数理解析研究所講究録 1312 巻 2003 年 1-14

ヒルベルト空間の中の4個の部分空間の配置問題 II

九州大学大学院 数理学研究院 綿谷安男 (Yasuo Watatani)

甲子園大学 経営情報学部 榎本雅俊 (Masatoshi Enomoto)

$\boxed{1}$ 序. Gelfand-Ponomarev (1970) により, 有限次元 Hilbert空間上の既約な $(n \leq 4)$ 個の部分空間の順序付けられた組が, similar性を除いて, 完全に分類されている. 我々は, 彼らの結果を無限次元に拡張することを目標としている. さて, Gelfand-Ponomarevは, 何故このようなことを行なったのであろうか.

さて, 線形代数では, 一つの目指すべきこととして, 作用素をsimilar性を除いて, 分類をするということがある. このことの結果として, 作用素のJordan標準形を求めることがある.

一方，Hilbert空間 K 上の作用素には，$H=K\oplus K$ の subspaces $E_1=K\oplus(0)$, $E_2=(0)\oplus K$, $E_3=\text{graph}\,T=\{(x\oplus Tx)\mid x\in K\}$, $E_4=\{x\oplus x\mid x\in K\}$ の順序付けられたsystem $\mathcal{S}_T=(H;E_1,\cdots,E_4)$ が標準的に対応する。

また，2つの systems $\mathcal{S}=(H;E_1,\cdots,E_4)$ と $\mathcal{S}'=(H';E_1',\cdots,E_4')$ が similar であることを，ある可逆な作用素 $a:H\longrightarrow H'$ で，$a(E_i)=E_i'$ ($\forall i=1,\cdots,4$) と決めておく．このとき，

$$T\cong S\ (\text{similar}) \Longleftrightarrow \mathcal{S}_T\cong\mathcal{S}_S\ (\text{similar})$$

である。このように，$T\longrightarrow\mathcal{S}=(H;E_1,\cdots,E_4)$ と順序付けられた4つ組と対応させるならば，作用素の一般化を，Hilbert空間の中の4個の subspaces が，になっているといえよう。Gelfand-Ponomarevは，実際に，4つ組の分類を行う上で，operators に対応していない既約な4つ組が出現して来ることを示している。

ここで報告することは，無限次元のヒルベルト空間においても，operatorに対応しない既約な4つ組が存在することを示すことにある．

2 記号の準備と今までの結果の総括

定義2.1 H を Hilbert 空間，$E_1, \dots, E_n$ をその closed subspaces とする．このとき，順序付けられた組 $S = (H; E_1, \dots, E_n)$ を，n-subspace system という．

定義2.2 2つの n-subspace systems $S = (H; E_1, \dots, E_n)$ と $S' = (H'; E_1', \dots, E_n')$ が similar であることを，∃可逆 $a \in B(H, H')$ で，$a(E_i) = E_i'$ $(\forall i = 1, \dots, n)$ ということとする．

定義2.3 n-subspace system S が，decomposable であるとは，ある non zero n-subspace systems S_1, S_2 が存在して $S \cong S_1 \oplus S_2$ (similar) となることをいう．

定義2.4 S が indecomposable であるとは，S が decomposable ではないときをいう．

さて，Gelfand-Ponomarev (1970) は，有限次元 Hilbert 空間上のindecomposable n-subspace systems ($n \leqq 4$) の完全分類を以下のように行なった。

(1) $n=1$ のとき，$\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}; (0), \mathbb{C}), (\mathbb{C}; \mathbb{C})$

(2) $n=2$ のとき，$\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}; E_1, E_2)$, $E_i \cong (0)$ か $\mathbb{C}$ $(i=1,2)$.

