数理解析研究所講究録 1314 巻 2003 年 102-117

対数微分の補題のDiophantus類似に向けて

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 日向隆幸 (Takayuki Hyuga)
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1 序

Vojta は [V1] において Nevanlinna 理論と Diophantus 近似論の結果の類似性を見い出し, 2 つの理論を結ぶ「辞書」を提起した.

Nevanlinna の第 2 主要予想は以下の通りである (例えば [L]).

予想 1.1 (第 2 主要予想). X を $\mathbb{C}$ 上定義された非特異射影代数多様体, D を X 上の単純正規交叉因子とし, E を X 上の任意の豊富直線束とする. このとき, 任意の正数 ϵ に対して X の代数的真部分集合 $Z=Z(X,D,E,\epsilon)$ が存在して, $f(\mathbb{C})\not\subset D$ なる任意の正則曲線 $f:\mathbb{C}\to X$ に対し, 次のいずれかが成り立つ.

(i) $f(\mathbb{C})\subset Z$ の意味で正則曲線 f は代数的に退化する.

(ii) 第 *2* 主要定理型不等式

$$m_{f,D}(r)+T_{f,K_X}(r)+N_{f,\mathrm{Ram}}(r)\leq\epsilon T_{f,E}(r)// \tag{1}$$

が成り立つ.

ここで記号//は, 不等式が測度有限の Borel 集合の例外を除いて成り立つことを意味する. また, 分岐個数関数 $N_{f,\mathrm{Ram}}(r)$ は定義も込めて予想である.

次の場合は, この予想が成り立つ場合としてよく知られている.

定理 1.2 (第 2 主要定理). *(i)* X がコンパクト *Riemann* 面のとき, $Z=\emptyset$ として第 *2* 主要予想は成り立つ. *([N])*

(ii) X が $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ で, D が一般の位置にある超平面配置のとき, 不等式 *(1)* において, $N_{f,\mathrm{Ram}}(r)$ の項がない場合には, Z を有限個の線型部分空間として第 *2* 主要予想は成り立つ. $N_{f,\mathrm{Ram}}(r)$ の項がある場合には f が線型非退化であることが必要で, この場合 Z が有限個の線型部分空間からなるかどうかは分からない. *([A],[C],[V2,3])*

(iii) X が *Abel* 多様体で, D が任意の因子のとき, $Z=\emptyset$ として第 *2* 主要予想は成り立つ. *([K2],[NWY],[SY])*

Vojta[V1] は, 第 2 主要予想の Diophantus 類似を次の如く予想した.

予想 1.3 (Vojta 予想). S は数体 k の付値の有限集合で, 全てのアルキメデス的付値を含んでいるとする. X は k 上定義された非特異射影多様体, D を X 上の単純正規交叉因子とし, E を X 上の任意の豊富直線束とする. このとき, 任意の正数 ϵ に対して X の代数的真部分集合 $Z = Z(X, D, E, \epsilon, S)$ が存在して, 任意の $P \in (X \setminus Z)(k)$ に対し,

$$m_{D,S}(P) + h_{K_X}(P) \leq \epsilon h_E(P) + O_\epsilon(1)$$

が成り立つ.

次の場合は, この予想が成り立つ場合としてよく知られている.

(i) $X = \mathbb{P}^1, k = \mathbb{Q}$ のとき.

定理 1.4 (Roth の定理 [R]). $\alpha \in \mathbb{R}$ を有理数でない代数的数とする. このとき任意の正数 ϵ に対し

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < q^{-(2+\epsilon)}$$

を満たす有理数 p/q は有限個に限る.

(ii) $X = \mathbb{P}^n, k = \mathbb{Q}$ のとき.

定理 1.5 (Schmidt の部分空間定理 [Sch]). $L_0, \ldots, L_n$ を $n+1$ 変数の代数的数を係数にもつ線型独立な線型形式 $L_i(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^n a_i X_i$ とする. 任意の正数 ϵ に対し,

$$|L_0(\mathbf{x}) \cdots L_n(\mathbf{x})| < |\mathbf{x}|^{-\epsilon}$$

を満たす $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ が $T_1 \cup \cdots \cup T_h$ に含まれるような $\mathbb{Q}^{n+1}$ の有限個の線型部分空間 $T_1, \ldots, T_h$ が存在する.

(iii) X が Abel 多様体のときは, Faltings の定理 [Fa] として知られている.

Nevanlinna の第 2 主要定理を証明するために, 最も重要な補題が対数微分の補題である. ここでは山ノ井によって高次元へ一般化された形で述べる.

定理 1.6. X を $\mathbb{C}$ 上定義された非特異射影代数多様体, $Z = V(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$ を X の任意の真部分スキーム, k を任意の非負整数とする. このとき $f(Z) \not\subset \mathrm{Supp}(Z)$ なる任意の正則曲線 $f: \mathbb{C} \to X$ に対し

$$m_{f,Z}(r) \leq m_{f^{(k)},Z^{(k)}}(r) + O(\log^+(rT_f(r)))// \tag{2a}$$

$$m_{f^{(k)},S_\infty}(r) \leq O(\log^+(rT_f(r)))// \tag{2b}$$

が成り立つ. ここで, $f^{(k)}: \mathbb{C} \to J_k(X)$ は正則曲線 f の第 k-ジェットリフト, $Z^{(k)}$ は部分スキーム Z の第 k-ジェット空間, 即ち $Z^{(k)} = V(\sigma_1, \cdots, \sigma_r, d\sigma_1, \cdots, d\sigma_r, \cdots, d^k\sigma_1, \cdots, d^k\sigma_r)$ で与えられる.

まとめると, 非特異射影代数多様体 X の場合においては

	Nevanlinna 理論	Diophantus 近似論
対数微分の補題	定理 1.7	♠
第 2 主要定理	第 2 主要予想 1.1	Vojta 予想 1.3

という関係になっており, 本稿の目的は上の表の ♠ にあたるものが何なのかを考えることにある.

$X=\mathbb{P}^n$ における ♠ として, Vojta の辞書 [V1] の Theorem6.4.3 及び Theorem6.6.1 がある. 本稿においては制限付きの場合である $X\subset\mathbb{P}^N$ への一般化したものとして次の定理を述べる.

