数理解析研究所講究録 1314 巻 2003 年 123-135

擬凸近傍系と近似定理

名古屋大学・多元数理科学研究科
Graduate School of Mathematics Nagoya University
山田 剛

Intrduction

閉集合上の連続関数を正則関数で近似する事は、正則関数の性質を知るうえで重要なことであり、様々な定理が考えられてきた。
正則関数で連続関数を近似する方法としては大きく分けて以下の二つの考え方がある。

1. $\mathbb{C}^n$ の閉集合 K 上の連続関数を K の近傍上の正則関数で近似する。

2. $\mathbb{R}^n$ 上の連続関数を C^ω 級関数で近似する。

1. の考え方としては $\mathbb{C}$ 上の領域に対する Runge の定理 (Theorem 1.1 参考文献 [7]) が重要である。Runge の定理は Mergelyan によって拡張された。(Theorem 1.2 参考文献 [5]) また、多変数の場合には Oka-Weil の定理 (Theorem 1.3) などがある。
2. の考え方として、最も有名な定理は Weierstrass の多項式近似定理である。この定理を $\mathbb{R}$ 上の連続関数の近似に拡張したのは Carleman (参考文献 [1]) である。さらに $\mathbb{R}^n$ の連続関数に対して拡張したのは A. Sakai (Theorem 1.5 参考文献 [8]) である。
1 章ではこの A. Sakai の結果を拡張して $\mathbb{C}$ のコンパクト集合と総実閉集合との直積上での近似定理を与える。(Theorem 1.6)
A. Sakai の手法は L. Hörmander , J. Wermer の論文 [2] によるものであり、L^2 評価式を使うものである。
L^2 評価式を用いて正則関数による近似を考える時に必要になるのは擬凸近傍系の存在である。擬凸近傍系については、$\mathbb{C}^n$ の線型部分空間に関して良く知られている。$\mathbb{C}^n$ の (実の意味での) 線型部分空間 V が複素直線を含まない場合については擬凸近傍系が存在することが知られており、逆に V が複素部分空間になる時も Siu [9] により擬凸近傍系が存在することが示されている (Theorem 2.2)。しかし、その中間の状態、すなわち $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ というような形の部分空間に関しては擬凸近傍系が存在しない。(Theorem 2.3 , 参考文献 [4])
2 章では $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^m$ より少し小さな部分集合として、非有界な領域の閉包と $\mathbb{R}^m$ との直積を考え、擬凸近傍系が存在しないことを示す。(Corollary 2.7)

1 近似定理について

この章では A. Sakai の論文の結果を用いて総実閉集合と $\mathbb{C}$ の閉集合との直積上の正則関数の空間の性質を調べる。まずは今知られている結果から述べる。

Theorem 1.1 (Runge)
U を $\mathbb{C}$ の単連結な有界領域とする。この時 U 上の任意の正則関数 f に対して U 上 $f(z)$ に広義一様収束する多項式の列 $\{p_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する。
U が $\mathbb{C}$ の有界領域で $\mathbb{C}\setminus U$ の連結成分が有限とする。また $\mathbb{C}\setminus U$ の連結成分を $K_0, K_1, \ldots, K_n$,(K_0 は外側の集合) とする。この時 $z_1, \cdots, z_n$, $z_i \in K_i$ とすれば U 任意の正則関数 f に対して、多項式列 p_{ij} , $i = 0, 1, \cdots, n$, $j \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\rho_j(z) = p_{0,j}(z) + \sum_{i=1}^{n} p_{ij}(1/(z - z_i))$$

が U 上 f に広義一様収束する。

Theorem 1.2 (Mergelyan)
K を $\mathbb{C}$ の単連結なコンパクト集合とする。この時 K の内部で正則、K で連続な関数 f は K 上多項式で一様近似できる。

Theorem 1.3 (Oka-Weil)
K を $\mathbb{C}^n$ の多項式凸なコンパクト集合とする。この時 K の近傍で正則な関数 f は K 上多項式で一様近似できる。

Definition 1.4

- $\mathbb{R}^n$ の領域 U に対し、U 上の実数値連続関数 f が U の皆既関数 *(exhaustion funtion)* であるとは、任意の実数 r に対して $\{x \in U\,;\, f(x) < r\}$ が U 内で相対コンパクトになることである。

- $\mathbb{C}^n$ の領域上の C^2 級実数値関数 f の *Levi-form* , $L[f;\xi]$ を次式で定義する。

$$L[f;\xi] = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z_k}} \xi_j \bar{\xi_k} \qquad (\xi \in \mathbb{C}^n)$$