(3) $n=3$ のとき，$\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}; E_1, E_2, E_3)$, $E_i \cong (0)$ か $\mathbb{C}$ $(i=1,2,3)$.

$$\mathcal{S} \cong \left(\mathbb{C}^2; \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

(4) $n=4$ のとき，defect $\rho(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{4} \dim E_i - 2\dim \mathcal{H}$ の値 $0, \pm 1, \pm 2$ により，E_i の添え字の順序を除いて，次のように分類される。

(4.1) 全体空間の次元が偶数であるとき，そのbaseを $e_1, \cdots, e_k, f_1, \cdots, f_k$ $(k=1,2,\cdots)$ とおく。

(4.1.a) $\rho(\mathcal{S}) = 0$ のとき，

parameter $\lambda \neq 0, 1$ をもつとき，

$E_1 = [e_1, \cdots, e_k]$, $E_2 = [f_1, \cdots, f_k]$, $E_3 = [e_1 + \lambda f_1, e_2 + f_1 + \lambda f_2, \cdots$

$\cdots, e_k + f_{k-1} + \lambda f_k]$, $E_4 = [e_1 + f_1, \cdots, e_k + f_k]$

parameter λ をもたないとき,

$E_1 = [e_1, \cdots, e_k]$, $E_2 = [f_1, \cdots, f_k]$, $E_3 = [e_1, (e_2 + f_1), \cdots, (e_k + f_{k-1})]$

$E_4 = [e_1 + f_1, \cdots, e_k + f_k]$.

(4.1.b) $\rho(\mathscr{S}) = -1$ のとき,

$E_1 = [e_1, \cdots, e_k]$, $E_2 = [f_1, \cdots, f_k]$,

$E_3 = [e_2 + f_1, \cdots, e_k + f_{k-1}]$, $E_4 = [e_1 + f_1, \cdots, e_k + f_k]$.

(4.1.c) $\rho(\mathscr{S}) = +1$ のとき,

$E_1 = [e_1, \cdots, e_k]$, $E_2 = [f_1, \cdots, f_k]$,

$E_3 = [e_1, (e_2 + f_1), \cdots, (e_k + f_{k-1}), f_k]$, $E_4 = [e_1 + f_1, \cdots, e_k + f_k]$.

(4.2) 全体空間の次元が奇数次元のとき,

その base を, $e_1, \cdots, e_{k+1}, f_1, \cdots, f_k$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ とおく.

(4.2.a) $\rho(\mathscr{S}) = 0$ のとき,

$E_1 = [e_1, \cdots, e_{k+1}]$, $E_2 = [f_1, \cdots, f_k]$,

$E_3 = [e_1, (e_2 + f_1), \cdots, (e_{k+1} + f_k)]$, $E_4 = [e_1 + f_1, \cdots, e_k + f_k]$.

(4.2.b) $\rho(\delta)=-1$ のとき,

$E_1=[e_1,\cdots,e_k,e_{k+1}]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_k]$,

$E_3=[e_2+f_1,\cdots,e_{k+1}+f_k]$, $E_4=[e_1+f_1,\cdots,e_k+f_k]$.

(4.2.c) $\rho(\delta)=+1$ のとき,

$E_1=[e_1,\cdots,e_k,e_{k+1}]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_k]$,

$E_3=[e_1,(e_2+f_1),\cdots,(e_{k+1}+f_k)]$, $E_4=[e_1+f_1,\cdots,e_k+f_k,e_{k+1}]$.

(4.2.d) $\rho(\delta)=-2$ のとき,

$E_1=[e_1,\cdots,e_k]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_k]$,

$E_3=[e_2+f_1,\cdots,e_{k+1}+f_k]$, $E_4=[e_1+f_2,\cdots,(e_{k-1}+f_k),(e_k+e_{k+1})]$.

(4.2.e) $\rho(\delta)=+2$ のとき,

$E_1=[e_1,\cdots,e_k,e_{k+1}]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_k,e_{k+1}]$,

$E_3=[e_1,(e_2+f_1),\cdots,(e_{k+1}+f_k)]$,

$E_4=[f_1,(e_1+f_2),\cdots,(e_{k-1}+f_k),(e_k+e_{k+1})]$.

このGelfand-Ponomarevの結果を,我々は一般次元の場合に拡張することを試みている.