定理 1.7. X は数体 k 上定義された n 次元非特異射影多様体で $\mathbb{P}^N(k)$ に埋め込まれているとする. $[\mathbf{x}]\in X$ に対し, $v_0:=\mathbf{x}\in\mathcal{O}_{k,S}^{N+1}$ とおく. $\mathcal{O}_{k,S}^{N+1}$ の基底 $v_0,v_1,\ldots,v_{N-n},\ldots,v_N$ を $\langle v_0,v_1,\ldots,v_{N-n}\rangle_k$ が $[\mathbf{x}]$ において $T_{[\mathbf{x}]}X$ と横断的になるように選ぶ.

$\mathbf{b}_0,\ldots,\mathbf{b}_q$ を k^{N+1} の一般の位置にあるとし, ϵ を任意の正数とする. また $V:=v_0\wedge\ldots\wedge v_{N-n}$ とおき, 更に $v_1,\ldots,v_{N-n}$ は後述する条件 *4.2* を満たしているものとする.

このとき, 次のような性質をもつ部分集合 $\mathcal{S}\subset k^{N+1}$ を考える.

(性質) 「$\mathbf{x}\notin k\mathcal{S}$ ならば

$$\mathbf{x}'\wedge V\neq 0$$

かつ, もし $\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}_i\neq 0$ ならば

$$\sum_{v\in S}\log\frac{\|(\mathbf{x}'\wedge V)\cdot\mathbf{b}_i\|_v}{\|V\|_v\|\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}_i\|_v}\leq\epsilon\log\overline{H}(\mathbf{x})\quad(0\leq i\leq q)\tag{3}$$

であり, もし $\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}_i=0$ ならば $\mathbf{x}'\cdot\mathbf{b}_i=0$ であるような $\mathbf{x}'\in\mathcal{O}_{k,S}^{N+1}$ が存在する」

この性質を持つような部分集合 $\mathcal{S}$ は有限集合である[1].

ここで, 不等式 (3) の左辺の分子にある $\cdot$ は内部積であり, また, $\|\cdot\|_v$ は正規付値をとらなければならない. 更に $\mathbf{x}\in\mathcal{O}_{k,S}^{N+1}$ に対し, $\overline{H}(\mathbf{x}):=\prod_{v\in S}\|\mathbf{x}\|_v$ (これは一種の高さである. $\overline{H}(\mathbf{x})=H(\mathbf{x})$ となる $\mathbf{x}$ を S-既約とでも呼びたいところ) とおく.

上の定理において, $N=n, V=\mathbf{x}\in k^{n+1}$ とすれば [V1,Theorem6.4.3] になる.

不等式 (3) は

$$m_{H,S}(P)\leq m_{H^{(1)},S}(P^{(1)})+\epsilon h(P)//$$

と読み替えるべきもので, つまり Diophantus における "対数微分の補題" は

「P が H に近いとき, $H^{(1)}$ に近い $P^{(1)}$ が存在する」

という $P^{(1)}$ の存在定理であり, この存在を云うのが第 3 節以降に述べる

$$T_{[\mathbf{x}]}X\simeq k^{N+1}\wedge v_0\wedge v_1\wedge\ldots\wedge v_{N-n}$$

上における逐次最小の理論である.

---

[1] 定理の陳述で S (付値の集合) と $\mathcal{S}$ (k^{N+1} の部分集合) や, v (付値) と $v_0,\ldots,v_N$ など同じような記号が使われているが, それぞれ別のものであることに留意して読むこと.

2 Diophantus の Nevanlinna 用語への翻訳 (Vojta の辞書)

Nevanlinna 理論に倣って Diophantus 近似論にも基本関数を導入する.

定義 2.1. k を代数体とする. また, M_k を k の付値全体の集合とする. $\mathbf{x} = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k)$ に対し,

$$H_k(\mathbf{x}) := \prod_{v \in M_k} \max\{\|x_0\|_v, \ldots, \|x_n\|_v\}$$

とおき $\mathbf{x}$ の**高さ (height)** と呼ぶ. また

$$h(\mathbf{x}) := \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \log H_k(\mathbf{x})$$

とおき $\mathbf{x}$ の**対数的高さ (logarithmic height)** と呼ぶ. 対数的高さは数体 k に依らない.

注意 2.2. この「対数的高さ」が *Nevanlinna* の特性関数 $T_f(r)$ の翻訳物だと考える. *(だから逆に* $T_f(r)$ を「高さ関数」と呼ぶこともある*)*

注意 2.3. 「高さ」は数論的な複雑さを表している. 「高さ」を導入する一つの理由として, 次の定理を挙げておく.

定理 2.4 (Northcott の定理). 任意の数 $c > 0, d \geq 1$ に対して, 集合

$$\{P \in \mathbb{P}^n(k); H_k(P) \leq c, [k:\mathbb{Q}] \leq d\}$$

は有限集合である

定義 2.5. S は M_k の有限部分集合で, 全てのアルキメデス的付値を含んでいるとする. 代数的数を係数とする線型形式 $L(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{n} a_i X_i$ に対し, この線型形式に対応する $\mathbb{P}^n(k)$ 内の超平面を H とする. このとき $P \in \mathbb{P}^n(k)$ に対し

$$m_{H,S}(P) := \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in S} \log \frac{\|\mathbf{x}\|_v}{\|L(\mathbf{x})\|_v},$$

$$N_{H,S}(P) := \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \sum_{v \notin S} \log \frac{\|\mathbf{x}\|_v}{\|L(\mathbf{x})\|_v}$$

とおき, それぞれ Nevanlinna 理論に倣って **"接近関数"**, **"個数関数"** と呼ぶことにする. (Nevanlinna 理論の用語を流用する場合は " " をつけて表すことにする.)

