

# 真空中の非粘性2層円環状シート流の 表面張力不安定の解析

京大・情報学

佐野 雅之 (Masayuki Sano)

京大・情報学

船越 満明 (Mitsuaki Funakoshi)

Department of Applied Analysis and Complex Dynamical Systems

Graduate School of Informatics, Kyoto University

## 1 序

液体が薄いシート状になって流れている液体シートはノズルやスリットから流体に初速度を与えて噴き出させるときに生じる。このような液体シートの形としては平面2次元状シート、中空の円環形シートなどが考えられる。液体シートの安定性の問題は液体スプレーの形成や、液体シートによる遮蔽などの観点から重要であり理論的には今までにさまざまな場合が調べられてきた [1]。

1層シートにおいては長波長で2つの不安定モードがある事が知られている [2][3]。一つは界面が同じ方向に変位する対称 (sinuous) モードであり、もう一つは界面が逆方向に変位する反対称 (varicose) モードである。

線形解析の結果として反対称モードの不安定成長率は対称モードの不安定成長率よりも大きいと言う事が知られている。1層平面2次元シートにおいては不安定は界面における Kelvin-Helmholtz 不安定であり真空中では不安定は生じないが、円環形シートにおける不安定は界面における表面張力不安定であって真空中でも生じることが知られている [4][5][6]。

1層液体シートの崩壊過程の詳細を知るためには非線形の効果を取り入れた時間発展を調べる必要がある。しかし液体シートは移動境界を含む系であるのでポテンシャル理論を用いた直接計算は計算量が多いという面で困難である。したがって何らかの近似を用いて系をモデル化し、より計算しやすいようなモデル方程式を導く事が有効である。そのようなモデルとして境界面を渦層として表す離散渦層モデル [7] とシートの厚さ方向に平均化した Navier-Stokes を用いる薄膜近似モデルがある [5][6]。これらのモデル化によって1層円環形シートの崩壊過程として中空部が閉じて崩壊する場合やシートの厚さが0になって崩壊する場合があることが知られている。

ここでは2層の中空円環形液体シートを考える。2層の液体シートでは対称モード、反対称モードの他にもう一つのモードが現れる。以下では2層円環形液体シートの線形解析を行ない時間的不安定の成長率の振舞いを調べる。また非線形の効果を取り入れた解析を行なう事を目標として2層円環形液体シートに薄膜近似を適用しモデル方程式を導き、その妥当性をポテンシャル理論との比較によって検証する事とする。

## 2 速度ポテンシャルを用いた2層液体シートの振舞いの解析

非粘性の非圧縮流体が円環形で一定の速度で流れている状況を考える。円環形シートの速度の方向を図1のように円柱座標系で  $z$  軸方向にとり、円環の半径の方向を  $r$  軸方向と

する。定常状態での内側の円環形液体シートの領域を  $R_{10} < r < R_{20}$ 、外側の円環形液体シートの領域を  $R_{20} < r < R_{30}$  とし、これらを領域 1, 2 とし液体シートに囲まれた部分  $r < R_{10}$  を領域 0、液体シートの外側の部分  $r > R_{30}$  の部分をそれぞれ領域 3 とする。また領域  $i$  での密度、圧力を  $\rho_i, p_i (i = 0 \dots 3)$  とする。

非粘性非圧縮流体の渦なし流を考えているので、速度ポテンシャルを定義することができる。領域  $i$  での速度ポテンシャルを  $\phi_i(r, z, t)$ , ( $i = 0 \dots 3$ ) とすると、基礎方程式はラプラス方程式であり

$$\Delta \phi_i = 0 \quad (i = 0 \dots 3) \quad (1)$$

となる。各領域  $i$  での流体の  $r$  方向の速度成分  $v_r^{(i)}$  及び  $z$  方向の速度成分  $v_z^{(i)}$  は

$$v_r^{(i)} = \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial r}, \quad v_z^{(i)} = \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial z} \quad (2)$$

で与えられる。

液体シートの表面では表面張力が働く。各界面を  $r = R_1, R_2, R_3$  としそれぞれの界面での表面張力係数を  $\sigma_{01}, \sigma_{12}, \sigma_{23}$  とする。

定常流は軸方向の一様な流れであり、これを

$$v_r^{(1)} = v_r^{(2)} = 0, \quad v_z^{(1)} = V_1, \quad v_z^{(2)} = V_2 \quad (3)$$

とする。これに対応する速度ポテンシャルは

$$\phi_i = V_i z \quad i = 1, 2, \quad \phi_i = 0 \quad i = 0, 3 \quad (4)$$

となる。また定常状態での各層での圧力は表面張力による圧力差を考慮し、

$$p_3 = 0, \quad p_2 = \frac{\sigma_{23}}{R_{30}}, \quad p_1 = \frac{\sigma_{23}}{R_{30}} + \frac{\sigma_{12}}{R_{20}}, \quad p_0 = \frac{\sigma_{23}}{R_{30}} + \frac{\sigma_{12}}{R_{20}} + \frac{\sigma_{01}}{R_{10}} \quad (5)$$

となる。ここで一般性を失わず領域 3 での圧力  $p_3$  を 0 とできることを利用した。

この定常状態の線形安定性を考えるために、軸方向への波数  $k$  の微小擾乱を次のように与える。

$$R_i(z, t) = R_{i0} + \eta_i \exp(i\omega t - ikz) \quad (6)$$

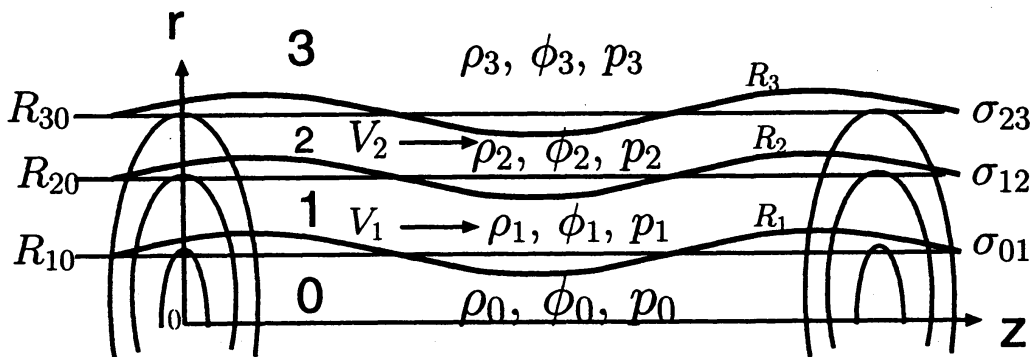


図 1: 2層円環形シート

この微小擾乱が与えられた条件での速度ポテンシャルの解は円筒内部では  $r \rightarrow 0$  で有限、円筒外部では  $r \rightarrow \infty$  で有限という条件の下で