今までに，以下のことを示して来ている．

(1) $n=1$ のとき，

無限次元は起きない．$\mathcal{S}\cong(\mathbb{C};(0)),(\mathbb{C};\mathbb{C})$ である．

(2) $n=2$ のとき，

無限次元は起きない．$\mathcal{S}\cong(\mathbb{C};E_1,E_2)$，$E_i\cong(0)$ か $\mathbb{C}$ $(i=1,2)$ である．

(3) $n=3$ のとき，

有限次元は，$\mathcal{S}\cong(\mathbb{C};E_1,E_2,E_3)$，$E_i\cong(0)$ か $\mathbb{C}$ $(i=1,2,3)$，

$\mathcal{S}\cong\left(\mathbb{C}^2;\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ であるが，

これ以外に，無限次元のものが存在するかどうかは未解決である．この問題は，もし P. Rosenthal の transitive lattice 問題が解ければ，肯定的に解決される．

(4) $n=4$ のとき，

このときには，Gelfand-Ponomarev の有限次元以外の例を構成することができる．ただし，それは，以下に述べる

operator systemsの枠の中のものであった。

定義2.5

$\mathcal{S}=(H;E_1,\cdots,E_4)$ が bounded operator system であるとは，次のものと添え字の順序を除いて，similarなものをいう。

$\exists$ Hilbert空間 K_1, K_2 と，$\exists S\in B(K_1,K_2)$, $\exists T\in B(K_2,K_1)$ が存在して，$H=K_1\oplus K_2$，$E_1=K_1\oplus(0)$，$E_2=(0)\oplus K_2$，$E_3=\{(x\oplus Sx)\mid x\in K_1\}$，$E_4=\{(Ty\oplus y)\mid y\in K_2\}$ と書ける。

定義2.6

$\mathcal{S}=(H;E_1,\cdots,E_4)$ が weak operator system であるとは，次のものと添え字の順序を除いて，similarなものをいう。

$\exists$ Hilbert空間 K_1, K_2 と，$\exists$densely defined closed operators $S: D(S)(\subset K_1)\longrightarrow K_2$，$T: D(T)(\subset K_2)\longrightarrow K_1$ が存在して，

$H=K_1\oplus K_2$，$E_1=K_1\oplus(0)$，$E_2=(0)\oplus K_2$，

$E_3=\{(x\oplus Sx)\mid x\in D(T)\}$，$E_4=\{(Ty\oplus y)\mid y\in D(T)\}$ と

書ける。

次に，Gelfand-Ponomarev が，有限次元 Hilbert 空間 indecomposable 4-subspace systems の分類の指標として導入した defect $\rho(\mathcal{S})$ を，無限次元に拡げる．

<u>定義 2.7</u>

4-subspace system $\mathcal{S}=(H; E_1,\cdots,E_4)$ で，

$\dim(E_i \cap E_j)<\infty$, $\dim(E_i^{\perp}\cap E_j^{\perp})<\infty$ $(\forall i,j=1,\cdots,4)$

となるものに対して，defect $\rho(\mathcal{S})$ を，

$$\rho(\mathcal{S})=\frac{1}{3}\Big(\sum_{i<j}\dim(E_i\cap E_j)-\dim(E_i^{\perp}\cap E_j^{\perp})\Big)$$

と定義する.

このとき，次が成立する。

<u>定理 2.8</u>

有限次元 Hilbert 空間上の 4-subspace system $\mathcal{S}$ に対して，我々の defect $\rho(\mathcal{S})$ と，Gelfand-Ponomarev の defect $\rho(\mathcal{S})$ は，一致する．

さて，このように無限次元に拡張した defect $\rho(S)$ について，次が成立している．

定理 2.9

defects の取り得る値 $\mathbb{Z}/3$ が，indecomposable bounded operator systems の defects の値として実現できる．

3 Non-weak operator systems

この節では，2 で定義した operator systems の枠から，はみ出る indecomposable 4-subspace systems が構成できることを示そう．これにより，標準的に operator に対応する 4-subspace systems とは異なるものが得られたことになる．勿論，困難な点は，得られた systems が，indecomposable であることを示す所にある．

例 3.1

$\alpha_i \geq M > 1$ $(i=1,2,\cdots)$，$K=\ell^2(\mathbb{N})$，$\{e_i\}_{i\geq 1}$ を K の通常の ONB とする．このとき，

$S_\alpha e_i = \alpha_i e_{i+1}$ on $K=\ell^2(\mathbb{N})$，$S e_i = e_{i+1}$ on $K=\ell^2(\mathbb{N})$

とおく．さらに，

$$T=\begin{pmatrix} S_\alpha^* & 1\\ 0 & S\end{pmatrix}$$

とおく．このとき，次の4-subspace system $\mathcal{S}$ を構成する．

$\widehat{K}=K\oplus K$, $H=\widehat{K}\oplus\widehat{K}$, $E_1=\widehat{K}\oplus(0)$, $E_2=(0)\oplus\widehat{K}$,

$E_3=\mathrm{graph}\,T+\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\e_1\end{pmatrix}$, $E_4=\left\{(x\oplus x)\,\middle|\,x\in\widehat{K}\right\}$.