以下煩雑さを避けて S を省略して m_H, N_H などと書く.
これらは $P \in \mathbb{P}^1(k)$ のとき, $x = x_1/x_0$ と書くと

$$h(P) = \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_k} \log^+ \|x\|_v,$$

$$m_a(P) = \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in S} \log^+ \left\| \frac{1}{x-a} \right\|_v,$$

$$N_a(P)=\frac{1}{[k:\mathbb{Q}]}\sum_{v\notin S}\log^+\left\|\frac{1}{x-a}\right\|_v$$

のことになり, Vojta の辞書 [V1, p.34] と一致する. そこで Nevanlinna 理論の Jensen の公式

$$\log|c_\lambda|=\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\phi})|\frac{d\phi}{2\pi}+N_{f,(\infty)}(r)-N_{f,(0)}(r)$$

(但し, $f(z)=c_\lambda z^\lambda+\cdots$ とおいた) を上の記号にあてはめてみると, 左辺は意味不明であるが右辺は次に翻訳できる.

$$\sum_{v\in S}\log\|x\|_v+\sum_{v\notin S}\log^+\|x\|_v-\sum_{v\notin S}\log^+\left\|\frac{1}{x}\right\|_v=\sum_{v\in M_k}\log\|x\|_v.$$

ところが積公式によれば $\sum_{v\in M_k}\log\|x\|_v=0$ であるので, 意味不明だった左辺を "0" と翻訳すれば Jensen の公式の Diophantus 類似は積公式であると理解できる. 積公式により, 次の定理が直ちに従う.

定理 2.6 (height の性質="第 1 主要定理"). $P\in\mathbb{P}^n(k)$ に対し

$$h(P)=m_H(P)+N_H(P)+O(1).$$

以上の記号を用いると, Schmidt の部分空間定理 (定理 1.5) は次のように第二主要定理型の不等式をもって表すことができる.

定理 2.7 (Schmidt の部分空間定理="第 2 主要定理"). $H_0,\dots,H_q$ を $\mathbb{P}^n(k)$ 内の一般の位置にある超平面とし, $D=\sum_{i=0}^q H_i$ とする. $\forall\epsilon>0$ に対し, 有限個の超平面の和 $\bigcup T_\alpha$ が存在して $P\in\mathbb{P}^n(k)-\bigcup T_\alpha$ に対し,

$$m_D(P)\le(n+1+\epsilon)h(P)+O(1).$$

3 数の幾何

定理 1.7 を述べるために数の幾何の逐次最小の理論を説明したい.

まず "普通の" 逐次最小の理論から始める.

C を $\mathbb{R}^n$ 内の原点対称な凸体, Λ を n 次元の格子とし, それぞれの体積を $2^nV, d(\Lambda)$ とおく.

定義 3.1. $\lambda\in\mathbb{R}$ に対し, $\lambda C\cap\Lambda$ が少なくとも i 個の線型独立な元をもつならば, このような λ のうち最小のものを λ_i で表し, Λ の C に関する ***i*-逐次最小 (*i*-th successive minima)** と呼ぶ.

有名な Minkowski の定理は

定理 3.2 (Minkowski の第一凸体定理). 体積 $2^n d(\Lambda)$ 以上の原点対称な $\mathbb{R}^n$ 内の凸体は少なくとも *1* つの原点でない格子点を含む.

であるが, 逐次最小の言葉で書けば

$$\lambda_1^n V \leq d(\Lambda)$$

と "一言で" 述べられる.

実は, 更に強い評価ができ,

定理 3.3 (Minkowskiの第二凸体定理 [Sch, p.81]).

$$\frac{d(\Lambda)}{n!} \leq \lambda_1 \cdots \lambda_n V \leq d(\Lambda).$$

が成り立つ.

以上をふまえて, 数体 k の場合の逐次最小の理論を述べる. $d := [k : \mathbb{Q}]$ とおく.

定義 3.4. 各 $v \in S$ に対し, $L_{v,i}$ $(1 \leq i \leq n)$ を k 係数 k^n 上の線型独立な線型形式, $A_{v,i}$ を $\prod_{i=1}^n A_{v,i} = 1$ を満たす正の実数とする.

$$l(\mathbf{x}) := \left[\prod_{v\in S} \max_{1\leq i\leq n} A_{v,i} \|L_{v,i}(\mathbf{x})\|_v\right]^{1/d}$$

とおき**長さ関数 (length function)** と呼ぶ.

定義 3.5. $\forall v \notin S$ に対し $\|x\|_v \leq 1$ を満たす $x \in k$ を **S-整数 (S-integer)** と呼ぶ. S-整数全体は環をなし $\mathcal{O}_{k,S}$ で表す.

そこで長さ関数 $l(\mathbf{x})$ に関する

$$\mathcal{O}_{k,S}^n := \{\mathbf{x} \in k^n ; \|\mathbf{x}\|_v \leq 1 \ (\forall v \notin S)\}$$

の i-逐次最小 λ_i を $\{\mathbf{x} \in \mathcal{O}_{k,S}^n ; l(\mathbf{x}) \leq \lambda\}$ が i 個の k 上線型独立な元をもつようなものの最小実数 λ として定義する.

注意 3.6. $\mathcal{O}_{k,S}$ は $\mathbb{R}$ 内で離散的ではなく, 従って $\mathcal{O}_{k,S}^n$ は格子とはいえない. しかし, アデール $\prod_{v\in S} k_v$ においては $\mathcal{O}_{k,S}^n$ は離散的となり格子と見做せる. 以下, 格子 $\mathcal{O}_{k,S}^n$ という云い方はこの意味である.

すると定理3.3と同様に次が成り立つ.

定理 3.7 ([BV][V1, Theorem6.1.11]). 以上の状況において

$$\left(\frac{1}{n!}\right)^{r_1} \left(\frac{2^n}{(2n)!}\right)^{r_2} \leq \frac{(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^d}{\prod_{v\in S} \|\det L_{v,i}\|_v} \leq \frac{2^{n(r_1+r_2)} |D_k|^{n/2}}{C(r_1, r_2, n)},$$

が成り立つ. 但し r_1, r_2 はそれぞれ k の実または複素素点の数で $r_1 + 2r_2 = d$ を満たす. D_k は k の判別式. また $C(r_1, r_2, n)$ は v が実なら $N_v = 1$, 複素なら $N_v = 2$ として

$$\{\mathbf{x} \in (x_{v,i}), v \in S_\infty, 1 \leq i \leq n ; \sum_v N_v \max |x_{v,i}| \leq d\}$$

で与えられる $\mathbb{R}^{nr_1} \times \mathbb{C}^{nr_2}$ 内の立体の体積である.

4 対数微分の補題のDiophantus類似に向けて

定義 4.1. $A \in \bigwedge^{p+1} k^{n+1}, B \in \bigwedge^{q+1} k^{n+1}$ $(p \geq q)$ に対し, 内部積 (interior product) $(A \cdot B)$ を $\forall C \in \bigwedge^{p-q} k^{n+1}$ に対し

$$(A \cdot B) \cdot C = (A \cdot (B \wedge C))$$

が成り立つ様に定義する.