- $\mathbb{C}^n$ の閉集合 I が総実 *(totaly real)* であるとは I の近傍 U と U 上の C^2 級非負多重劣調和関数 ρ で $I = \{z \in U\,;\, \rho(z) = 0\}$, $L[\rho;\xi] > 0$ となるものが存在することである。例として $\mathbb{C}^n$ 内の $\mathbb{R}^n$,すなわち

$$\mathbb{R}^n = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n\,;\, \mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2 = \cdots = \mathrm{Im}\, z_n = 0\}$$

  が挙げられる。これは $\mathbb{C}^n$ 上定義された、非負多重劣調和関数
  $\rho(z) = \sum_i (\mathrm{Im}\, z_i)^2$ に対し $\mathbb{R}^n = \{z \in \mathbb{C}^n\,;\, \rho(z) = 0\}$ となっている事から明らかである。

- $\mathbb{C}^n$ の部分集合 A に対して $C(A)$ を A 上の複素数値連続関数全体とする。

- $A \subset \mathbb{C}^n$ に対して $C^\alpha(A)$ を A 上の複素数値 C^α 級関数全体とする。
  ($\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$)

- $\mathbb{C}^n$ の領域 U に対して $\mathcal{O}(U)$ を U 上の正則関数全体とする。

- $\mathbb{C}^n$ の閉集合 K に対し $H(K)$ を「K の近傍上の正則関数の K への制限全体を一様収束の位相に関して完備化したもの」とする。
  また K の近傍 U に対して $H(K,U)$ を「U 上の正則関数の K への制限全体を一様収束の位相に関して完備化したもの」とする。

- $\mathbb{C}^n$ の部分集合 I に対して

$$\hat{H}(K \times I) = \{F\,;\ F \text{ は } K \times I \text{ 上連続},\ \ F(\cdot,t) \in H(K)\}$$

と定義する。

Theorem 1.5 (Sakai)
$\mathbb{C}^n$ の閉集合 I に対し、以下の条件を満たす U , ρ , σ が存在すると仮定する。

- U は I の近傍
- ρ は U 上で定義された非負な C^2 級関数で、I 上 $L[\rho;\xi] > 0$ であり、$I = \{z\,;\ \rho(z) = 0\}$ が成り立つ。すなわち I は総実閉集合
- σ は正値の C^2 級関数で、U の多重劣調和な皆既関数である。
- U 上 $L[\rho;\xi] \geq \frac{1}{\sigma}L[\sigma^2;\xi]$

この時

$$C(I) = H(I)$$

が成立する。

Theorem 1.6
$\mathbb{C}^n$ の閉集合 I を *Theorem 1.5* と同様とする。また $\mathbb{C}$ のコンパクト集合 K を $\mathbb{C} \setminus K$ の連結成分が有限個となるものとする。この時

$$H(K \times I) = \hat{H}(K \times I)$$

が成立する。

この定理の証明のためにいくつか補題を用意する。

Lemma 1.7
$K \subset \mathbb{C}$ をコンパクト集合とし、$I \subset \mathbb{C}^n$ をコンパクトな総実閉集合とする。この時

$$H(K \times I) = \hat{H}(K \times I)$$

が成立する。

Proof
$H(K \times I) \subset \hat{H}(K \times I)$ は定義より明らか。
$\hat{H}(K \times I) \subset H(K \times I)$ を示す。
任意の $F \in \hat{H}(K \times I)$, $\varepsilon > 0$ に対し $K \times I$ の近傍上の正則関数 f で $K \times I$ 上 $|F(z,w) - f(z,w)| < \varepsilon$ となるものが存在することを示そう。
$K \times I$ はコンパクトなので F は $K \times I$ 上一様連続。従って $\delta > 0$ が存在して $t, t' \in I$, $|t - t'| < \delta$ ならば $|F(z,t) - F(z,t')| < \varepsilon/3$ である。
$\{V_i\}_{i=1}^m$ を $\sup\{|z - z'|\,;\ z, z' \in V_i\} < \delta$, $I \subset \bigcup V_i$ となる I の有限開被覆、また $\{\rho_i\}$ を $\operatorname{supp}\rho_i \subset V_i$ となる 1 の分割（すなわち $\rho_i \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$, $\operatorname{supp}\rho_i \subset V_i$ かつ、$\sum_i \rho_1(z)$ は I の近傍で恒等的に 1）とする。さらに $t_i \in V_i \cap I$ とする。
この時 $F_1 \in C(K \times I)$ を

$$F_1(z,t) = \sum_{i=0}^{m} \rho_i(t) F(z,t_i)$$

とすると $K \times I$ 上 $|F(z,t) - F_1(z,t)| < \varepsilon/3$ である。またここで $F(\cdot,t) \in H(K)$ より K の近傍 D と D 上の正則関数 h_i , $(i = 1,2,\cdots,m)$ が存在して、$K \times I$ 上

