数理解析研究所講究録 1312 巻 2003 年 93-99

ALGEBRAICALLY PARANORMAL OPERATOR と WEYL の定理

東北薬科大学　棚橋　浩太郎 (Kôtarô Tanahashi)
Tohoku Pharmaceutical University
仙台電波高専　内山　敦 (Atsushi Uchiyama)
Department of Mathematics, Sendai National College of Technology
California State University　Jun Ik Lee
Department of Mathematics, California State University

概要

Let T be a bounded linear operator on a complex Hilbert space $\mathcal{H}$. T is called algebraically paranormal if there exists a nonconstant polynomial $q(z)$ such that $q(T)$ is paranormal, i.e., $\|q(T)x\|^2 \leq \|q(T)^2x\|\|x\|$ for $x \in \mathcal{H}$. In this paper, we prove that Weyl's theorem holds for algebraically paranormal operators and spectral mapping theorem holds for the Weyl spectrum of algebraically paranormal operators.

1 Introduction

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体を $B(\mathcal{H})$ とおく。作用素 $T \in B(\mathcal{H})$ が algebraically paranormal とは、定数でない多項式 $q(z)$ が存在して $q(T)$ が paranormal になること、つまり、

$$\|q(T)x\|^2 \leq \|q(T)^2x\|\|x\|, \quad x \in \mathcal{H}$$

となることをいう。

作用素 T の値域を $R(T)$, null space を $N(T)$ とかく。作用素 T が Fredholm とは、値域 $R(T)$ が closed で、$\dim N(T) < \infty, \dim N(T^*) = \dim R(T)^\perp < \infty$ となるときをいい、このとき、$\mathrm{ind}\, T = \dim N(T) - \dim R(T)^\perp$ を T の index という。特に $\mathrm{ind}\, T = 0$ のとき T を Weyl という。T の essential spectrum $\sigma_e(T)$, Weyl spectrum $\sigma_w(T)$ を

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ is not Fredholm }\},$$
$$\sigma_w(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ is not Weyl }\}.$$

と定める。一般に $\emptyset \neq \sigma_e(T) \subset \sigma_w(T) \subset \sigma(T)$ が成立する。重複度有限の固有値を $\pi_{00}(T)$ とかく。Weyl の定理が T について成立するとは

$$\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T)$$

となるときをいう。H. Weyl [20] は self-adjoint operator の compact perturbation を調べてこの関係式が self-adjoint operator について成立することを示した。この後、もっと広いクラスの作用素についても Weyl の定理が成立することが多くの研究者によって示された。例えば L.A. Coburn [4] は hyponormal operator, M. Cho, M. Ito, S. Oshiro [2] はp-hyponormal operator, M. Cho, K. Tanahashi [3] は log-hyponormal operator, A. Uchiyama [19] は paranormal operator, I.H. Jeon, B.P. Duggal [12] は class A operator, Y.M. Han, J.I. Lee, D. Wang [10] はw-hyponormal operator, Y.M. Han, W.Y. Lee [9] は algebraically hyponormal operator について示した。

ここでは Weyl の定理が algebraically paranormal operator について成立することを示す。

2 [結果]

次の補題が Key Lemma である。

[補題 1] $T \in B(\mathcal{H})$ は paranormal で $\lambda \in \sigma(T)$ を固有値とする。ここで

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & A \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = N(T-\lambda) \oplus \overline{R(T-\lambda)^*}$$

と表すと $N(B-\lambda) = \{0\}$ である。さらに $\lambda \neq 0$ ならば $AB = \lambda A$ で、任意の単位ベクトル $x \in \overline{R(T-\lambda)^*}$ に対して

$$\|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 \leq \|B^2 x\|$$

が成り立つ。よって $T-\lambda$ は finite ascent である。

[定義] 作用素 $T \in B(\mathcal{H})$ が finite ascent とは $N(T^m) = N(T^{m+1})$ となる自然数 m が存在するときをいう。また finite descent とは $R(T^m) = R(T^{m+1})$ となる自然数 m が存在するときをいう。

[定理 2] $T \in B(\mathcal{H})$ が paranormal ならば任意の複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$N(T-\lambda) = N((T-\lambda)^2)$$