定理 1.7 の $v_1, \ldots, v_{N-n}$ における「後述する条件」をここで述べておこう. 以下の条件 4.2 を満たすような有限 Zariski 開被覆は明らかに存在する.

条件 4.2. *X を次の条件をみたす $v_1, \ldots, v_{N-n}$ がそれぞれ固定してとれるような有限個の Zariski 開集合で覆う. すると $v_1, \ldots, v_{N-n}$ は取り方が有限個にできる.*

(i) $\mathbf{b}_{v,i}$ は

$$\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,0}\|_v \leq \cdots \leq \|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,n}\|_v \leq \cdots \leq \|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,q}\|_v \tag{4}$$

なるように $\mathbf{b}_i$ の順序を変えたものであるとする[2]. また, $B_{v,i} := \mathbf{b}_{v,l_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_{v,l_{N-n+1}} \in \bigwedge^{N-n+1} \mathcal{O}_{k,S}^{N+1}$ に対し,

$$\|V \cdot B_{v,0}\|_v \leq \cdots \leq \|V \cdot B_{v,\binom{N+1}{N-n+1}-1}\|_v \leq \cdots \leq \|V \cdot B_{v,\binom{q+1}{N-n+1}-1}\|_v$$

となるように並び替えると $B := B_{v,m} = \mathbf{b}_{v,n} \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_{v,N}$ は $m \geq \binom{N+1}{N-n+1} - 1$.

(ii)

$$v_i \cdot \mathbf{b}_{v,j} = 0 \; (1 \leq i \leq N-n, 0 \leq j \leq n-1).$$

従って, $v_1, \ldots, v_{N-n}$ は付値 v に依る (が, 記号が煩雑になるので明示しない)

(iii) $\mathbf{x}$ に依らない定数 C が存在して

$$\overline{H}(v_i) \leq C \; (1 \leq i \leq N-n).$$

以下, 定理 1.7 の証明を述べる.
(証明)
1.

$$\prod_{v \in S} \frac{\|(\mathbf{x}' \wedge V) \cdot \mathbf{b}_i\|_v}{\|V\|_v \|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_i\|_v} \leq \overline{H}(\mathbf{x})^{\epsilon} \tag{5}$$

を証明する. 証明は背理法による. つまり上式が成り立たないような S が無限集合であるとする.

次の定理 4.3 は Nevanlinna 理論の議論とは最も異なる Diophantus 特有の (Roth の補題型の) 議論が必要なので証明を次節に譲る.

---

[2] 各 v ごとに $\mathbf{x}$ がどの H_i を近似しているかを見るために並べかえる.

定理 4.3. $L_{v,i}(0 \leq i \leq N)$ を k 係数 k^{N+1} 上の線型独立な線型形式であるとし, $c > 0, \epsilon > 0$ とする.

「$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}_{k,S}^{N+1}$ に対し, $\mathbf{x}$ で零になる $(k^{N+1})^*$ の部分空間の基底 $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n \in (\mathcal{O}_{k,S}^{N+1})^*$ が存在して,

$$\|L_{v,i}^*(\mathbf{w}_j)\|_v \leq \overline{H}(\mathbf{x})^c \quad (\forall i, j, v \in S) \tag{6}$$

かつ

$$\prod_{v \in S} \prod_{i=0}^{n-1} \max_{1 \leq j \leq n} \|L_{v,i}^*(\mathbf{w}_j)\|_v \max_{1 \leq j \leq n} \|L_{v,l}^*(\mathbf{w}_j)\|_v \leq \overline{H}(\mathbf{x})^{-\epsilon} \quad (n \leq l \leq N) \tag{7}$$

を満たすならば $\mathbf{x} \in \mathcal{S} \subset k^{N+1}$ である」

この条件を満たすような $\mathcal{S} \subset k^{N+1}$ は有限集合である[3].

定理 1.7 の証明の方針は, 背理法の仮定でとった $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ の無限列が定理 4.3 の条件を満たしていることを示して, 矛盾を導き出す.

2. そこで逐次最小の理論を $k^{N+1} \wedge V$ において展開する.

補題 4.4. 上の状況において, 定数 A に対し

$$\|(\mathbf{x}' \wedge V) \cdot \mathbf{b}_i\|_v > A\|V\|_v\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_i\|_v$$

ならば

$$\|(\mathbf{x}' \wedge V) \cdot (\mathbf{b}_j \wedge \mathbf{b}_{l_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_{l_{N-n+1}})\|_v > cA\|V\|_v\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_j\|_v$$

なるような $\mathbf{b}_i$ に依る定数 c と, $v_0, \ldots, v_{N-n}, \mathbf{b}_i$ に依る $l_1, \ldots, l_{N-n+1}$ と, $v_0, \ldots, v_{N-n}, \mathbf{x}', \mathbf{b}_i$ に依る j が存在する.

無限列 $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ に対し, $\mathbf{b}_{v,i}$ を (4) によって決める. $\mathbf{x}$ の無限部分列をとることによって, $\mathbf{b}_{v,i}$ は $\mathbf{x}$ に依らないとしてよい.

$\mathbf{x}' \wedge V \neq 0$ をもつ $\forall \mathbf{x}' \in \mathcal{O}_{k,S}^{N+1}$ に対し, 式 (5) が成り立たないことにより

$$\prod_{v \in S} \frac{\|(\mathbf{x}' \wedge V) \cdot \mathbf{b}_{v,i}\|_v}{\|V\|_v\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,i}\|_v} > \overline{H}(\mathbf{x})^{\epsilon}.$$

これに補題 4.4 を適用して,

$$\prod_{v \in S} \frac{\|(\mathbf{x}' \wedge V) \cdot (\mathbf{b}_{v,j} \wedge B)\|_v}{\|V\|_v\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,j}\|_v} \gg \overline{H}(\mathbf{x})^{\epsilon} \tag{8}$$

なる j が存在する.

$k^{N+1} \wedge V$ において長さ関数を

$$\begin{aligned} L_{v,i}(\mathbf{w}) &= (\mathbf{w} \wedge V) \cdot (\mathbf{b}_{v,i} \wedge B) \quad (0 \leq i < n) \\ A_{v,i} &= 1/(\|V\|_v\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,i}\|_v) \end{aligned} \tag{9}$$

---

[3]有限集合 $\mathcal{S}$ の高さの effective な bound は現時点では知られていない.