$$|F(z,t_i) - h_i(z)| < \varepsilon/3$$

である。この h_i を用いて

$$F_2(z,t) = \sum_{i=0}^{n} h_i(z)\rho_i(t)$$

とすれば $K \times I$ 上 $|F_1(z,t) - F_2(z,t)| < \varepsilon/3$ である。
また [8] より I の近傍 U が存在して、$H(I,U)$ が I 上の連続関数の空間と一致する。従って U 上の正則関数 p_i で、I 上

$$|p_i(t) - \rho_i(t)| < \frac{\varepsilon}{3n(1+\sup|F_2|)}$$

となるものが取れる。よって

$$f(z,w) = \sum_{i=0}^{n} h_i(z)p_i(w)$$

とすれば $K \times I$ 上 $|F_2(z,t) - f(z,t)| < \varepsilon/3$ である。
明らかに f は $D \times U$ 上正則であり、$K \times I$ 上 $|F(z,t) - f(z,t)| < \varepsilon$ となっている。

よって任意の $F \in A$, $\varepsilon > 0$ に対し、$K \times I$ 上 $|F(z,w) - f(z,w)| < \varepsilon$ となる $D \times \mathbb{C}$ 上の正則関数 f が存在する。従って

$$H(K \times I) = \hat{H}(K \times I)$$

Lemma 1.8 (Sakai)
K , I , U , ρ , σ は *Theorem 1.6* と同様とする。
$\mathbb{R}$ 上の実数値 C^∞ 級関数 λ で、$[-\infty,1]$ 上 $\lambda(t) = 1$, $[1,2]$ 上 $0 \le \lambda(t) \le 1$, $[2,\infty]$ 上 $\lambda(t) = 0$ を満たすものを取る。
$\lambda_m(w) = \lambda(\sigma(w)/m)$ とし $\hat{\rho}(w) = a\rho(w)$, $(a = \sup(|\lambda'| + 2|\lambda''| + 1))$ とする。
また $G_r = \{w \in \mathbb{C}\,;\, \sigma(w) < r\}$ とする。(定義より G_r は U 内相対コンパクト)
さらに $\rho_0(w) = \hat{\rho}(w)$, $\rho_m(w) = \hat{\rho}(w) - m\lambda_m(w)$ とする。(この時 $L(\rho_m;\xi) > 0$) ここで $J_m = \{w \in \overline{G_{2m+3}}\,;\, \rho_m(w) < 0\}$ とする。
この時

1. $f \in C^\infty(U)$ ならば $f|_{J_0} \in H(J_0,U)$
2. $f \in C^\infty(U)$ かつ $\overline{G_{2m}}$ の近傍で f が正則ならば $f|_{J_m} \in H(J_m,U)$

証明は A. Sakai [8] の Lemma 2 による。

Lemma 1.9
K , I , U , G_r , J_m は *Lemma 1.8* と同様のものとする。
$\Omega_0,\Omega_1,\cdots,\Omega_l$ を $\mathbb{C} \setminus K$ の連結成分（ Ω_0 は外側の領域）とする。
$\{z_i\}_{i=1}^{l}$ を $z_i \in U_i$ となるように取り、$r_i > 0$ を $\{z\,;\,|z - z_i| \le r_i\} \cap K = \emptyset$ となるように取る。さらに K の近傍 D , D' を

$$D = \{z \in \mathbb{C}\,;\,|z| < r_0\,,\,|z - z_i| > r_i\} \quad , \quad D' = \mathbb{C} \setminus \{z_1,\cdots,z_l\}$$

とする。(ただし $r_0 \gg 1$)
また、$I_m = \overline{G_{2m+3}} \cap I$ とする。この時

1. $F \in \hat{H}(\overline{D} \times I_0)$ ならば $F \in H(\overline{D} \times J_0, D' \times \mathbb{C})$

2. $F \in C(\mathbb{C} \times U)$ が $\overline{D} \times \overline{G_{2m}}$ の近傍で正則で、さらに $F|_{\overline{D} \times I_m} \in \hat{H}(\overline{D} \times I_m)$ ならば $F|_{\overline{D} \times J_m} \in H(\overline{D} \times J_m, D' \times \mathbb{C})$

Proof

1. Lemma 1.7 より明らか。

2. $C(\mathbb{C} \times U)$ 上の連続関数 F が $\overline{D} \times \overline{G_{2m}}$ の近傍で正則、$F|_{\overline{D} \times I_m} \in \hat{H}(\overline{D} \times I_m)$ とする。
まず Runge の定理により $H(\overline{D})$ の任意の元は $\overline{D}$ 上

$$\sum_{j=0}^{m} a_{0,j}(w) z^j + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{a_{i,j}(w)}{(z - z_i)^j} \right)$$

