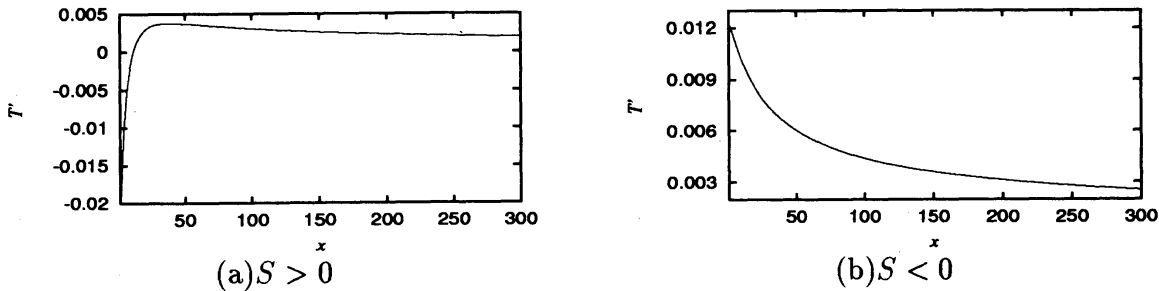


図 4.2: 反対称モードの増幅率  $T'$

## 5 薄膜方程式とポテンシャル流の比較

ここでは対称モードに対して式 (4.39) と式 (4.53)、また反対称モードに対して式 (4.44) と式 (4.58) を比較するため、同じ初期条件に対する解の時間発展を調べる。初期条件として  $t = 0$  で  $\hat{a}$  もしくは  $\hat{\eta}$  に  $A \operatorname{sech}\{\Omega(x-x_0)\}$  のような  $\operatorname{sech}$  型の波形を与える。ただし、 $A = 0.5, \Omega = 0.3, x_0 = 50$  である。以下では  $We = 10$  とし、重力無し ( $Fr \rightarrow \infty$ ) と重力あり ( $Fr = \sqrt{10}$ ) の場合について比較を行っている。図の実線が薄膜方程式、破線がポテンシャル流による結果である。

### 5.1 対称モード

まず重力無し ( $Fr \rightarrow \infty$ ) の場合の結果を図 5.1 に示す。図 5.1(a) では搬送波の角周波数  $\omega = 1$  の場合であり、同じ初期値に対して  $t = 100$  では二つの波形はかなりずれていることがわかる。

一方, 図 (b) は  $\omega = 0.3$  で長波の場合であり, この場合には二つの結果はほぼ一致していることがわかる.

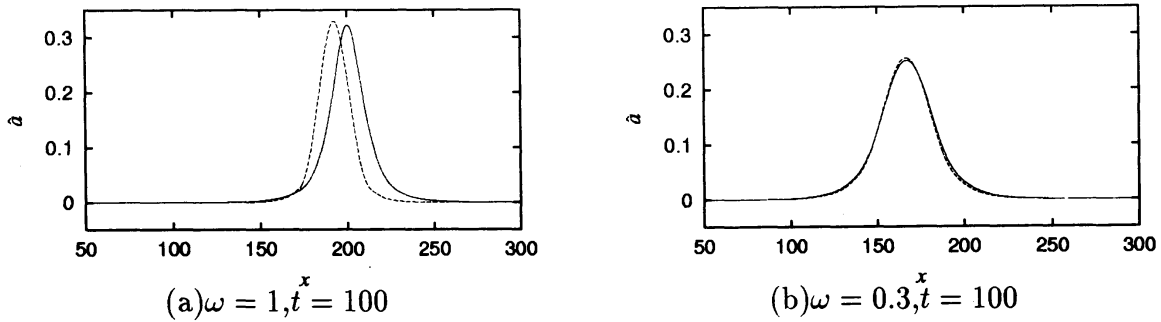


図 5.1: 攪乱包絡部  $\hat{a}$  の時間発展 (重力無し)

次に重力あり ( $Fr = \sqrt{10}$ ) で,  $\omega = 1$  の場合の結果を図 5.2 に示す. この図より  $\omega = 1$  でも二つの波形はほぼ一致する. これより, 重力なしの場合に比べ重力ありの方がより短波の攪乱にまで薄膜方程式が有効である. これは重力の効果により下流に行くに従い厚みが薄くなるため薄膜近似がより有効となることに加え, 同じ周波数の攪乱でも下流に行くほど波長が長くなるためである.