が成り立つ。

[証明] $N((T-\lambda)^2) \subset N(T-\lambda)$ を示せばよい。
$\lambda = 0$ の場合を示す。$T^2 x = 0$ なら

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2 x\| \|x\| = 0$$

である。よって $Tx = 0$ である。

$\lambda \neq 0$ の場合を示す。もし λ が T の固有値でないなら、$N(T-\lambda)=\{0\}$ であるから $N((T-\lambda)^2)=\{0\}$ となる。λ が T の固有値とする。$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in N((T-\lambda)^2)$ とすると補題1から

$$T=\begin{pmatrix} \lambda & A \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad N(T-\lambda)\oplus\overline{R(T-\lambda)^*}$$

と分解できる。すると

$$\begin{aligned}(T-\lambda)^2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & B-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & B-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & AB-\lambda A \\ 0 & (B-\lambda)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (B-\lambda)^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

より $(B-\lambda)^2 v=0$ である。ここで $N(B-\lambda)=\{0\}$ なので $(B-\lambda)v=0$、よって $v=0$ となる。従って

$$(T-\lambda)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & B-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。

[定理 3] $T \in B(\mathcal{H})$ が algebraically paranormal ならば $T-\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ は finite ascent である。

[証明] 仮定より $q(T)$ が paranormal となる non-constant polynomial $q(z)$ が存在する。ここで

$$q(z)-q(\lambda)=a(z-\lambda)^m\Pi_{j=1}^n(z-\lambda_j), a\neq 0, 1\leq m, \lambda_j \neq \lambda$$

と分解すると

$$q(T)-q(\lambda)=a(T-\lambda)^m\Pi_{j=1}^n(T-\lambda_j)$$

である。

$$N((T-\lambda)^{m+1})\subset N((T-\lambda)^m)$$

を示せばよい。

$x\in N((T-\lambda)^{m+1})$ とすると

$$\begin{aligned}(q(T)-q(\lambda))x &= a(T-\lambda)^m\Pi_{j=1}^n(T-\lambda+\lambda-\lambda_j)x \\ &= a\Pi_{j=1}^n(\lambda-\lambda_j)(T-\lambda)^m x.\end{aligned}$$

であるから

$$(q(T)-q(\lambda))^2x=a^2\Pi_{j=1}^n(\lambda-\lambda_j)^2(T-\lambda)^{2m}x=0$$

となる。よって定理２より

$$x \in N((q(T) - q(\lambda))^2) = N(q(T) - q(\lambda))$$

である。従って

$$(q(T) - q(\lambda))x = a\Pi_{j=1}^{n}(\lambda - \lambda_j)(T - \lambda)^m x = 0$$

であるから

$$x \in N((T - \lambda)^m)$$

となる。

[定理 4] $T \in B(\mathcal{H})$ が algebraically paranormal で $\sigma(T) = \{\lambda\}$ ならば $T - \lambda$ は nilpotent である。

[証明] 仮定より $q(T)$ が paranormal となる non-constant polynomial $q(z)$ が存在する。

$$q(z) - q(\lambda) = a(z - \lambda)^m \Pi_{j=1}^{n}(z - \lambda_j), a \neq 0, 1 \leq m, \lambda_j \neq \lambda$$

と分解すると

$$q(T) - q(\lambda) = a(T - \lambda)^m \Pi_{j=1}^{n}(T - \lambda_j)$$

となる。ここで $\sigma(q(T)) = q(\sigma(T)) = \{q(\lambda)\}$ なので $q(T) - q(\lambda)$ は quasinilpotent である。よって [11] より

$$0 = q(T) - q(\lambda) = a(T - \lambda)^m \Pi_{j=1}^{n}(T - \lambda_j)$$

となる。従って $(T - \lambda)^m = 0$ である。

[定理 5] Weyl の定理が algebraically paranormal operator について成立する。

[証明] $T \in B(\mathcal{H})$ は algebraically paranormal で $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$ とする。すると $T - \lambda$ は Weyl で not invertible である。