という形の関数で一様に近似できる。これを用いると $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_{i,j} \in C^\infty(U)$, $\beta_{i,j} \in \mathcal{O}(U)$ が存在して

$$F_1(z, w) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_{0,j}(w) z^j + \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_{i,j}(w)}{(z - z_i)^j} \right)$$

$$F_2(z, w) = \sum_{j=0}^{m} \beta_{0,j}(w) z^j + \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_{i,j}(w)}{(z - z_i)^j} \right)$$

とすれば $\overline{D} \times I_m$ 上 $|F - F_1| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\overline{D} \times \overline{G_{2m}}$ 上 $|F - F_2| < \frac{\varepsilon}{3}$ とできる。
ここで ρ を $\rho \in C^\infty(U)$, $0 \le \rho(w) \le 1$ で、$\overline{G_{2m}}$ 上 $\rho(w) = 1$, さらに $\operatorname{supp} \rho$ が $\overline{G_{2m}}$ に十分近いものとする。この時 $u_{i,j}(w)$ を

$$u_{i,j}(w) = \rho(w) \beta_{i,j}(w) + (1 - \rho(w)) \alpha_{i,j}(w)$$

とする。この時

$$F_3(z, w) = \sum_{j=0}^{m} u_{0,j}(w) z^j + \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{u_{i,j}(w)}{(z - z_i)^j} \right)$$

とすれば $\overline{D} \times J_m$ 上 $|F(z, w) - F_3(z, w)| < (2\varepsilon)/3$ である。
さてここで $u_{i,j}$ について考える。$u_{i,j}$ の定義より $u \in C^\infty(U)$、かつ $\overline{G_{2m}}$ の近傍で正則。従って Lemma 1.8 より $v_{i,j} \in \mathcal{O}(U)$ で J_m 上

$$|u_{i,j}(w) - v_{i,j}(w)| < \frac{\varepsilon}{3(lm+1)R^j} \quad , \quad R = \max\left\{ r_0, \frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \cdots, \frac{1}{r_l} \right\}$$

となるものを取ることができる。この $v_{i,j}$ を用いて

$$F_0(z, w) = \sum_{j=0}^{m} v_{0,j}(w) z^j + \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{v_{i,j}(w)}{(z - z_i)^j} \right)$$

とすれば $F_0(z,w) \in \mathcal{O}(D' \times U)$ である。また $\overline{D} \times J_m$ 上

$$|F(z,w) - F_0(z,w)| < \varepsilon$$

となっている。従って $F \in C(\mathbb{C} \times U)$ が $\overline{D} \times \overline{G_{2m}}$ の近傍で正則であり、さらに $F|_{\overline{D} \times I_m} \in \hat{H}(\overline{D} \times I_m)$ ならば $F|_{\overline{D} \times J_m} \in H(\overline{D} \times J_m, D' \times U)$ である。

Lemma 1.10
K , D を *Lemma 1.9* と同じものとする。この時

$$\hat{H}(K \times I) = \overline{\{F|_{K \times I}\ ;\ F \in \hat{H}(\overline{D} \times I)\}}$$

が成り立つ。

Proof
$\hat{H}(K \times I)$ の任意の元 F と任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\hat{H}(\overline{D} \times I)$ の元 F_0 が存在し $K \times I$ 上 $|F(z,t) - F_0(z,t)| < \varepsilon$ が成立すればよい。
$F \in \hat{H}(K \times I)$ とすると F の連続性より I の局所有限な開被覆 $\{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ として、$w, w' \in V_i \cap I$ ならば $|F(z,w) - F(z,w')| < \frac{\varepsilon}{2}$ となるものが存在する。
よって $w_i \in V_i$ とすれば、任意の $w \in V_i$ に対し

$$|F(z,w) - F(z,w_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる。従って $\rho_i(w) \in C^\infty(I)$, $0 \le \rho_i(w) \le 1$ を $\operatorname{supp} \rho_i \subset V_i$ となる 1 の分割とし、

$$F_1(z,w) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} F(z,w_i)\rho_i(w)$$

とすれば $K \times I$ 上 $|F(z,w) - F_1(z,w)| < \varepsilon/2$ である。
また $F(z,w_i) \in H(K)$ より Runge の定理によって $f_i \in H(\overline{D})$ として K 上 $|F(z,w_i) - f_i(z)| < \varepsilon/2$ となるようなものが存在する。従って

$$F_0(z,w) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i(z)\rho_i(w)$$

とすれば $F_0 \in \hat{H}(\overline{D} \times I)$ かつ $K \times I$ 上 $|F_1(z,w) - F_0(z,w)| < \varepsilon/2$ である。
よって $K \times I$ 上 $|F(z,w) - F_0(z,w)| < \varepsilon$ である。
以上より $\hat{H}(K \times I)$ の任意の元 F と任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\hat{H}(\overline{D} \times I)$ の元 F_0 が存在し $K \times I$ 上 $|F(z,w) - F_0(z,w)| < \varepsilon$ が成立する。