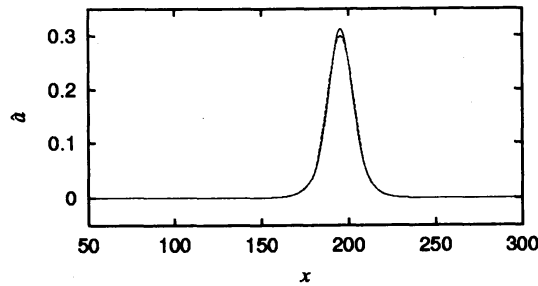


図 5.2: 重力あり ( $\omega = 1, t = 40$ )

## 5.2 反対称モード

まず重力無し ( $Fr \rightarrow \infty$ ) の場合の結果を図 5.3 に示す. 対称モードと同様に長波 ( $\omega < 0.3$ ) の場合のみ二つの結果がほぼ一致する.

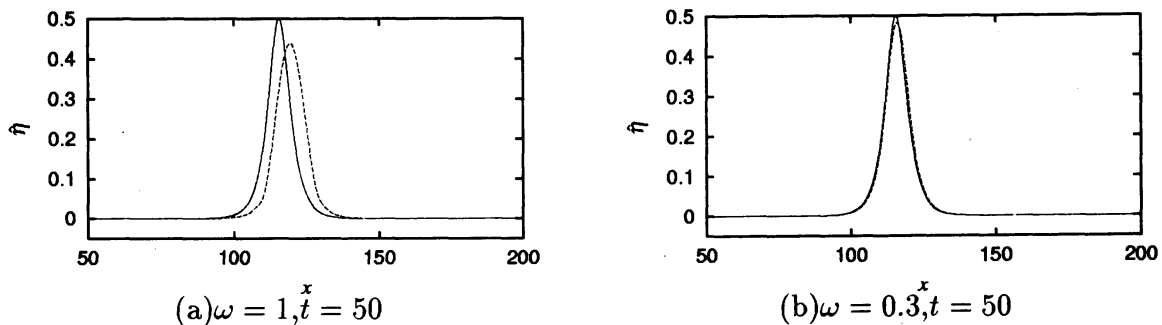


図 5.3: 攪乱包絡部  $\hat{a}$  の時間発展 (重力無し)

次に重力あり ( $Fr = \sqrt{10}$ ),  $\omega = 1$  の場合の結果を図 5.4 に示す. この図より  $\omega = 1$  でも二つの波形はほぼ一致する. これより, 対称モードの場合と同様に重力なしの場合に比べ重力ありの方がより短波の攪乱にまで薄膜方程式が有効であるといえる.

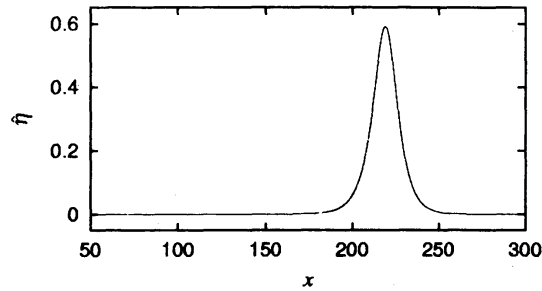


図 5.4: 重力あり ( $\omega = 1, t = 40$ )

## 6 結論

前節までに得られた結果をまとめると以下のようになる:

1. 短波長攪乱に対する薄膜近似の有効性を見るため, 得られた薄膜方程式より NLS 方程式を導出し, ポテンシャル流れを仮定して得られた NLS 方程式との比較を行った.
2. 重力の影響を考慮しない場合, 対称, 反対称両モードに対して, 短波長になるほど, 薄膜近似とポテンシャル流れに差異が現れる.
3. 重力の影響を考慮した場合, 下流に進むに従いシート厚みが薄くなることや攪乱の波長が長くなるために, 両者の差異はほとんど見られない.
4. 重力の影響によるシート攪乱の増幅または減衰に関しては, 下流方向に進む反対称モードのみが増幅し, 他は減衰する. この結果は, 薄膜近似, ポテンシャル流れの両方で定性的に一致している.

## 参考文献

- [1] 島健太郎: 特殊機能塗料の開発 (1987), 290.
- [2] L.W.Casperson: J. Sound and Vibration **162**(1993), 251.
- [3] C.P.Lee & T.G.Wang: Phys. Fluids **A1**(1989), 967.
- [4] T.Yoshinaga & K.Kotani: J.Phys. Soc. Jpn **70** (2001), 372.
- [5] H. B. Squire: Brit. J. Appl. Phys. **4**(1953), 167.
- [6] 菅健太郎, 吉永隆夫: 京都大学数理解析研究所講究録 **1271**(2002), 145.
- [7] 中村康輔: 重力場で鉛直に落下する流体シート上の表面張力波 (大阪大学基礎工学部修士論文, 1993).