$$\begin{aligned}\phi_3(r, z, t) &= A_3 K_0(kr) \exp i(kz - \omega t) \\ \phi_2(r, z, t) &= V_2 z + (A_2 K_0(kr) + B_2 I_0(kr)) \exp i(kz - \omega t) \\ \phi_1(r, z, t) &= V_1 z + (A_1 K_0(kr) + B_1 I_0(kr)) \exp i(kz - \omega t) \\ \phi_0(r, z, t) &= B_0 I_0(kr) \exp i(kz - \omega t)\end{aligned}$$

となる。ここで  $K_0, I_0$  はそれぞれ 0 次の第 1 種、第 2 種の変形ベッセル関数であり、 $A_i, B_i$  は境界条件から決まる定数となる。

境界条件は運動学的境界条件

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial R_i}{\partial z} = \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \quad \text{at } r = R_i(z, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

及び、力学的境界条件

$$\Delta p_i = \sigma_{i-1, i} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \quad (8)$$

で与えられる。ここで  $\frac{1}{l_1}$  と  $\frac{1}{l_2}$  は界面の曲率で

$$\frac{1}{l_1} = -\frac{\frac{\partial^2 R_i}{\partial z^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial R_i}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{1}{l_2} = \frac{1}{R_i \sqrt{1 + \left(\frac{\partial R_i}{\partial z}\right)^2}} \quad (9)$$

である。圧力はベルヌーイの定理を用いて

$$p_i = -\frac{\rho_i}{2} |\nabla \phi_i|^2 - \rho_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \quad (10)$$

となる。

この境界条件を擾乱の係数  $A_i, B_i, \eta_i$  が微小として、微小量の 1 次まで近似することで  $A_i, B_i, \eta_i$  に関する次の方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{17} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & C_{27} & 0 & 0 \\ 0 & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{38} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 & 0 & C_{48} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 & 0 & 0 & C_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & C_{69} \\ C_{71} & C_{72} & C_{73} & 0 & 0 & 0 & C_{77} & 0 & 0 \\ 0 & C_{82} & C_{83} & C_{84} & C_{85} & 0 & 0 & C_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{94} & C_{95} & C_{96} & 0 & 0 & C_{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ \eta_3 \\ \eta_2 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
C_{11} &= C_{22} = -kK_1(kR_{30}), & C_{17} &= C_{69} = i\omega, \\
C_{23} &= kI_1(kR_{30}), & C_{27} &= C_{38} = i(\omega - V_2k), & C_{32} &= C_{44} = -kK_1(kR_{20}), \\
C_{33} &= C_{45} = -kI_1(kR_{20}), & C_{47} &= i(\omega - V_1k), & C_{54} &= -kK_1(kR_{10}), \\
C_{55} &= C_{66} = kI_1(kR_{10}), & C_{59} &= i(\omega - V_1k), & C_{71} &= -i\rho_3K_0(R_{30})\omega, \\
C_{72} &= i\rho_2K_0(R_{30})(\omega - V_2k), & C_{73} &= i\rho_2I_0(R_{30})(\omega - V_2k), & C_{83} &= -i\rho_2I_0(R_{20})(\omega - V_2k), \\
C_{84} &= -i\rho_1K_0(R_{20})(\omega - V_1k), & C_{85} &= -i\rho_1I_0(R_{20})(\omega - V_1k), \\
C_{94} &= -i\rho_1K_0(R_{10})(\omega - V_1k), & C_{95} &= -i\rho_1I_0(R_{10})(\omega - V_1k), & C_{96} &= i\rho_0I_0(R_{10})\omega, \\
C_{77} &= -\sigma_{23}\left(k^2 - \frac{1}{R_{30}^2}\right), & C_{88} &= -\sigma_{12}\left(k^2 - \frac{1}{R_{20}^2}\right), & C_{99} &= -\sigma_{01}\left(k^2 - \frac{1}{R_{10}^2}\right),
\end{aligned}$$

で、 $I_i, K_i$  はそれぞれ第1種、第2種の変形ベッセル関数である。この連立方程式が自明でない解を持つ条件は係数行列の行列式が0以外の値となることであり、これが分散関係式を与える。この分散関係式は $\omega$ に関する実係数の6次式であり、以下のように $R_{10}, R_{20}, R_{30}, \sigma_{01}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, V_1, V_2$  をパラメータとして

$$\det C = f(\omega, k; R_{10}, R_{20}, R_{30}, \sigma_{01}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, V_1, V_2) = 0 \quad (12)$$

と書ける。

$\rho_0, \rho_3 \neq 0$  の時は流体の速度差に起因する Kelvin-Helmholtz 不安定が発生する。以下では表面張力不安定を考えるために  $\rho_0 = \rho_3 = 0$  とする。これは真空中での液体シートの振舞いを考えることに対応しているとも言えるが、液体シートに囲まれた領域0を真空として圧力を  $p_0 = 0$  とすると表面張力があるために円環の半径が一定の定常流が存在できない。したがってここでは領域0の流体は存在するが、圧力だけを与えるとする。また表面張力不安定に注目したいので2層の速度差による Kelvin-Helmholtz 不安定が起こらないように領域1と領域2の速度差もないとき、すなわち  $V_1 = V_2$  を考えることにすると、座標変換  $z \rightarrow z - V_1 t$  によって一般性を失わず  $V_1 = V_2 = 0$  とできる。