Lemma 1.11
D , D' , U , I_m は *Lemma 1.9* と同様のものとする。$\hat{H}(\overline{D} \times I)$ の元 $\hat{F}$ に対し $D' \times U$ 上の正則関数列 F_m で

1. $\overline{D} \times I_m$ 上

$$|\hat{F}(z,w) - F_m(z,w)| < \varepsilon_m \quad , \quad \varepsilon_m = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{m+2}}\right)\varepsilon$$

2. $\overline{D} \times (\overline{G_{2m-2}} \cap J_{m-1})$ 上

$$|F_{m-1}(z,w) - F_m(z,w)| < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$$

となるものが存在する。

Proof
証明は帰納法を用いる。

1. $m = 0$ の時
$\hat{F} \in C^{\infty}$ かつ $F|_{\overline{D} \times I_0}$ より
$F_0 \in \mathcal{O}(D' \times U)$ を $\overline{D} \times I_0$ 上 $|\hat{F}(z,w) - F_0(z,w)| < \varepsilon/4$ となるように取る。これは Lemma 1.7 で F_0 の存在が示される。よって Lemma は成立。

2. $m \leq k$ まで Lemma が成立していると仮定する。
$\overline{D} \times I_k$ 上 $|\hat{F}(z,w) - F_k(z,w)| < \varepsilon_k$ なので $I_k \cup \overline{G_{2k+2}}$ の近傍 V_k で $\overline{D} \times (I_{k+1} \cap V_k)$ 上 $|\hat{F}(z,w) - F_k(z,w)| < \varepsilon_k$ となるものが存在する。
さらに $\rho_k \in C^{\infty}(U, [0,1])$ を

   - $I_k \cup \overline{G_{2k+2}}$ の十分小さな近傍で $\rho_k(w) = 1$

   - $\operatorname{supp} \rho_k \subset V_k$

   となるように取る。このとき

$$\hat{F}_k(z,w) = \rho_k(w) F_k(z,w) + (1 - \rho_k(w)) \hat{F}(z,w)$$

   とすると $\hat{F}_k$ は $\overline{G_{2k+2}}$ の近傍で正則で、$\overline{D} \times I$ 上 $|\hat{F}_k(z,w) - \hat{F}(z,w)| < \varepsilon_k$ である。従って Lemma 1.5. より $F_{k+1} \in \mathcal{O}(D' \times U)$ で $\overline{D} \times J_{k+1}$ 上

$$|F_{k+1}(z,w) - \hat{F}_k(z,t)| < \frac{\varepsilon}{2^{k+3}}$$

   となるものを見つけることができる。この時 $\overline{D} \times I_k$ 上

$$\begin{aligned} |\hat{F}(z,t) - F_{k+1}(z,t)| &\leq |\hat{F}(z,t) - \hat{F}_k(z,t)| + |\hat{F}_k(z,t) - F_{k+1}(z,t)| \\ &< \varepsilon_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+3}} = \varepsilon_{k+1} \end{aligned}$$

   また $\overline{D} \times \overline{G_{2k+2}}$ 上 $F_k(z,w) = \hat{F}_k(z,w)$ であり、さらに $\overline{D} \times J_k$ 上 $|\hat{F}_k(z,w) - F_{k+1}(z,w)| < \varepsilon/2^{k+3}$ より $\overline{D} \times (\overline{G_{2k+2}} \cap J_{k+1})$ 上

$$|F_k(z,w) - F_{k+1}(z,w)| < \frac{\varepsilon}{2^{k+3}}$$

   である。これは $m = k+1$ でも Lemma が成立することを示している。

よって Lemma は成立する。

Proof of Theorem 1.6
D , D' , U , G_r , J_m , I_m は今までの補題と同様のものとする。まず

$$\hat{H}(\overline{D} \times I) = \overline{\{F \in \hat{H}(\overline{D} \times I)\,;\, g \in \mathcal{O}(D \times U) \text{ が存在して } F|_{D \times I} = g|_{D \times I}\}} \quad (1)$$

が成立する事を示す。
任意の $F \in \hat{H}(\overline{D} \times I)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$D \times I$ 上 $|F(z,t) - g(z,t)| < \varepsilon$ となる $g \in \mathcal{O}(D \times U)$ が存在すれば良い。
$F \in \hat{H}(\overline{D} \times I)$ と仮定する。
まず Runge の定理より

- $D' \times U$ 上可微分
- $\hat{F}(\cdot, w)$ が D' 上正則
- $\overline{D} \times I$ 上 $|F(z,w) - \hat{F}(z,w)| < \varepsilon/2$