でとり[4], 逐次最小を用いると式 (8) より, 1-逐次最小が大きいという主張

$$\lambda_1^d \gg \overline{H}(\mathbf{x})^\epsilon \tag{10}$$

を得る.

3. ここで用いられる多重線型代数の公式を述べる.

補題 4.5. $m > l \geq 1$ とする. $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_m \in k^{N+1}, \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_m \in k^{N+1}$ に対し, $X = \mathbf{x}_0 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_l, Y = \mathbf{y}_0 \wedge \ldots \wedge \mathbf{y}_l$ とおく.

$$\begin{aligned}((X \wedge \mathbf{x}_{l+1}) \wedge \ldots \wedge (X \wedge \mathbf{x}_m)) \cdot ((Y \wedge \mathbf{y}_{l+1}) \wedge \ldots \wedge (Y \wedge \mathbf{y}_m))& \\ = \ (X \cdot Y)^{m-l-1}((\mathbf{x}_0 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_m) \cdot (\mathbf{y}_0 \wedge \ldots \wedge \mathbf{y}_m))&\end{aligned}$$

但し, 左辺の・積は $\bigwedge^{m-l}(\bigwedge^{l+2} k^{N+1})$ 内でとる.

$k^{N+1} \wedge V$ における格子 $\mathcal{O}_{k,S}^{N+1} \wedge V$ に関する $\mathbf{b}_{v,i} \wedge B$ の相対的体積 volume$/d(\mathbf{x} \wedge \mathcal{O}_{k,S}^{N+1})$ を計算する. $\mathbf{x} = x_0\mathbf{e}_0 + \cdots + x_n\mathbf{e}_N$ ($\mathbf{e}_i$ は標準基底) とする. このとき, $\mathbf{e}_{N-n+1} \wedge V, \ldots, \mathbf{e}_N \wedge V$ は $\mathcal{O}_{k,S}^{N+1} \wedge V$ の部分格子 Λ の基底をなす.

$$\begin{aligned}\text{volume}/d(\Lambda) &= \prod_{v \in S} \|((\mathbf{e}_{N-n+1} \wedge V) \wedge \ldots \wedge (\mathbf{e}_N \wedge V)) \cdot ((\mathbf{b}_{v,0} \wedge B) \wedge \ldots \wedge (\mathbf{b}_{v,n-1} \wedge B))\|_v^{-1} \\ &= \left[\prod_{v \in S} \|V \cdot B\|^{n-1} \|(\mathbf{e}_{N-n+1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_N \wedge V) \cdot (\mathbf{b}_{v,0} \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_{n-1} \wedge B)\|_v\right]^{-1} \\ &\gg\ll \left[\|V\|_v^{n-1}(d(\Lambda)/d(\mathcal{O}_{k,S}^{N+1} \wedge V))\| \det(\mathbf{b}_{v,i})\|_v\right]^{-1}\end{aligned}$$

(条件 4.2(i) より $\|V\|_v \gg\ll \|V \cdot B\|_v$ を用いた) なので

$$\text{volume}/d(\mathcal{O}_{k,S}^{N+1} \wedge V) \gg\ll \left[\|V\|_v^{n-1} \| \det \mathbf{b}_{v,i}\|_v\right]^{-1}$$

以下, $\gg\ll$ によって $\| \det(\mathbf{b}_{v,i})\|_v$ を省いて書くと定理 3.7 より

$$(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^d \gg\ll \|V\|_v^{n-1} \prod_{v,i} A_{v,i} \tag{11}$$

$$\gg\ll \frac{1}{\prod_v \prod_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,i}\|_v \|V\|_v} \tag{12}$$

である.

補題 4.6 (Davenport の補題 [V1, Lemma6.2.1]). 正の実数 $\rho_1, \ldots, \rho_n$ が $\rho_1 \geq \cdots \geq \rho_n$, $\rho_1\lambda_1 \leq \cdots \leq \rho_n\lambda_n$, $\rho_1 \cdots \rho_n = 1$ を満たすとする. このとき各 $v \in S, 0 \leq i < n$ に対し, k, S のみに依る実定数 $\rho_{v,i}$ が存在して, 新しい長さ関数

$$\hat{l}(\mathbf{x}) := \left[\prod_{v \in S} \max_{1 \leq i \leq n} \rho_{v,i} A_{v,i} \|L_{v,i}(\mathbf{x})\|_v\right]^{1/d}$$

[4] $\prod_{i=1}^n A_{v,i} = 1$ となるように適当に調整してから議論してもよいが, ここでは調整なしで議論する. 式 (11) の右辺にある $\prod A_{v,i}$ が調整なしの影響である.

に関する逐次最小 $\hat{\lambda}_i$ は

$$\lambda_i \rho_i \gg\ll \hat{\lambda}_i$$

を満たし, かつ

$$\prod_{i=1}^{n} \rho_{v,i} = 1$$

である. また v が実なら $N_v = 1$, 複素なら $N_v = 2$, 非アルキメデス的なら $N_v = 0$ とおくと, 各 $v \in S$ に対し

$$\max_{1 \le i \le n} \rho_{v,i} = \rho_1^{N_v}$$

である.

我々の状況では, 正の実数 ρ に対し $\rho_i := \rho/\lambda_i$ とおき, ρ をうまく選んで $\rho_1 \cdots \rho_n = 1$ とすれば, 新しい長さ関数

$$\hat{l}(\mathbf{w})^d = \prod_{v \in S} \max_{0 \le i < n} \rho_{v,i} A_{v,i} \|L_{v,i}(\mathbf{w})\|_v$$

に対して,

$$\rho = \lambda_i \rho_i \gg\ll \hat{\lambda}_i \tag{13}$$

$$\textstyle\prod_{i=0}^{n-1} \rho_{v,i} = 1 \tag{14}$$

$$\max_{0 \le i < n} \rho_{v,i} = \rho_1^{N_v} \tag{15}$$

である. 故に (12) 及び (13) から

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_i &\gg\ll \left[\prod_{v \in S} \|V\|_v^{n-1} \prod_{v,i} A_{v,i} \right]^{1/nd} && (16) \\ &\gg\ll \prod_{v \in S} \prod_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,i}\|_v^{-1/nd} \|V\|_v^{-1/nd} && (17) \end{aligned}$$