今、擾乱の時間的不安定を考えるので(12)を $\omega$ を複素数、 $k$ を実数として解く。それによって固有モードの位相速度  $\text{Re}(\omega(k))/k$  と時間不安定の成長率  $\text{Im}(\omega(k))$  が得られる。また各固有モードの形状は各  $\omega(k)$  に対応した界面の振幅比  $\eta_i/\eta_j$  を調べることで分かる。

$V_1 = V_2 = 0$  及び  $\rho_0 = \rho_3 = 0$  の仮定をおくと(12)は $\omega$ に関して実係数で偶数次のみになり、実際に解いてみると  $\omega^2$  は実数になることがわかる。したがって  $\omega$  の解は6個あるが、符号を変えた2個が組になっていて同じモードを表している。これは  $V_1 = V_2 = 0$  なので、系は  $z \rightarrow -z$  の変換に対して対称であるから一つの固有モードの位相速度が正負両方が存在することに対応している。

以下、 $R_{10}, \rho_1, \sigma_{01}$  を基準に諸量を無次元化し、速度、圧力、時間の基準は  $v_{\text{ref}} = \sqrt{\frac{2\sigma_{01}}{\rho_1 R_{10}}}$ ,  $p_{\text{ref}} = \frac{R_{01}}{\sigma_{01}}$ ,  $t_{\text{ref}} = \sqrt{\frac{2\sigma_{01} R_{10}}{\rho_1}}$  のようにとる。

以下の2層円環シートでの固有モードの解析ではパラメータを変化させるときの比較対象として

$$R_{20} = 1, b_{10} = b_{20} = 0.2, \quad \sigma_{01} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 1, \quad \rho_2 = \rho_1 = 1 \quad (13)$$

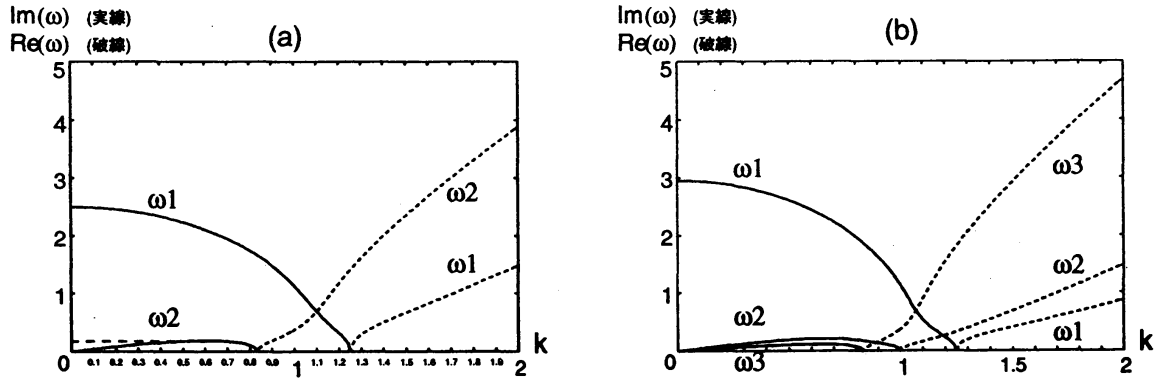


図 2: 波数  $k$  に対する固有値の実部及び虚部 (不安定成長率):(a)1層 (b)2層

の場合を代表的な場合として考える。ここで  $b_{10} = R_{20} - R_{10}$ ,  $b_{20} = R_{30} - R_{20}$  は定常状態での厚さである。このパラメータに対する固有モードの解析を行い、これに対してパラメータを変化させたときの安定性の変化を調べる。

## 2.1 2層液体シートでの固有モード

図 2 は 1 層及び 2 層の液体シートについて、固有値の  $\omega$  の  $k$  に対する依存性を示したものである。実線が  $\text{Im}(\omega)$ 、破線が  $\text{Re}(\omega)$  を表している。1 層と 2 層ではモードの数が違うが、傾向はよく似ており、それぞれのモードは  $k$  の小さい領域で不安定である。(虚部の大きい順に  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  とする。) また各  $\omega_i$  は  $\omega = 0$  となる  $k = k_c$  で純虚数から実数へ変化し、 $k = k_c$  が不安定となる最大の  $k$  となっている。さらに不安定領域では  $\omega_1$  は  $\omega_2, \omega_3$  より 10 倍程度大きい。すなわち  $\omega_1$  の表すモードの不安定は他のモードの不安定よりかなり強い。また  $k \rightarrow 0$  で  $\omega_2, \omega_3$  は 0 に近づくが、 $\omega_1$  は 0 でない値に近づくとわがわかる。

不安定になる限界の  $k_c$  の存在は次のように不安定成長の機構を考えることで解釈できる。不安定を与える最大波数  $k_{ic}$  では分散関係の解は  $\omega = 0$  になっているが、これは係数行列  $C$  の要素の中で

$$C_{77}, C_{88}, C_{99} = \sigma_{i-1i} \left( k_{ic}^2 - \frac{1}{R_i^2} \right) = 0 \quad (14)$$

という関係が満たされる時である。ここで  $\sigma_{i-1i} \left( k_{ic}^2 - \frac{1}{R_i^2} \right)$  の第 1 項は  $k^2$  に比例するがこれは (9) の第 1 項による表面張力  $F_1 \sim \sigma \frac{\partial^2 R_i}{\partial z^2}$  は変位に対して復元力として安定化に寄与する。また (9) の第 2 項による表面張力  $F_2 \sim \frac{\sigma}{R_i}$  は変位に対して変位を促進させる方向に働き不安定化に寄与する。すなわち不安定を与える最大波数  $k_{ic}$  は界面での曲率の第 1 項と第 2 項による表面張力がつりあうような波数である。これらに対応するモードは対応する界面の変位が他の界面の変位に対して大きいようなモードになっていると考えられる。

反対称モードでは  $k = 0$  が最大の不安定成長率を与えている。これは波長無限大、すなわち一様な変形を意味する。したがってこの変形に対しては円環シートで囲まれた領域 0