となる $\hat{F}$ が存在する。
Lemma 1.11 より $D' \times U$ 上の正則関数列 F_m で

1. $\overline{D} \times I_m$ 上
$$|\hat{F}(z,w) - F_m(z,w)| < \varepsilon_m \quad , \quad \varepsilon_m = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{m+2}}\right)\varepsilon$$
2. $\overline{D} \times (\overline{G_{2m-2}} \cap J_{m-1})$ 上
$$|F_{m-1}(z,w) - F_m(z,w)| < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$$

となるものが存在する。
さてここで $A_m = \overline{D} \times (\overline{G_{2m}} \cap J_m)$ とすれば

$$A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_m \subset A_{m+1} \subset \cdots \quad , \quad \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m = \overline{D} \times U$$

である。また A_m 上 $|F_m(z,w) - F_{m+1}(z,w)| < \varepsilon/2^{m+3}$ なので F_m は $\overline{D} \times U$ 上ある $\hat{g}$ に広義一様収束する。F_m は正則なので $\hat{g}$ は $D \times U$ 上正則。$\hat{g}|_{D\times U} = g$ とする。
この時、任意の $w \in I$ に対し $w \in \overline{G_{2m}}$ となるような $m \in \mathbb{N}$ が存在する。よって $(z,w) \in \overline{D} \times I$ において

$$\begin{aligned}
|F(z,w) - \hat{g}(z,w)| &\leq |F(z,w) - \hat{F}(z,w)| + |\hat{F}(z,w) - \hat{g}(z,w)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + |\hat{F}(z,w) - F_m(z,w)| + |\hat{F}(z,w) - \hat{g}(z,w)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon_m + \sum_{j=m}^{\infty} |F_j(z,w) - F_{j+1}(z,w)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{m+2}}\right)\varepsilon + \sum_{j=m}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+3}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

以上より式 (1) は成立する。
ここで Lemma 1.10 より $\hat{H}(K \times I) = H(K \times I, D \times U)$ である。
よって Theorem 1.6 は示された。

2 擬凸近傍系について

Definition 2.1
$\mathbb{C}^n$ の閉集合 K が擬凸近傍系を持つとは、K の任意の近傍 U に対して K の擬凸な近傍 V が存在して $K \subset V \subset U$ となること。

Definition 2.2 (Stein 多様体)
複素多様体 M の複素部分多様体 S が *Stein* 部分多様体とは、$\mathbb{C}^r$ の複素閉部分多様体 S' が存在して、S と S' は複素同型。

Theorem 2.3 (Siu)
M を複素多様体、S を M の *Stein* 部分多様体とする。この時 S は擬凸近傍系を持つ。

特に $\mathbb{C}^n$ の複素アファイン部分集合は擬凸近傍系を持つ。

Theorem 2.4 (Kazama)
$n, m \neq 0$ とする。この時 $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{C}^{m+n}$ 内で擬凸近傍系を持たない。

Theorem 2.5
U を $\mathbb{C}$ 上の非有界な領域とする。また $D \subset \mathbb{C}$ を単位円板とする。この時 $\overline{U} \times \overline{D}$ は $\mathbb{C}^2$ 内で擬凸近傍系を持たない。

この定理の証明のために補題を一つ用意する。

Lemma 2.6
U , D は *Theorem 2.4* と同様のものとする。
また $z \in \mathbb{C}$, $0 < r < \infty$ に対し $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_0| < r\}$ とする。
まず以下の条件を満たす $z_i \in \mathbb{C}$, $0 < r_i < \infty$, $(i = 1, 2, \cdots)$ を考える。

1. $\lim_{i\to\infty} |z_i| = \infty$
2. $\overline{B(z_i, r_i)} \subset U$
3. $B(z_{i+1}, \frac{1}{2}r_{i+1}) \subset B(z_i, \frac{3}{4}r_i)$

次に $V \subset \mathbb{C}^2$ を $\overline{U} \times \overline{D}$ の擬凸近傍とする。また $z \in \overline{U}$ に対し V_z を

$$V_z = \{w \in \mathbb{C}\,;\, (z, w) \in V\}$$

とする。(明らかに V_z は $\overline{D}$ の近傍) さらに $d_V(z)$ を

$$d_V(z) = \inf\{|w - w'|\,;\, w \in \overline{D}, w' \notin V_w\}$$

とする。
この時 $\varepsilon = \min\left\{1, \inf\{d_V(z)\,;\, z \in \overline{B(z_1, r_1)}\}\right\}$ とすれば $d_V(z_i) \leq \varepsilon c^{n-1}$ となる $c \in (0,1)$ が存在する。

Proof
V は開集合、$\overline{B(z_1, r_1)}$ はコンパクトなので $\varepsilon > 0$ である。
$B(z_1, r_1) \times B(0, 1+\varepsilon) \subset V$ である。また $B(z_2, \frac{1}{2}r_2) \subset B(z_1, \frac{3}{4}r_1)$ なので $B(z_2, \frac{1}{2}r_2) \times B(0, 1+\varepsilon) \subset V$ である。従って

$$B(z_2, \frac{1}{2}r_2) \times B(0, 1+\varepsilon) \cup B(z_2, r_2) \times B(0, 1) \subset V$$