このとき，$\mathcal{S}=(H;E_1,\dots,E_4)$ は，indecomposable, non-weak operator systems である．その defect $\rho(\mathcal{S})$ の値は1である．これは，最初の non-weak operator systems で，indecomposable systems の例である．強調すべきことは，indecomposable を示すのが困難なことである．これは，Jordan form の Jumping 現象とも関連していると思われる．さて，次に，問題になることは，indecomposable non-weak operator systems で，defects の値は，すべて実現されるのかということである．これについては，以下の部分的解答を報告しておく．

$K=\ell^2(\mathbb{N})$とおく．$\alpha_1(k), \alpha_2(k)$を以下のようにおく．

$$\alpha_1(k)=\begin{cases} 2\left(\frac{k+1}{k}\right)^{1/2} & (1\leqq k\leqq n_1),\ (n_2+1\leqq k\leqq n_3),\ \cdots \\ 2 & (n_1+1\leqq k\leqq n_2),\ (n_3+1\leqq k\leqq n_4),\ \cdots \end{cases}$$

$$\alpha_2(k)=\begin{cases} 2 & (1\leqq k\leqq n_1),\ (n_2+1\leqq k\leqq n_3),\ \cdots \\ 2\left(\frac{k+1}{k}\right)^{1/2} & (n_1+1\leqq k\leqq n_2),\ (n_3+1\leqq k\leqq n_4),\ \cdots \end{cases}$$

上記の$\{n_i\}_{i\geq 1}$を，次となるように決める．

$$\prod_{k=1}^{n_i}\frac{\alpha_1(k)}{\alpha_2(k)}=\begin{cases} > i & (i=\text{奇数}) \\ < \frac{1}{i} & (i=\text{偶数}) \end{cases}$$

これを利用して，($i\geqq 3$として)，

$$\alpha_i(k)=\begin{cases} 2\left(\frac{1+k}{k}\right)^{1/2+1/4+\cdots+1/2^{i-1}} & (1\leqq k\leqq n_1),\ (n_2+1\leqq k\leqq n_3),\ \cdots \\ 2\left(\frac{k}{1+k}\right)^{1/2+1/4+\cdots+1/2^{i-1}} & (n_1+1\leqq k\leqq n_2),\ (n_3+1\leqq k\leqq n_4),\ \cdots \end{cases}$$

とおく。

これを用いて，

$$W_i(k)=\alpha_{i+2}(k)\ (i\geqq 1)$$

とおく。

この $\{W_i(k)\}_{k\geqq 1}$ を用いて，unilateral weighted shift $S_{W_i}\ (i\geqq 1)$ を考える。このとき，

$$T=\begin{pmatrix} S_{W_1}^{*} & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & S_{W_n}^{*} & 1 \\ 0 & & & S \end{pmatrix}$$

とおく。これを使って，

$$\hat{K}=\overbrace{K\oplus K\oplus\cdots\oplus K}^{(n+1)\text{個}},\quad H=\hat{K}\oplus\hat{K},\quad E_1=\hat{K}\oplus(0),$$

$$E_2=(0)\oplus\hat{K},\quad E_3=\mathrm{graph}\,T+\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ e_1\end{pmatrix},$$

$$E_4=\{x\oplus x \mid x\in\hat{K}\}.$$

このとき，$\mathcal{S}=(H;E_1,\cdots,E_4)$ は，indecomposable であり，non-weak operator systems であり，defect $\rho(\mathcal{S})$ は，$\frac{2n+1}{2}$ である。

参考文献

[EW] 榎本雅俊, 綿谷安男：ヒルベルト空間の中の4個の部分空間の配置問題, 京都大学数理解析研究所講究録(2002年2月) 1250, 51–71

[W] Y. Watatani: Relative positions of four subspaces in a Hilbert space and subfactors, (to appear in a conference report).

[GP] I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev: Problems of linear algebra and classification of quadruples of subfactors in a finite dimensional vector space, Coll. Math. Soc. Ianos Bolyai 5, Hilbert space operators, Tihany (Hungary) 1970, 163–237 (in English).