λ が $\sigma(T)$ の内点なら、$\lambda \in G \subset \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$ となる open set G が存在する。よって $\dim N(T - \mu) > 0, \forall \mu \in G$ となり [7, Theorem 9] から T は single valued extension property をもたない。しかし [13] より T が finite ascent なら single valued extensinon property をもつのでこれは矛盾である。よって λ は $\sigma(T)$ の境界点としてよい。すると [5, Theorem XI 6.8] から λ は $\sigma(T)$ の孤立点になる。よって $\lambda \in \pi_{00}(T)$ である。

逆に $\lambda \in \pi_{00}(T)$ とする。E_λ を λ の Reisz idempotent とすると $0 < \dim N(T - \lambda) < \infty$ である。ここで

$$T = T|E_\lambda \mathcal{H} \oplus T|(I - E_\lambda)\mathcal{H},$$

$$\sigma(T|E_\lambda \mathcal{H}) = \{\lambda\}, \sigma(T|(I - E_\lambda)\mathcal{H}) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}$$

と分解する。仮定より $q(T)$ が paranormal となる nonconstant polynomial $q(z)$ が存在する。ここで

$$q(T) = q(T)|E_\lambda\mathcal{H} \oplus q(T)|(I - E_\lambda)\mathcal{H}$$

となるが $q(T)|E_\lambda\mathcal{H} = q(T|E_\lambda\mathcal{H})$ は paranormal である。従って $T|E_\lambda\mathcal{H}$ も algebraically paranormal となるから定理4より $(T|E_\lambda\mathcal{H} - \lambda)^m = 0$ となる正の整数 m が存在する。よって

$$\begin{aligned}\dim E_\lambda\mathcal{H} &\leq \dim N((T|E_\lambda\mathcal{H} - \lambda)^m)\\ &\leq \dim N((T-\lambda)^m)\\ &\leq m \dim N(T-\lambda) < \infty\end{aligned}$$

である。従って E_λ は finite rank で [5, Proposition XI 6.9] より $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$ である。

[定理 6] $T \in B(\mathcal{H})$ が algebraically paranormal で $f(z)$ が $\sigma(T)$ を含む開集合で analytic ならば $\sigma_w(f(T)) = f(\sigma_w(T))$ となる。

[証明] [8, Theorem 2(b)] より $\sigma_w(f(T)) \subset f(\sigma_w(T))$ は示されているので逆を示せばよい。f は nonconstant としてよい。さて $\lambda \notin \sigma_w(f(T))$ として

$$f(z) - \lambda = g(z)\Pi_{j=1}^n (z - \lambda_j)$$

と分解する。ただし $\lambda_j \in G, g(z) \neq 0, \forall z \in G$ である。すると

$$f(T) - \lambda = g(T)\Pi_{j=1}^n (T - \lambda_j)$$

となるが $\lambda \notin \sigma_w(f(T)), \sigma_e(f(T)) \subset \sigma_w(f(T))$ なので $\lambda \notin \sigma_e(f(T)) = f(\sigma_e(T))$ である。従って $T - \lambda_j$ は Fredholm $(j = 1, \cdots, n)$ である。よって

$$\begin{aligned}0 = \text{ind }(f(T) - \lambda) &= \text{ind }(g(T)) + \sum_{j=1}^n \text{ind }(T - \lambda_j)\\ &= \sum_{j=1}^n \text{ind }(T - \lambda_j)\end{aligned}$$

となる。ここで ind $(T - \lambda_j) \leq 0$ を示す。もし $T - \lambda$ が finite descent なら [17, Theorem V 6.2] から ind $(T - \lambda_j) = 0$ である。また、$T - \lambda_j$ が finite descent でないならば

$$n \text{ ind }(T - \lambda_j) = \dim N(T - \lambda_j)^n - \dim R((T - \lambda_j)^n)^\perp \to -\infty$$

より ind $(T - \lambda_j) < 0$ である。

従って ind $(T - \lambda_j) = 0, (j = 1, \cdots, n)$ である。よって $T - \lambda_j$ は Weyl で $\lambda_j \notin \sigma_w(T)$ となる。よって $\lambda \notin f(\sigma_w(T))$ である。

[定理 7] Algebraically paranormal operatror は isoloid である。つまり、$\sigma(T)$ の孤立点は固有値である。