であり, 更に (10) 及び (15) から

$$\begin{aligned} \max_{0 \le i < n} \rho_{v,i} &\ll (\hat{\lambda}_1/\lambda_1)^{N_v} \qquad (\forall v \in S, 0 \le i < n) \\ &\ll \left[\prod_{v \in S} \|V\|_v^{n-1} \prod_{v,i} A_{v,i} \overline{H}(\mathbf{x})^{-\epsilon} \right]^{N_v/nd} && (18) \\ &\ll \left(\prod_{v \in S} \prod_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,i}\|_v^{-1/n} \|V\|_v^{-1/n} \overline{H}(\mathbf{x})^{-\epsilon} \right)^{N_v/d} && (19) \\ \prod_{v \in S} \max_{0 \le i < n} \rho_{v,i} &\ll \prod_{v \in S} \prod_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,i}\|_v^{-1/n} \|V\|_v^{-1/n} \overline{H}(\mathbf{x})^{-\epsilon} && (20) \end{aligned}$$

4. $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \in k^{N+1}, L_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_i$ の場合を考える. $0 \le \sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(p) \le N$ をみたす組 $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(p))$ に対し

$$B_\sigma = \mathbf{b}_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_{\sigma(p)}$$

とおくと B_σ は $\bigwedge^p k^{N+1}$ 上の線型独立な線型形式 $L_\sigma(X)$ を定義する. また

$$\begin{aligned} A_{v,\sigma} &:= A_{v,\sigma(1)} \cdots A_{v,\sigma(p)} \\ \lambda_\sigma &:= \lambda_{\sigma(1)} \cdots \lambda_{\sigma(p)} \end{aligned}$$

とおき, $L_\sigma(X)$ と $A_{v,\sigma}$ によって定まる長さ関数 $l_\sigma(X)$ の逐次最小を $\mu_1, \ldots, \mu_M (M = \binom{n+1}{p})$ と書く.

命題 4.7 ([V1,Proposition6.3.10]). 各 σ_i に対し $\lambda_{\sigma_1} \le \cdots \le \lambda_{\sigma_M}$ なるよう順序づけておく. このとき

$$\lambda_{\sigma_i} \gg\ll \mu_i.$$

我々の状況に戻ろう. $\bigwedge^{n-1}(k^{N+1} \wedge V)$ において上に述べたよう長さ関数を作る. $\nu_j \in \bigwedge^{n-1}(\mathcal{O}_{k,S}^{N+1} \wedge V)$ に対し,

$$\begin{aligned} L_{v,\sigma_m} &:= \nu_j \cdot ((\mathbf{b}_{v,0} \wedge B) \wedge \ldots \wedge (\widehat{\mathbf{b}_{v,m} \wedge B}) \wedge \ldots \wedge (\mathbf{b}_{v,n-1} \wedge B)) \\ A_{v,\sigma_m} &:= A_{v,0} \cdots \widehat{A_{v,m}} \cdots A_{v,n-1} \end{aligned}$$

とし, この長さ関数の i-逐次最小を μ_i とおく. また

$$\lambda_{\sigma_{n-m}} := \lambda_1 \cdots \widehat{\lambda_{m+1}} \cdots \lambda_n$$

とおくと, 命題 4.7 により $\lambda_{\sigma_i} \gg\ll \mu_i$ だから, 長さ関数 $\hat{l}_\sigma$ に対する逐次最小 $\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_n$ は (17) より

$$\hat{\mu}_i \gg\ll \prod_{v \in S} \prod_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,i}\|_v^{-(n-1)/nd} \|V\|_v^{-(n-1)/nd}$$

を満たしている. つまり格子 $\bigwedge^{n-1}(\mathcal{O}_{k,S}^{N+1} \wedge V)$ の部分格子の基底 $\nu_1, \ldots, \nu_n$ が存在し, (14) を用いて

$$\begin{aligned} &\|\nu_j \cdot ((\mathbf{b}_{v,0} \wedge B) \wedge \ldots \wedge (\widehat{\mathbf{b}_{v,m} \wedge B}) \wedge \ldots \wedge (\mathbf{b}_{v,n-1} \wedge V))\|_v \\ &\ll \prod_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,i}\|_v^{-(n-1)/n} \|V\|_v^{-(n-1)/n} \prod_{i \ne m} \frac{1}{A_{v,i} \rho_{v,i}} \\ &\ll \prod_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,i}\|_v^{-(n-1)/n} \|V\|_v^{(n^2-2n+1)/n} \prod_{i \ne m} \|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,i}\|_v \frac{1}{\rho_{v,i}} \\ &\ll \frac{\|V\|_v^{n-2} \rho_{v,m}}{\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,m}\|_v} \prod_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,i}\|_v^{1/n} \|V\|_v^{1/n} \end{aligned} \tag{21}$$

$\nu_j \in \bigwedge^{n-1}(\mathcal{O}_{k,S}^{N+1} \wedge V)$ より有限和

$$\nu_j := \sum_l ((\mathbf{u}_{l,1} \wedge V) \wedge \ldots \wedge (\mathbf{u}_{l,n-1} \wedge V))$$

とおくと,

$$(21) = \|V\|_v^{n-2} \left\| \sum_l (\mathbf{u}_{l,1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{u}_{l,n-1} \wedge V) \cdot (\mathbf{b}_{v,0} \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathbf{b}_{v,m}} \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_{v,N}) \right\|_v \tag{22}$$

となる.

ここで

$$\mathbf{u}_j := \sum_l \mathbf{u}_{l,1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{u}_{l,n-1} \in \bigwedge^{n-1} \mathcal{O}_{k,S}^{N+1}$$

とおき, 更に $\bigwedge^N (k^{N+1})^* \simeq k^{N+1}$ なので

$$\mathbf{b}_{v,m}^* := \frac{(-1)^m}{\det(\mathbf{b}_{v,i})} \mathbf{b}_{v,0} \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathbf{b}_{v,m}} \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_{v,N}$$

とおくとこれは $\{\mathbf{b}_{v,0}, \ldots, \mathbf{b}_{v,N}\}$ の双対基底となる.