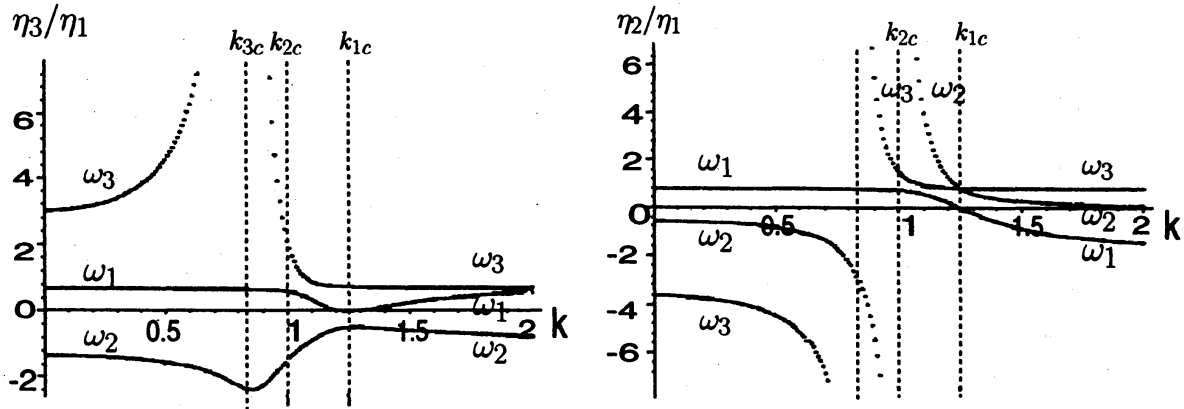


図 3: 振幅比  $\eta_3/\eta_1$  及び  $\eta_2/\eta_1$

の体積は保存しない。これは  $\rho_0 = 0$  としたことによるものであり、 $\rho_0 \neq 0$  の時には領域 0 の体積保存からこのような変形は許されず、実際に  $\rho_0 \neq 0$  として計算すると  $k = 0$  付近で反対称モードの不安定成長率は急激に 0 に近づく。

## 2.2 界面の形状の $k$ による変化

次に 2 層円環形液体シートの固有モードの形状を振幅比  $\eta_i/\eta_j$  を用いて調べる。図 (2.2) は内側の界面での振幅  $\eta_1$  と外側の界面の振幅  $\eta_3$  の比および内側の界面での振幅  $\eta_1$  に対する中心界面での振幅  $\eta_2$  の比を図 2 の場合と同じパラメータの場合に  $k$  の関数として図示したものである。

$k \sim 0$  付近での振幅を見てみると、 $\omega_1$  に対応する最も成長率の大きなモードは  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  がすべて同符号であり 1 層の場合の反対称モードに対応すると考えられる。また  $\omega_2$  に対応する 2 番目に成長率の大きなモードは内側と外側の変位が互いに反対方向であり、それらに対して中心界面の変位が小さく 1 層における対称モードに対応すると考えられる。 $\omega_3$  に対応する最も成長率が小さなモードは外側と内側の界面の変位が同符号であり、それに対して中心界面の変位が逆符号で外側と内側の変位に対して比較的大きいというモードである。これは 2 層にしたことによって新しく現われたモードであり、これを内部モードと呼ぶことにする。

$k$  が大きくなり不安定の限界である  $k_{ci}$  に近くなると各モードの形状は  $k \sim 0$  のものとは異なってくる。図より  $\omega_2$  に対応するモードは  $k = k_{2c}$  付近では内部モードのような振舞いをしていることがわかる。またさらに  $k$  が  $k_{ic}$  を越えて大きくなると  $\omega_1$  に対応するモードは  $k \gg \frac{1}{R_{10}}$  では内部モードのような振舞いを示し、またこのような領域では  $\omega_3$  に対応



図 4: 2層液体シートでの固有モード

するモードが反対称モードの振舞いを示す。このようなモードの入れ替わりは1層シートの場合でも起こることがわかっている。

### 2.3 パラメータによる安定性の変化

つぎにパラメータ変化に対する不安定成長率の変化を調べる。図 5 は 2 層の厚さの比  $b_{20}/b_{10}$  の変化 (図 5-b)、中心界面と内側界面の表面張力係数の比  $\sigma_{12}/\sigma_{01}$  の変化 (図 5-c)、2 層の密度比  $\rho_2/\rho_1$  の変化 (図 5-d) に対して不安定成長率の大きさが各モードでどのように変わるかを横軸に  $k$  をとり縦軸に成長率を表したグラフで示したものである。また図 5-a として 1 層シートの場合を比較のために示している。図 5-c からは  $\sigma_{12}/\sigma_{01}$  を大きくすると全体として成長率が増加すること、 $\sigma_{12}/\sigma_{01} \rightarrow 0$  で 1 層の場合に漸近することがわかる。図 5-d からは  $\rho_2/\rho_1$  を 1 より大きくすると  $\omega_3, \omega_1$  に対応するモードの成長率が減少するのに対し、 $\rho_2/\rho_1$  を小さくすると  $\omega_2$  に対応する対称モードの成長率が増加し、 $\omega_1$  に対応する反対称モードの成長率については  $k = 0$  以外で成長率の極大が現れることがわかる。

1 層の場合や 2 層の代表的な場合について成長率の極大は反対称モードで  $k \rightarrow 0$  で起こっていたが、図 (5-b) はパラメータの変化によって成長率の極大が  $k \neq 0$  になるということを示しており興味深いと考えられる。また厚さの比  $b_{20}/b_{10}$  の変化に対しても  $b_{20}/b_{10}$  を 1 より大きくしていくと反対称モードの成長率は減少するものの、極大に関しては  $k = 0$  以外で成長率の極大が現れることがわかる。

2 層にすることで 1 層では現れない内部モードが現れるが、最も成長率の大きいのは長波長における反対称モードであり、この状況は 1 層の場合と変わらない。また内部モードは反対称モード、対称モードに比べて不安定は弱い。しかしシートが薄いという特性から内部モードのわずかな成長でもシートが途切れるという可能性があるため実際の崩壊過程にどのモードが寄与するかは非線形効果も取り入れたシミュレーションが必要と考えられる。