[証明] $T \in B(\mathcal{H})$ は algebraically paranormal とする。λ は $\sigma(T)$ の孤立点とし、E_λ を λ の Riesz idempotent とする。ここで

$$T = T|E_\lambda \mathcal{H} \oplus T|(I - E_\lambda)\mathcal{H}$$

と分解すると

$$\sigma(T|E_\lambda \mathcal{H}) = \{\lambda\}, \sigma(T|(I - E_\lambda)\mathcal{H}) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}$$

である。さて $T|E_\lambda \mathcal{H}$ も algebraically paranormal なので $(T|E_\lambda \mathcal{H} - \lambda)^m = 0$ となる自然数 m が存在する。よって

$$E_\lambda \mathcal{H} \subset N((T|E_\lambda \mathcal{H} - \lambda)^m) \subset N((T - \lambda)^m)$$

となる。従って $N((T - \lambda)^m) \neq \{0\}$ なので $N(T - \lambda) \neq \{0\}$ である。よって λ は T の固有値である。

[定理 8] $T \in B(\mathcal{H})$ が algebraically paranormal で $f(z)$ が $\sigma(T)$ を含む開集合で analytic ならば Weyl の定理が $f(T)$ について成立する。

[証明] 定理 7 より T は isoloid である。よって [14] より

$$f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)) = \sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T))$$

となる。また、定理 5, 6 より

$$f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)) = f(\sigma_w(T)) = \sigma_w(f(T))$$

となる。従って Weyl の定理が $f(T)$ について成立する。

参考文献

[1] S. K. Berberian, *An extension of Weyl's theorem to a class of not necessary normal operators,* Michigan Math. J., **16** (1969), 273–279.

[2] M. Chō, M. Ito and S. Oshiro, *Weyl's theorem holds for p-hyponormal operators,* Glasgow Math. J., **39** (1997), 217–220.

[3] M. Chō and K. Tanahashi, *Spectral properties of log-hyponormal operators,* Scientiae Mathematicae, **2** (1999), 1–8.

[4] L. A. Coburn, *Weyl's theorem nonnormal operators,* Michigan Math. J., **13** (1966), 285–288.

[5] J. B. Conway, A Course in Functional Analysis 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1990.

[6] B. P. Duggal, *The Weyl spectrum of p-hyponormal operators,* Integr. Equa. Oper. Theory, **29** (1997), 197–201.

[7] J. K. Finch, *The single valued extension property on a Banach space,* Pacific J. Math., **58** (1975), 61–69.

[8] G. Gramsch and D. Lay, *Spectral mapping theorems for essential spectra,* Math. Ann., **192** (1971), 17–32.

[9] Y. M. Han and W. Y. Lee, *Weyl's theorem holds for algebraically hyponormal operators,* Proc. Amer. Math. Soc., **128** (2000), 2291–2296.

[10] Y. M. Han, J.I. Lee and D. Wang, *Reisz idempotnt and Weyl's theorem for w-hyponormal operators,* Integr. Equa. Oper. Theory, (to appear)

[11] V. Istratescu, T. Saitō and T. Yoshino, *On a class of operators,* Tôhoku Math. J., **18** (1966), 410–413.

[12] I. H. Jeon and B. P. Duggal, *On operators with an absolute value condition,* preprint.

[13] K. B. Laursen, *Operators with finite ascent,* Pacific J. Math., **152** (1992), 323–336.

[14] W. Y. Lee and S. H. Lee, *A spectral mapping theorem for the Weyl spectrum,* Glasgow Math. J., **38** (1996), 61–64.

[15] V. Rakočević, *Approximate point spectrum and commuting compact perturbations,* Glasgow Math. J., **28** (1986), 193–198.

[16] F. Riesz and B. Sz. Nagy, Functional Analysis, Frederick Ungar, New York, 1955.

[17] A. E. Taylor and D. C. Lay, Introduction to Functional Analysis 2ed, Krieger, Florida, 1980.

[18] A. Uchiyama and T. Yoshino, *Weyl's theorem for p-hyponormal or M-hyponormal operators,* Glasgow Math. J., **43** (2001), 375–381.

[19] A. Uchiyama, *On the isolated points of spectrum of paranormal operators,* preprint.

[20] H. Weyl, *Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollsteig ist,* Rend. Circ. Mat. Palermo, **27** (1909), 373–392.