従って (21) 及び (22) より

$$\|(\mathbf{u}_j \wedge V) \cdot \mathbf{b}_{v,m}^*\|_v \ll \frac{\rho_{v,m}}{\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,m}\|_v} \prod_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,i}\|_v^{1/n} \|V\|_v^{1/n} \tag{23}$$

故に

$$\prod_{v \in S} \prod_{m=0}^{n-1} \max_{1 \le j \le n} \|(\mathbf{u}_j \wedge V) \cdot \mathbf{b}_{v,m}^*\|_v \ll \prod_{v \in S} \|V\|_v. \tag{24}$$

ここで, 条件 4.2(ii) を用いて

$$\mathbf{b}_{v,l}^* \equiv \frac{-1}{\det(\mathbf{b}_{v,i})} \frac{B_l}{V \cdot B} \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,i}) \mathbf{b}_{v,i}^* \quad \bmod v_0, \ldots, v_{N-n} \ (n \le l \le N),$$

(但し $B_l := (v_1 \wedge \ldots \wedge v_{N-n}) \cdot (\mathbf{b}_{v,n} \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathbf{b}_{v,l}} \wedge \ldots \wedge \mathbf{b}_{v,N})$) が計算できるから, これを (23) に適用して

$$\|(\mathbf{u}_j \wedge V) \cdot \mathbf{b}_{v,l}^*\|_v \ll \frac{\|B_l\|_v}{\|V\|_v} \prod_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,i}\|_v^{1/n} \|V\|_v^{1/n} \max_{0 \le i < n} \rho_{v,i} \ (n \le l \le N). \tag{25}$$

(20) より

$$\prod_{v \in S} \max_{1 \le j \le n} \|(\mathbf{u}_j \wedge V) \cdot \mathbf{b}_{v,l}^*\|_v \ll \frac{\prod_{v \in S} \|B_l\|_v \overline{H}(\mathbf{x})^{-\epsilon}}{\prod_{v \in S} \|V\|_v} \ (n \le l \le N).$$

(24) と組み合わせて, 条件 4.2(iii) により $\prod_{v \in S} \|B_l\|_v$ を省くと

$$\prod_{v \in S} \prod_{m=0}^{n-1} \max_{1 \le j \le n} \|(\mathbf{u}_j \wedge V) \cdot \mathbf{b}_{v,m}^*\|_v \max_{1 \le j \le n} \|(\mathbf{u}_j \wedge V) \cdot \mathbf{b}_{v,l}^*\|_v \ll \overline{H}(\mathbf{x})^{-\epsilon} \ (n \le l \le N)$$

よって定理 4.3 の第 2 条件 (7) を満たす $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ を構成できた.

5. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,i} \neq 0$ ならば

$$\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_{v,i}\|_v \gg \frac{\|\mathbf{x}\|_v}{\overline{H}(\mathbf{x})}$$

であることを (19) に組み合わせて

$$\max_{0 \le j < n} \rho_{v,i} \ll \prod_{v \in S} \left(\frac{\overline{H}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|_v}\right)^{N_v/d} \left(\frac{1}{\|V\|_v}\right)^{N_v/nd} = \overline{H}(\mathbf{x})^{(|S|-1)N_v/d} \overline{H}(V)^{-N_v/nd}$$

(23) と (25) により

$$\|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{b}^*_{v,m}\|_v \ll \|V\|_v^{1/n} \overline{H}(\mathbf{x})^{(|S|-1)N_v/d+1} \overline{H}(V)^{-N_v/nd}$$

適当な unit を V に掛けて $\|V\|_v \ll \overline{H}(V)$ とすると,

$$\|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{b}^*_{v,m}\|_v \ll \overline{H}(V)^{(1/n)(1-N_v/d)} \overline{H}(\mathbf{x})^{(|S|-1)N_v/d+1}$$

条件 4.2(iii) により $\overline{H}(V) \ll \overline{H}(\mathbf{x})$ だから

$$\|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{b}^*_{v,m}\|_v \ll \overline{H}(\mathbf{x})^{|S|+1/n}$$

上式は定理 4.3 の第 1 条件 (6) を満たす. 故に $\mathbf{x}$ の無限列は定理 4.3 の仮定を満たすから明らかに矛盾である. 従って (5) を満たす $\mathbf{x}'$ は存在し, 適当に unit を掛けることによって定理 1.7 は従う. □

5 定理 4.3 の証明の概略

以下, 簡単のために $k = \mathbb{Q}$ の場合において説明する. k が一般の数体の場合も理論に大きな変更はない.

$\overline{\mathbb{Q}}$ 係数の多項式

$$P = P(X_{10}, \ldots, X_{1N}; \ldots; X_{m0}, \ldots, X_{mN})$$

による環を $\mathcal{R}$ によって表す.

また, $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{N}^m$ 及び $\mathbf{I} := (i_{10}, \ldots, i_{1N}; \ldots; i_{m0}, \ldots, i_{mN}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{m(N+1)}$ とおく. このとき記号

$$(\mathbf{I}/\mathbf{r}) := \sum_{h=1}^{m} \frac{i_{h0} + \cdots + i_{hN}}{r_h}$$

$$P^{\mathbf{I}} := \frac{1}{i_{h0}! \ldots i_{1N}!} \frac{\partial^{i_{10}+\cdots+i_{mN}}}{\partial X_{10}^{i_{10}} \ldots \partial X_{mN}^{i_{mN}}} P$$

を定義しておく.

定義 5.1. $\overline{\mathbb{Q}}^{m(N+1)}$ の線型部分空間 T に対し, $\mathrm{Ind}_T(P)$ を $P^{\mathbf{I}}$ が T 上恒等的に 0 にならないような $(\mathbf{I}/\mathbf{r}) = c$ なる最小値 c で定義する. $P \equiv 0$ なら $\mathrm{Ind}_T(P) = \infty$ とする.

すると, 次の 2 つの対照的な定理が成り立つ. [Sch] の該当部分を我々の場合に適用できるように改変する.

定理 5.2. $c_0, \ldots, c_n$ は

$$c_0 + \cdots + c_n = 0, \quad |c_i| \leq 1 \ (0 \leq i \leq n)$$

をもつ実数とする. $L^{(i)}(0 \leq i \leq N)$ を線型独立な線型形式であるとする.

その時, 任意の正数 ϵ について, $Q_1, \ldots, Q_m$ を

$$Q_h^{\epsilon} > 2^{(n+1)}E, \quad Q_h^{\epsilon} > (n+1)(\epsilon^{-1}+1) \quad (1 \leq h \leq m),$$

$$r_1 \log Q_1 \leq r_h \log Q_h \leq (1+\epsilon) r_1 \log Q_1 \quad (1 \leq h \leq m)$$

をもつ実数とする.