## 3 薄膜近似モデルの 2 層液体シートへの適用

### 3.1 モデル方程式の導出

2 層円環形シートにおいては 1 層円環形シートには存在しない内部モードが現れる。またパラメータを変化させることによって最大不安定成長率を与える  $k$  が 0 以外の値をとることが分かったが、実際の形状の時間発展を考える時は、非線形効果が重要であると考えられる。薄膜シートでは界面が時間的空間的に変化する自由境界面であり直接数値計算によるシミュレーションは困難である。そのために系に近似を行って現象をうまく記述でき

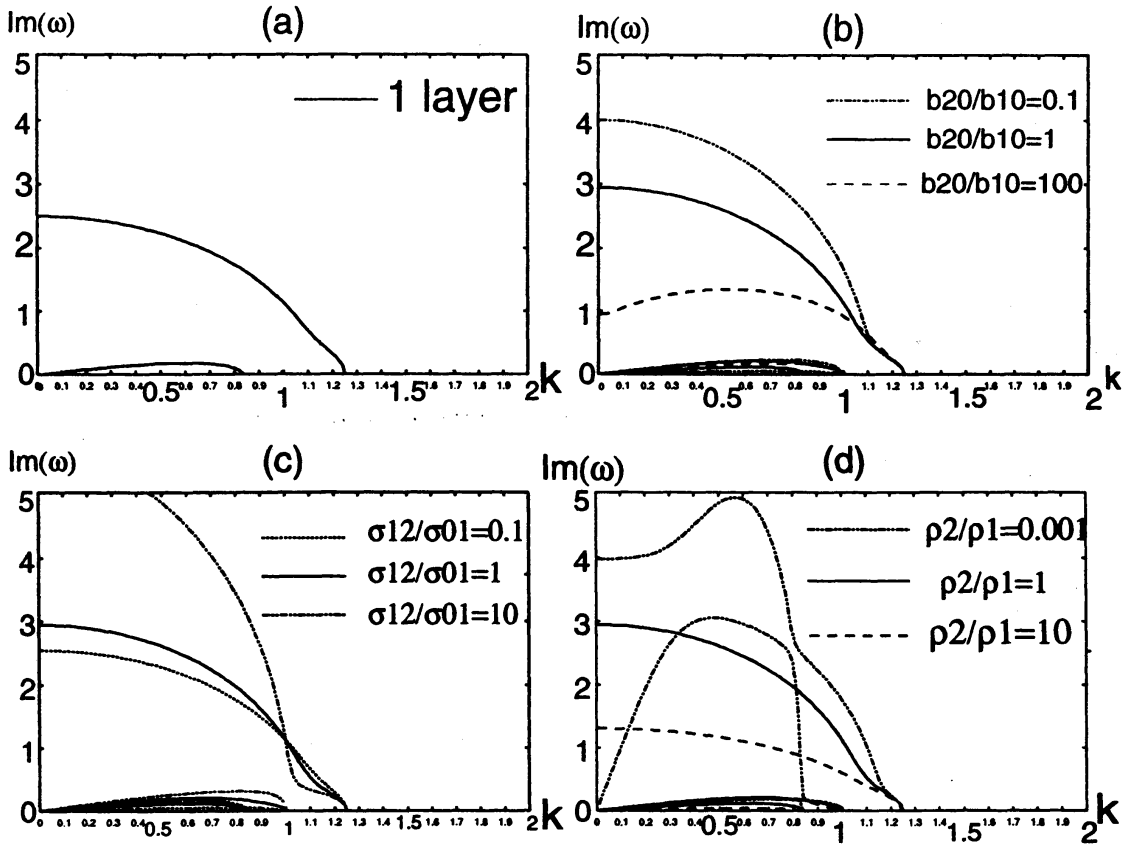


図 5: パラメータの変化に対する不安定成長率の変化:

(a) 1層、(b) 2層の厚さの初期値の比を変化、(c) 中心界面と内外界面の表面張力係数の比を変化、(d) 2層の密度の比を変化

るモデル方程式を導き出すことが重要である。1層円環形シートでは薄膜の厚さ方向にナビエ・ストークス方程式を積分した平均化方程式を導く手法(薄膜近似)が有効であることが知られている。[5, 6] このモデルの基本的考え方は、薄膜では厚さ方向のスケールが流れ方向に対して小さいことから厚さ方向の自由度を近似的に扱うことでより簡単な計算モデルを導出するものである。具体的には速度と圧力について厚さ方向の分布形を仮定し基礎方程式を  $r$  方向について積分し平均化するというものである。[8]

基礎方程式は連続の式とオイラー方程式である。それらを各層ごとに円環の厚さ方向に平均化するために  $r$  をかけて  $R_1(z, t)$  から  $R_2(z, t)$  又は  $R_2(z, t)$  から  $R_3(z, t)$  まで積分する。

$$\int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^{(i)}) dr + \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\partial v_z^{(i)}}{\partial z} r dr = 0 \quad (15)$$

$$\int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\partial v_z^{(i)}}{\partial t} r dr + \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\partial v_z^{(i)2}}{\partial z} r dr + \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\partial}{\partial r} (r v_z^{(i)} v_r^{(i)}) dr = - \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial z} r dr \quad (16)$$



$$\int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial t} r dr + \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^{(i)2}) dr + \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{\partial}{\partial z} (v_z^{(i)} v_r^{(i)}) r dr = - \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial r} r dr \quad (17)$$

境界条件は運動学的境界条件

$$v_r^{(1)}(R_1) = \frac{\partial R_1}{\partial t} + v_z^{(1)} \frac{\partial R_1}{\partial z}, \quad v_r^{(1)}(R_2) = \frac{\partial R_2}{\partial t} + v_z^{(1)} \frac{\partial R_2}{\partial z} \quad (18)$$

$$v_r^{(2)}(R_2) = \frac{\partial R_2}{\partial t} + v_z^{(2)} \frac{\partial R_2}{\partial z}, \quad v_r^{(1)}(R_3) = \frac{\partial R_3}{\partial t} + v_z^{(3)} \frac{\partial R_3}{\partial z} \quad (19)$$

