数理解析研究所講究録 1316 巻 2003 年 9-12

ある非線形常微分方程式の解の解析的特異性について

上智大学理工学部 内山康一 (Koichi Uchiyama)
Faculty of Science and Technology,
Sophia University

1 序

研究会の題目からは離れるが，非線形微分方程式の代数解析の一つの可能性を示唆しているのではないかと面白く思っている一例を報告させて頂く．Philippines 大学の L. Paredes 氏との共同研究である．論文 [6] として近刊予定であり，和文の解説も別の報告集 [7] に載る予定なので，詳細はそれらに譲り．主結果の他に, 論文には書いてないか書きにくいような周辺的なことをいくつか記す.

$1 < p, q < \infty$ とする．Sobolev - Poincaré の不等式の最良定数に関連して現れる p 楕円型偏微分方程式 ([4]) の 1 次元モデルとして，1 次元区間 (a, b) 上の非線形 Dirichlet 問題

$$\begin{aligned} (|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u &= 0 \qquad (1) \\ u(a) = u(b) &= 0 \end{aligned}$$

が大谷光春氏 [4], [5], 井戸川知之-大谷氏 [1], P.Lindqvist 氏 [3] 達によって研究され，式 (1) を超関数の意味で満たす解 $u \in W_0^{1,p}(a, b)$ の一意存在，非自明解の集合の決定，解の微分可能性などが主として関数解析的な方法を用いて明らかにされている.

われわれの目標は (1) の局所解の解析的特異性を決定することである．解の特異点は $u(x_0) = 0$ あるいは $u_x(x_0) = 0$ となる x_0 である．われわれの研究は，特異点の右近傍と左近傍で解の分数べき漸近展開を計算することから始まった．その結果，解は局所的に，ある解析関数に単純な特異関数 $|x - x_0|^q$ または $|x - x_0|^{\frac{p}{p-1}}$ を代入した形で表示できるという予想が立った．実際，この解析関数は原点に確定型特異点をもつ単独 2 階の Briot-Bouquet 型の非線形常微分方程式 (古典的な結果であるが，2 元連立の 1 階の常微分方程式系に直せば [2] (Chap.4. Prop. 1.1.1) の定式化をそのまま利用できる) を用いて求めらることがわかった．従って，

漸近展開は収束級数になり，展開係数も一意的に計算可能であることが従う．構成した局所解と与えられた局所解の一致を示すのに解の一意性を用いる．特異点における一意性は局所解がエネルギー等式

$$(p-1)|u_x(x)|^p/p+|u(x)|^q/q=C \tag{2}$$

を満たすことを利用して示される．

2 結果

1. 零点: $u(\sigma)=0$ かつ $A=u_x(\sigma)\neq 0$ となる点 $x_0=\sigma$ の近傍：
   方程式の対称性から $A>0$ としてよい．$1<p,q<\infty$ を満たす任意の p と q に対して, $x=\sigma$ の近傍において

   $$u(x)=(x-\sigma)F(|x-\sigma|^q)$$

   となるような解析関数 $F(\xi)$ が一意に存在する．$F(\xi)$ は $F(0)=A$ と $F'(0)=B$ を初期条件とする方程式

   $$\begin{aligned}(p-1)[F(\xi)+q\xi F'(\xi)]^{p-2}[q(q+1)F'(\xi) &+ \\ q^2\xi F''(\xi)] &+ (F(\xi))^{q-1}=0\end{aligned}$$

   の一意正則解である．
   ここで,

   $$B=\frac{-A^{q-p+1}}{q(q+1)(p-1)}$$

   である．
2. 極大(小)点: $A=u(\tau)\neq 0$ かつ $u_x(\tau)=0$ となる点 $x_0=\tau$ の近傍：
   方程式の対称性から $A>0$ としてよい．$1<p,q<\infty$ を満たす任意の p と q に対して，$x=\tau$ の近傍において

   $$u(x)=G\left(|x-\tau|^{\frac{p}{p-1}}\right)$$

   となるような $G(\xi)$ が一意に存在する．$G(\xi)$ は $G(0)=A$ かつ $G'(0)=B$ を初期条件とする非線形方程式

   $$\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}(-G'(\xi))^{p-2}\left[G'(\xi)+p\xi G''(\xi)\right]+(G(\xi))^{q-1}=0$$

の一意正則解である.
ただし,

$$B = -\frac{p-1}{p} A^{\frac{q-1}{p-1}}$$

である.

3. 非特異点: $u(x_0) \neq 0$ かつ $u_x(x_0) \neq 0$ ならば u は $x = x_0$ で実解析的である.

解の特異性がこれだけ具体的にわかってしまうと, p, q に依存して決まる解の微分可能性 [4][5], 解の特異性が消滅して実解析的になる p, q の条件 [1] などが明快に再確認できる.

3 将来の展望

多変数の p 楕円型偏微分方程式は

$$\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u(x)) + |u|^{q-2}u = 0.$$

である. $u(x)$ が回転不変のとき, すなわち, $r = |x|$ と置くとき, 対称性をもつ解 $U(r) = u(x)$ は動径方向の p 楕円型微分方程式

$$(r^{n-1}|U_r|^{p-2}U_r)_r + r^{n-1}|U|^{q-2}U = 0,$$

を満たす. $n = 1$ だと, 本論で論じた問題になる. 一般の n ではエネルギー等式 (2) が成立しないので, 局所一意性の証明の方法を変更する必要がある. 非線形解析方程式を満たす F, G も別の形 (多変数) を想定し, 少し拡張した Briot-Bouquet 型の定理を用意すれば十分と思われる. 回転対称性を仮定しない真に多変数の場合はその後の課題である.

さらに, 話を一般的化して可能性をふくらませてみたい. 未知関数の絶対値を含む方程式のように, 従来, 複素解析の手法がなじまないと思われ (?), 実解析的あるいは関数解析的に研究されて来た非線形偏微分方程式の問題にも, 最近研究の進んで来た非線形複素解析的微分方程式で統制される関数部分と意外と単純な (と期待される非複素解析的) 特異関数部分とに分解することによって, 特異性を具体的に, 代数解析的に解明できるのではないか. さまざまな関数空間の元として把握される非線形方程式の弱解は複素解析的にどのような特異性をもつのであろうか?

参考文献

[1] T. Idogawa and M. Ôtani. Analyticity and the best possible constants for Sobolev - Poincaré inequalities, Advances in Math. Sci. and Appl., 4 (1994), 71-78

[2] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida. "From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions." Vieweg, Braunschweig, 1991

[3] P. Lindqvist. Note on a Nonlinear Eigenvalue Problem, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 23 (1993), 281-288

[4] M. Ôtani. A Remark on Certain Nonlinear Elliptic Equations, Proc. Fac. Sci. Tokai University, 19 (1984), 23-28

[5] M. Ôtani. On certain second order ordinary differential equations associated with Sobolev-Poincaré-type inequalities, Nonlinear Analysis, Theory and Applications, 8 (1984), 1255-1270

[6] L. Paredes and K. Uchiyama. Analytic Singularities of Solutions to Certain Nonlinear Ordinary Differential Equations associated with p-Laplacian, Tokyo J. Math. (to appear)

[7] 内山康一「pラプラシアンに同伴する非線形常微分方程式の解の解析的特異性について」研究集会「数学解析の望ましい姿を探って」九州大学，２００２年１２月