である。$B(z_2, \frac{1}{2}r_2) \times B(0, 1+\varepsilon) \cup B(z_2, r_2) \times B(0,1)$ は $(z_2, 0)$ を中心とする完全 Reinhardt 領域、V は擬凸領域なので

$$\left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,;\, |z - z_2| < r_2 \,,\, |w| < 1 + \varepsilon \,,\, |w| < (1+\varepsilon)^{(\log r_2 - \log|z - z_2|)/\log 2}\right\} \subset V$$

である。よって $B(z_2, \frac{3}{4}r_2) \times B(0, (1+\varepsilon)^a) \subset V$,(ただし $a = 2 - (\log 3)/(\log 2)$)
ここで $\varepsilon \leq 1$ より $c \in (0,1)$ が存在して $(1+\varepsilon)^a \geq 1 + c\varepsilon$ である。以上より
$B(z_2, 1 + c\varepsilon) \subset V$ である。従って $d_V(z_2) \geq c\varepsilon$
同様に $d_V(z_3) \geq c^2\varepsilon$ である。帰納的に $d_V(z_n) \geq c^{n-1}\varepsilon$ であることがわかる。
よって Lemma 2.5 は成立する。

Proof of Theorem 2.4

$\{z_i\}$, $d_V(z)$ を Lemma 2.5 と同様の条件を満たすものとする。
まず以下の条件を満たすような $g \in C([0, \infty))$ を考える。

- $g(t) > 0$
- $t \geq \max\{|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_n|\}$ ならば $g(t) < c^{n-1}e^{-n}$

$\lim_{i\to\infty}|z_i| = \infty$ より、このような g が存在することは明らか。この g を用いて、$A \subset \mathbb{C}^2$ を

$$A = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,;\, |w| < 1 + g(|z|)\}$$

とすれば A は $\overline{U} \times \overline{D}$ の近傍。
$\overline{U} \times \overline{D}$ の擬凸な近傍 V として $\overline{U} \times \overline{D} \subset V \subset A$ をみたすものが存在すると仮定する。
この時 Lemma 2.5 より $\varepsilon > 0$ が存在して $d_V(z_n) \geq c^{n-1}\varepsilon$ となる。
一方 $V \subset A$ より $d_V(z_n) < c^{n-1}e^{-n}$ である。よって $\varepsilon < e^{-n}$ である。ここで n は任意なので $\varepsilon = 0$ となる。これは ε の取り方に反する。
よって $\overline{U} \times \overline{D}$ は擬凸近傍系を持たない。

Corollary 2.7
$U \subset \mathbb{C}^n$ を非有界な領域、$V \subset \mathbb{C}^m$ を領域とする。この時 $\overline{U} \times \overline{V} \neq \mathbb{C}^{n+m}$ ならば $\overline{U} \times \overline{V}$ は擬凸近傍系を持たない。

Corollary 2.8
$U \subset \mathbb{C}$ を非有界な領域とする。この時

$$\overline{U} \times \mathbb{R} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,;\, z \in \overline{U}, \operatorname{Im} w = 0\}$$

は擬凸近傍系を持たない。

Proof
U に対して U' を $\overline{U'} \subset U$ となるような非有界な領域とする。
また a , c , $z_n \in U'$, $g \in C([0, \infty))$ を Lemma 2.5 , Theorem 2.4 の証明の時と同様に

- $a = 2 - (\log 3)/(\log 2)$
- $0 < t < 1$ ならば $(1+t)^a > 1 + ct$
- $\lim_{i\to\infty}|z_i| = \infty$

- $\overline{B(z_i, r_i)} \subset U'$
- $B(z_{i+1}, \frac{1}{2}r_{i+1}) \subset B(z_i, \frac{3}{4}r_i)$
- $g(t) > 0$
- $t \geq \max\{|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_n|\}$ ならば $g(t) < c^{n-1}e^{-n}$

となるように取る。さらに $A \subset \mathbb{C}^2$ を

$$A = \{(z, w)\,;\, |\mathrm{Im}\, w| < g(|z|)\}$$

と定義する。
$\overline{U} \times \mathbb{R}$ が擬凸近傍系を持つと仮定する。
仮定より $\overline{U} \times \mathbb{R} \subset V \subset A$ となるような $\overline{U} \times \mathbb{R}$ の擬凸近傍 V を取ることができる。
この時 $z \in U$ に対し $h_V(z)$ を

$$h_V(z) = \inf\{y\,;\, y > 0\,,\, (z, iy) \notin V\}$$

と定義する。さらに $V' \subset \mathbb{C}^2$ を

$$V' = \{(z, w) \in V\,;\, z \in U\} \cup \{(z, w) \in \mathbb{C}^2\,;\, z \in U, \mathrm{Im}\, w < 0\}$$