と界面での圧力の差と表面張力の関係を与える力学的境界条件である。

$$p^{(1)}(R_1) = p_0 - \Delta p_1, \quad p^{(2)}(R_2) = p^{(1)}(R_2) - \Delta p_2, \quad p^{(2)}(R_3) = p_3 + \Delta p_3 \quad (20)$$

実際に平均化された方程式を導くためには厚さ方向の各物理量の関数を決定する必要がある。そのために「シートの厚さがその上に生じる擾乱の波長に比べて小さい」という仮定をおく。このことを物理量に関する仮定として次のように表す。これが薄膜近似の考え方である。

- $v_z$  は  $r$  方向 (シートの厚さ方向) に一定である。  $v_z^{(i)}(r, z, t) = v_z^{(i)}(z, t)$
- $v_r^{(i)}, p_i$  の  $r$  方向の分布形は一次関数

$$v_r^{(i)}(r, z, t) = \frac{v_r^{(i)}(R_{i+1}) + v_r^{(i)}(R_i)}{2} + \frac{v_r^{(i)}(R_{i+1}) - v_r^{(i)}(R_i)}{R_{i+1} - R_i} \left( r - \frac{R_{i+1} + R_i}{2} \right)$$

$$p^{(i)}(r, z, t) = \frac{p^{(i)}(R_{i+1}) + p^{(i)}(R_i)}{2} + \frac{p^{(i)}(R_{i+1}) - p^{(i)}(R_i)}{R_{i+1} - R_i} \left( r - \frac{R_{i+1} + R_i}{2} \right)$$

これらの方程式は1層の場合と良く似ている。しかし2層では  $r = R_2$  で界面を共有しているために界面の位置座標を表す物理量が一つ減っている。また境界面での表面張力による圧力差から決まる圧力分布を考えるときに1層の場合にはこの値と薄膜近似の仮定のみで圧力分布の関数形を決める事ができるのに対して、2層の場合には図6に示したように、圧力分布の関数形は与えられた  $p_0, p_3$  に対し、境界条件から  $R_i$  での圧力を決めただけでは決定することができず、領域1,2での圧力分布の傾きに当たる量を与えなければならない。そのために中心界面の圧力を表す  $P(z, t)$  を導入する。これを中心界面での内側の層での圧力と外側の層での圧力の平均値とみなす。これが新たな物理量として加わることになる。

$$P(z, t) = \frac{1}{2} \left( p^{(1)}(R_2) + p^{(2)}(R_2) \right) \quad (21)$$

$P$  を用いると各界面での圧力は

$$p^{(1)}(R_1) = p_0 - \Delta p_1, \quad p^{(1)}(R_2) = P + \frac{\Delta p_2}{2} \quad (22)$$

$$p^{(2)}(R_2) = P - \frac{\Delta p_2}{2}, \quad p^{(2)}(R_3) = p_3 + \frac{\Delta p_2}{2} \quad (23)$$

となる。基礎方程式を簡単にするために物理量  $f$  ( $f = v_z^{(i)}, v_r^{(i)}, p^{(i)}$ ) に対し厚さ方向に平

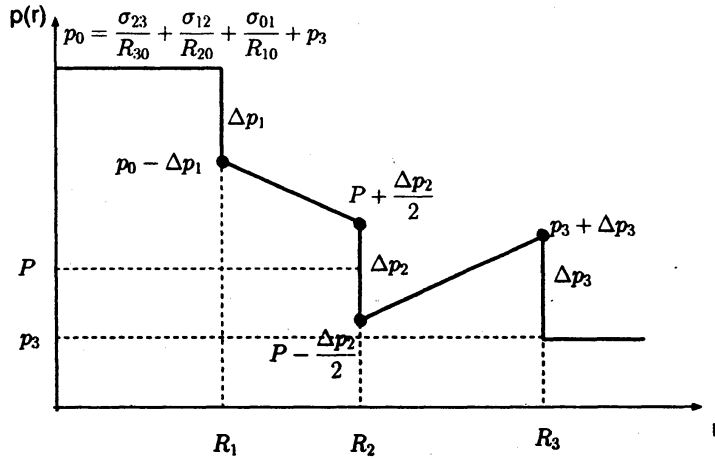


図 6: 圧力分布関数  $p(r)$

均化された量  $\bar{f} = \int_{R_i}^{R_{i+1}} f r dr / \int_{R_i}^{R_{i+1}} r dr$  を定義する。すると薄膜近似の仮定の下での平均量は

$$\bar{v}_z^{(i)}(z, t) = v_z^{(i)}(z, t) \quad (24)$$

$$\bar{v}_r^{(i)}(z, t) = \frac{1}{2}(v_r^{(i)}(R_{i+1}) + v_r^{(i)}(R_i)) + \frac{1}{6} \frac{R_{i+1} - R_i}{R_{i+1} + R_i} (v_r^{(i)}(R_{i+1}) - v_r^{(i)}(R_i)) \quad (25)$$

$$\bar{p}^{(i)}(z, t) = \frac{1}{2}(p^{(i)}(R_{i+1}) + p^{(i)}(R_i)) + \frac{1}{6} \frac{R_{i+1} - R_i}{R_{i+1} + R_i} (p^{(i)}(R_{i+1}) - p^{(i)}(R_i)) \quad (26)$$

となる。これらの平均量  $\bar{v}_z^{(i)}$ ,  $\bar{v}_r^{(i)}$ ,  $\bar{p}^{(i)}$  及び  $\Delta p^{(i)} = p^{(i)}(R_{i+1}) - p^{(i)}(R_i)$ ,  $\Delta v_r^{(i)} = v_r^{(i)}(R_{i+1}) - v_r^{(i)}(R_i)$  を用いて基礎方程式を書き直すことにより、 $v_z^{(1)}$ ,  $v_z^{(2)}$ ,  $v_r^{(1)}$ ,  $v_r^{(2)}$ ,  $\Delta v_r^{(1)}$ ,  $\Delta v_r^{(2)}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  と界面における各層の圧力  $p^{(2)}(R_3)$ ,  $p^{(2)}(R_2)$ ,  $p^{(1)}(R_2)$ ,  $p^{(1)}(R_1)$  で書かれた 2 層円環シートモデル方程式が得られる。