更に, $0 < \delta = \delta(\epsilon, n) < 1$ について, $\mathbf{g}_{h,1}, \ldots, \mathbf{g}_{h,n}$ $(1 \leq h \leq m)$ が $\mathbb{R}^{N+1}$ 内の n-線型独立な整数点で

$$|L^{(k)}(\mathbf{g}_{h,t})| \leq Q_h^{c_k - \delta} \quad (0 \leq k \leq n-1, 1 \leq h \leq m, 1 \leq t \leq n)$$

かつ

$$|L^{(k)}(\mathbf{g}_{h,t})| \leq Q_h^{c_n - \delta} \quad (n \leq k \leq N, 1 \leq h \leq m, 1 \leq t \leq n)$$

を満たすと仮定する.

その時, $\mathbf{g}_{h,1}, \ldots, \mathbf{g}_{h,n}$ で零になる線型形式 $M_{h,0}, \ldots, M_{h,N-n}$ に対し, $T_h = \{M_{h,0} = \cdots = M_{h,N-n} = 0\}$ とする. $T = T_1 \times \cdots \times T_m \subset \overline{\mathbb{Q}}^{m(N+1)}$ とおくと $P \in \mathcal{R}$ に対し

$$\mathrm{Ind}_T(P) \geq m\epsilon$$

が成り立つ.

定理 5.3. $m \geq 2, 0 < \epsilon \leq 1$ に対し

$$\frac{r_{h+1}}{r_h} \geq \frac{2m^2}{\epsilon} \quad (1 \leq h \leq m-1)$$

を満たすとする.

前定理の線型形式 $M_{h,i}$ $(0 \leq h \leq m, 0 \leq i \leq N-n)$ に対し,

$$\begin{cases} M'_{h,0} := a^h_{0,0} X_0 + \cdots + a^h_{0,N-n+1} X_{N-n+1} = 0 \\ \cdots \\ M'_{h,N-n} := a^h_{N-n,0} X_0 + \cdots + a^h_{N-n,N-n+1} X_{N-n+1} = 0 \end{cases}$$

の連立方程式の解を $(x_{h,0}, \ldots, x_{h,N-n+1})$ とすると $M_{h,1}, \ldots, M_{h,N-n}$ に依るある定数 B_h が存在して, $H(x_{h,2}, \ldots, x_{h,N-n+1}) \leq B_h$ を満たし, 更に $H(P), H(X), e^{r_1 + \cdots + r_m}$ に依るある定数 C が存在して

$$H(T_h)^{r_h} \geq C \tag{26}$$

とする.

その時, $x \in T = T_1 \times \cdots \times T_m$ が存在して

$$\mathrm{Ind}_x(P) < m\epsilon$$

が成り立つ.

もし仮定 (26) が満たされると, 定理 5.2 と定理 5.3 からでてくる結論が矛盾する. 従って仮定 (26) が否定されるので, 定理 4.3 が成り立つ. □

参考文献

[Ah] L. V. Ahlfors, *The theory of meromorphic curves*, Acta. Soc. Sci. Fenn. Nova Ser. A **3** (1941), 1-31.

[BV] E. Bombieri; J. Vaaler, *On Siegel's lemma*, Inv. Math. **73** (1983), 11-32; Addendum, Inv. Math. **75** (1984), 377.

[C] H. Cartan, *Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes donnés*, Mathematica **7** (1933), 5-31.

[Fa] G. Faltings, *Diophantine Approximation on Abelian Varieties*, Annals of Math. **133** (1991), 549-576.

[EF] J. -H. Evertse; R. G. Ferretti, *Diophantine inequalities on projective varieties*, Intern. Math. Res. Not. 2002:25 (2002), 1295-1330.

[ES] J. -H. Evertse; H. P. Schlickewei, *A quantitative version of the Absolute Subspace Theorem*, J. reine angew. Math. **548** (2002), 21-127.

[HS] M. Hindry; J. H. Silverman, *Diophantine Geometry: An Introduction*, GTM 201, Springer, 2000.

[K1] 小林亮一, *Nevanlinna* 理論と数論, 数学 **48**(1996), 岩波書店, 113-127.

[K2] R. Kobayashi, *Holomorphic curves in Abelian varieties: The second main theorem and applications*, Japanese J. Math. (2000), 129-152.

[K3] R. Kobayashi, *Toward Nevanlinna theory as a geometric model of Diophantine approximation*, to appear in AMS SUGAKU exposition (2002).

[L] S. Lang, *Survey of Diophantine Geometry*, Springer, 1997.

[N] R. Nevanlinna, *Analytic Functions*, Springer, 1970.

[NWY] J. Noguchi; J. Winkelmann; K. Yamanoi, *The second main theorem for holomorphic curves into semi-Abelian varieties*, Acta Math. **188** no.1 (2002), 129-161.

[R] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika **2** (1955), 1-20; *corrigendum*, Mathematika **2** (1955), 168.

[Ru] M. Ru, *Nevanlinna Theory and its Relation to Diophantine Approximation*, World Scientific, 2001.

[Sch] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lecture Notes in Mathematics 785, Springer-Verlag, 1980.

[SY] Y. -T. Siu; S. -K. Yeung, *Defects for ample divisors of abelian varieties, Schwarz lemma, and hyperbolic hypersurfaces of low degrees*, Amer. J. Math. **119** (1997), 1139-1172; *Addendum*, preprint (math. CV/0208059).

[V1] P. Vojta, *Diophantine Approximations and Value Distribution Theory*, Lecture Notes in Mathematics 1239, Springer-Verlag, 1987.

[V2] P. Vojta, *A Refinement of Schmidt's Subspace Theorem*, Amer. J. Math. **111** (1989), 489-518.

[V3] P. Vojta, *On Cartan's Theorem and Cartan's Conjecture*, Amer. J. Math. **119** (1997), 1-17.

[Y1] K. Yamanoi, *Algebro-Geometric Version of Nevanlinna's lemma on Logarithmic Derivative and Applications*, to appear in Nagoya Math. J. (2002).

[Y2] 山ノ井克俊, 正則曲線の *Nevanlinna* 理論, "代数幾何学とロジック" (ed. 森脇淳) に収録.