とすると、明らかに V' は擬凸である。また $h_V(z) = h_{V'}(z)$ が成り立つ。
ここで V' は $\overline{U'} \times \overline{B(0, -i)}$ の擬凸近傍になっている。従って

$$d_{V'}(z) = \inf\{|w - w'|\,;\, w \in \overline{D}, w' \notin V_w\}$$

とすれば Lemma 2.5 より $d_{V'}(z_n) \geq \varepsilon c^{n-1}$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する。
一方明らかに $d_{V'}(z) \leq h_{V'}(z)$ である。従って

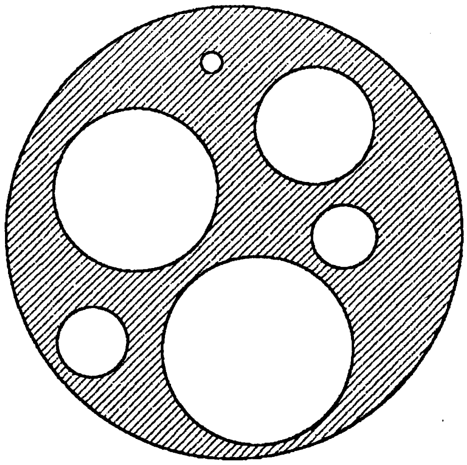
$$\varepsilon c^{n-1} \leq d_{V'}(z_n) \leq h_{V'}(z_n) = h_V(z_n) \leq g(|z_n|) < c^{n-1}e^{-n}$$

が成り立つ。(最後の不等式は $V \subset A$ より) ここで n は任意なので $\varepsilon = 0$ となる。これは矛盾。
従って $\overline{U} \times \mathbb{R} \subset V \subset A$ となる擬凸集合 V は存在しない。よって $\overline{U} \times \mathbb{R}$ は擬凸近傍系を持たない。

Notes and Remarks

現在考えているのは、より複雑な形の直積集合に対する擬凸近傍系の存在や近似定理についてである。単純なものとしては $\mathbb{C}$ のコンパクト集合 K と $\mathbb{R}$ との直積についてである。Theorem 1.6 や、Corollary 2.7 が成立しない K の例として Swiss-cheese という図形がある。これは閉円板から無数の円板集合を除いたもの

Swiss-cheese



また $\mathbb{R}^n$ の閉集合から $\mathbb{C}^m$ への連続関数 f の像が擬凸近傍系を持つための f の条件などの問題が考えられる。$\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合 K に対して $f(K)$ が擬凸近傍系を持つための十分条件として

- f は C^1 級関数
- $f^*(|dz|^2) = 0$
- K 上

$$\mathrm{rank}\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = n$$

ならば良い。しかし [2] からわかるように、この条件は必要条件ではない。
具体的には $\mathbb{R}^2$ の単位閉円盤 $\overline{D}$ を

$$f(t, s) = (t^3 + 2is, t^2 - 3its)$$

によって $\mathbb{C}^2$ に写した像 $f(\overline{D})$ が擬凸近傍系を持つか。という問題が考えられる。
この場合は原点が特異点になっている。

References

[1] T. Carleman : *Sur un thèoréme de Weiersrtass*, Ark. Math. Ast. Fys. 20 (1927), 1-5

[2] L. Hörmander , J. Wermer : *Uniform approximation on compact set in* $\mathbb{C}^n$, Math. Scand. 23 (1968), 5-21

[3] 笠原乾吉 : 複素解析 (1 変数解析関数) , 実教出版株式会社 (1978)

[4] H. Kazama : *Note on Stein neighborhoods of* $\mathbb{C}^k \times \mathbb{R}^l$, Math. Rep. Kyushu Univ. 14 (1983), no.1, 47-55

[5] S. N. Mergelyan : *Uniform approximations to functions of a complex variable*, Amer. Math. Soc. Transl. 1st. 101 (1954), 295-391

[6] 大沢健夫：多変数複素解析，岩波書店 (1998)

[7] C. Runge : *Zur theorie der eindeutigen analytischen functionen* , Acta. Math. 6 (1885), 229-244

[8] A. Sakai : *Uniform approximation by entire functions of several complex variables* , Osaka J. Math. 19 (1982), 571-575

[9] Yum-Ton Siu : *Every Stein subvariety admits a Stein neihborhood* , Invent. Math. 38 (1976), 89-100

[10] J. Wermer : *Bounded point derivations on certain Banach algebras* , J. Func. Ann. 1 (1967), 28-36

[11] J. Wermer : *Banach Algebras and Several Complex Variables* , Springer-Verlag (1976)