この方程式を時間発展方程式の形で書くと以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z^{(i)}}{\partial t} + v_z^{(i)} \frac{\partial v_z^{(i)}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_i} \frac{2}{(R_{i+1}^2 - R_i^2)} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(R_{i+1}^2 - R_i^2)}{2} \bar{p}^{(i)} \right) \\ &+ \frac{1}{\rho_i} \frac{2}{(R_{i+1}^2 - R_i^2)} \left( \frac{\partial R_{i+1}}{\partial z} p^{(i)}(R_{i+1}) - \frac{\partial R_i}{\partial z} p^{(i)}(R_i) \right) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial t} + v_z^{(i)} \frac{\partial v_r^{(i)}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{2}{(R_{i+1}^2 - R_i^2)} (p^{(i)}(R_{i+1}) - p^{(i)}(R_i)) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial t} &= -v_z^{(1)} \frac{\partial R_1}{\partial z} + \bar{v}_r^{(1)} - \left( \frac{1}{2} + \frac{(R_2 - R_1)}{6(R_2 + R_1)} \right) \Delta v_r^{(1)} \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} &= -(v_z^{(1)} + v_z^{(2)}) \frac{\partial R_2}{\partial z} + \frac{1}{2} (\bar{v}_r^{(1)} + \bar{v}_r^{(2)}) \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{(R_2 - R_1)}{6(R_2 + R_1)} \right) \Delta v_r^{(1)} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{(R_3 - R_2)}{6(R_3 + R_2)} \right) \Delta v_r^{(2)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial R_3}{\partial t} = -v_z^{(2)} \frac{\partial R_3}{\partial z} + \overline{v_r^{(2)}} + \left( \frac{1}{2} - \frac{(R_3 - R_2)}{6(R_3 + R_2)} \right) \Delta v_r^{(2)} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \overline{v_r^{(2)}} - \overline{v_r^{(1)}} &= (v_z^{(2)} - v_z^{(1)}) \frac{\partial R_2}{\partial z} \\ &+ \left( \frac{1}{2} - \frac{(R_2 - R_1)}{6(R_2 + R_1)} \right) \Delta v_r^{(1)} + \left( \frac{1}{2} + \frac{(R_3 - R_2)}{6(R_3 + R_2)} \right) \Delta v_r^{(2)} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\Delta v_r^{(1)} = - \frac{\frac{R_2 - R_1}{2} \frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial z} + \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \overline{v_r^{(1)}}}{\frac{1}{2} - \frac{(R_2 - R_1)^2}{(R_2 + R_1)^2}} \quad (31)$$

$$\Delta v_r^{(2)} = - \frac{\frac{R_3 - R_2}{2} \frac{\partial v_z^{(2)}}{\partial z} + \frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2} \overline{v_r^{(2)}}}{\frac{1}{2} - \frac{(R_3 - R_2)^2}{(R_3 + R_2)^2}} \quad (32)$$

これは空間1次元の1階微分方程式系であり、ポテンシャル解析による定式化よりも容易に解くことができる。

### 3.2 安定性解析 (時間的不安定) とポテンシャル解析による結果との比較

この方程式を導くに当たって薄膜近似の仮定をし、中心界面での圧力  $P(z, t)$  という変数を導入した。これを用いて非線形挙動を数値計算で調べる前に、このようにして導かれた方程式の正当性を調べるためにこの方程式について時間的不安定の安定性解析を行いポテンシャル解析による結果との比較を行う事にする。変数は  $v_z^{(1)}(z, t)$ ,  $v_z^{(2)}(z, t)$ ,  $v_r^{(1)}(z, t)$ ,  $v_r^{(2)}(z, t)$ ,  $\Delta v_r^{(1)}(z, t)$ ,  $\Delta v_r^{(2)}(z, t)$ ,  $R_1(z, t)$ ,  $R_2(z, t)$ ,  $R_3(z, t)$ ,  $P(z, t)$  であり、定常流に対する波数  $k$  の正弦波的な微小擾乱を仮定し、これを基礎方程式に代入し擾乱の係数  $\eta_i$ ,  $A_z^{(i)}$ ,  $A_r^{(i)}$ ,  $A_{\Delta v}^{(i)}$ ,  $A_P$  が微小量として線形化を行い係数行列の行列式が0である条件を求めると、

$$\det A = f(\omega, k; R_{10}, R_{20}, R_{30}, \sigma_{01}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \rho_1, \rho_2, V_1, V_2) = 0 \quad (33)$$

が分散関係になる。これは  $\omega$  についての実係数の6次式である。これを  $\omega$  についてとくことで固有モードの位相速度  $\dots \text{Re}(\omega)/k$ 、時間不安定の成長率  $\text{Im}(\omega)$  を求める事ができる。これらをポテンシャル理論によるものと比較し2層系に対する薄膜近似の妥当性を(微小擾乱の範囲内)で検証する。

### 3.3 ポテンシャル理論と薄膜近似による不安定成長率の比較

図7はポテンシャル理論及び薄膜近似によって分散関係の解を求め、不安定成長率(固有値の虚部)及び位相速度を波数で割ったもの(固有値の実部)を横軸を波数  $k$  にとってグラフにしたものである。これから分かるように不安定成長率はパラメータによらず非常によく一致する。具体的には位相速度は  $k$  が  $k \sim 5$  のあたりまでは非常に良く一致している。ここでは  $R_{20} = 1, b_{10} = 0.2$  より  $k \sim 5$  は波長が薄膜の厚さ程度を意味しており、これは薄膜近似の仮定とあっている。

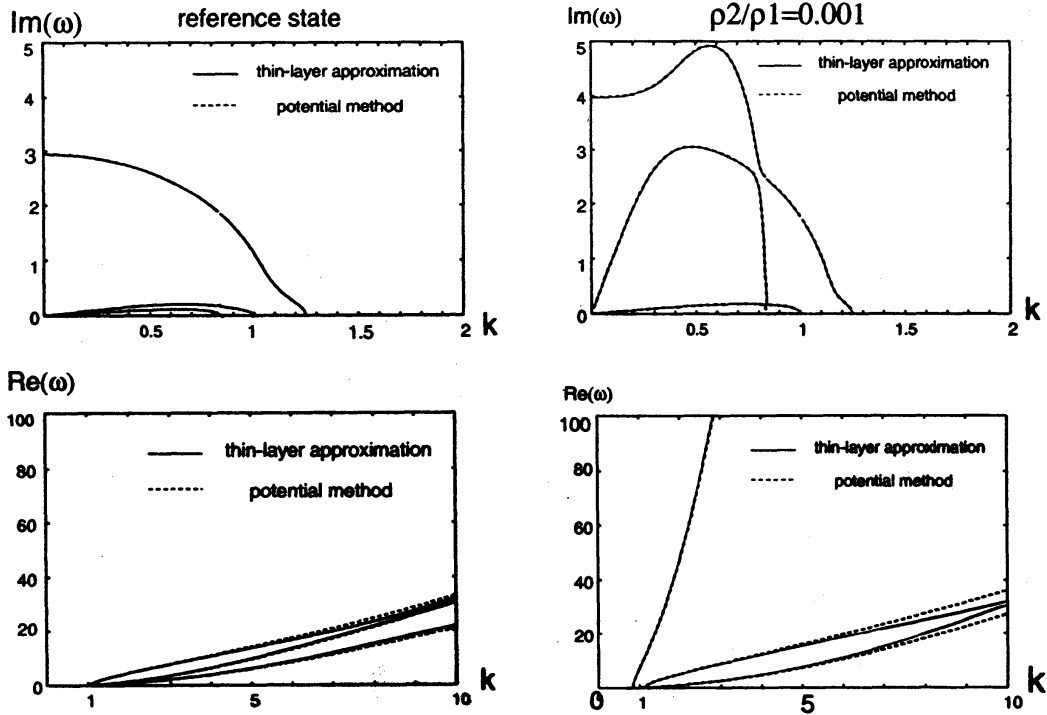


図 7: ポテンシャル理論と薄膜近似による固有値の比較: (a)reference state (内外の層で表面張力係数、厚さの初期値、密度、の比がすべて 1 の場合) (b) 密度の比が 0.001 の場合

#### 4 まとめ

ここでは 2 層円環形液体シートの安定性について考えた。1 層液体シートで生じる対称モード、反対称モードについては 2 層円環シートにおいても生じ全体として同様の変形をシートにもたす。その不安定成長率の比は 1 層円環形液体シートでそうであったように反対称モードの成長率が対称モードの成長率より大きくなっている。反対称モードは 1 層の反対称モードが 2 つある場合、対称モードは中心界面の表面張力が効果を及ぼしていない場合に対応すると考えられるのでこれは自然な結果と考えられる。

2 層シートでは 1 層シートでは現れなかったモードとして中心界面がより内外の界面に比べてより変動する内部モードが現れる。しかしこの不安定成長率は対称モード、反対称モードと比較して弱い。

パラメータの変化に対する不安定の変化については、中心界面に対する内(外)側界面の表面張力係数の比、内側の層に対する外側の層の密度の比、内側の層に対する外側の層の厚さの比をパラメータとした不安定性の変化について考えた。内側の層に対する外側の層の密度の比が小さいときは反対称、対称モードの成長率は増大する。また内側界面に対する中心界面の表面張力係数の比が大ききときは不安定成長率が増大する。とくに 2 層間のパラメータの比によって最大の不安定成長率を与える波数  $k$  が変化することは 2 層円環シートの大きな特徴と言える。

中心界面における圧力を変数に導入する事で薄膜近似を 2 層円環形シートに適用し、近似方程式を得た。波長がシートの厚さ程度の波長より大きいという近似の範囲内で、位相

速度と不安定成長率がポテンシャル理論の結果と一致する事を確認した。

パラメータ変化に対する不安定成長率の変化の振舞いや、実際のシートの崩壊過程を調べるためには非線形効果を取り入れた数値シミュレーションが必要であると考えられる。薄膜近似による方程式は1層の場合と同様2層の場合においても数値シミュレーションに有効であると考えられる。

非線形発展の数値計算については現在計算中である。

## 参考文献

- [1] W. A. Sirignano and C. Mehring, "Review of theory of distortion and disintegration of liquid streams" *Prog. Energ. Comb. Sci.* (2000), 609 and references therein.
- [2] H. B. Squire, "Investigation of the instability of moving liquid film" *Brit.J.Appl.Mech.* 4 (1953) ,167.
- [3] G. D. Crapper, N. Dombrowski and G. A. D. Pyott, "Kelvin-Helmholtz wave growth on cylindrical sheets" *J.Fluid Mech.* 68 (1975) ,497.
- [4] J. H. Dumbleton and J. J. Hermans, "Capillary Stability of a Hollow Inviscid Cylinder" *Phys.Fluids* 13 (1970), 12.
- [5] T. Yoshinaga and K. Kotani, Lect.RIMS, Kyoto Univ.(2000),28 [in Japanese]
- [6] C. Mehring and W. A. Sirignano, "Axisymmetric capillary waves on thin annular liquid sheets" *Phys.Fluids* 12(2000) ,1417.
- [7] R. H. Rangel and W. A. Sirignano, *Phys.FluidsA*3(1991),2392.
- [8] J. I. Ramos, "Annular Liquid Jets: Formulation and Steady State Analysis" *ZAMM* 72(1992) ,565.
- [9] J. M. Kendall, "Experiment on annular liquid jet instability and on the formation of liquid shells" *Phys. Fluids* 29(1986) ,2086.