

## $P_{II}$ - $P_{IV}$ hierarchy の WKB 解析

京都大学大学院理学研究科 西川 享宏 (Yukihiro Nishikawa)

Faculty of Science,

Kyoto University

### 1 序文

[KT1],[KT2],[KT3],[AKT1],[T]において, Painlevé 方程式に対する exact WKB 解析の手法が構築され, exact WKB 解析が Painlevé 方程式の解を考える際, より詳しくは解の接続公式を考える際に非常に有効に用いられることが具体的に述べられている. その議論においては, その両立条件として Painlevé 方程式が現れる Lax pair の存在が重要な役割を果たしていた. 具体的に言うと次のようになる. Lax pair の片側である Schrödinger 方程式の係数に Painlevé 方程式の形式解を代入したものを考えたとき, Painlevé 方程式の独立変数 (Schrödinger 方程式の変形パラメータ) を Painlevé 方程式の Stokes 曲線を越えて変化させると Schrödinger 方程式の Stokes 曲線の形状は不連続に変化する. 他方, 一般論の保証するモノドロミーの不変性によりそのモノドロミーおよび Stokes 係数は変化しない. この2つの事実を組み合わせれば Painlevé 関数の接続公式を導くことができる. この事実を考慮すると, 上述した論文において述べられている Painlevé 方程式に対する exact WKB 解析の高階非線形微分方程式への拡張を考える際, Lax pair を持つ高階非線形微分方程式を研究対象とすることが自然であると思われる. そこでこの論文では, [GJP]において構成された Lax pair をもつ非線形微分方程式の hierarchy, 即ち  $P_{II}$  hierarchy,  $P_{IV}$  hierarchy への exact WKB 解析的なアプローチを行なう. 具体的には  $P_{II}$  hierarchy,  $P_{IV}$  hierarchy に large parameter  $\eta$  を導入し, その 0-パラメータ解を構成した後, 各方程式の Stokes 幾何学と, それぞれに対応する線形方程式 (Lax pair の片側) の Stokes 幾何学との関係を示すことをこの論文の目標としている.

以下, 第2節では [GJP]の内容に沿って記号の整理をしながらこの論文で扱う  $P_{II}$  hierarchy,  $P_{IV}$  hierarchy 並びにその Lax pair を導く. 第3節以降がこの論文のオリジナルな部分であり, 第3節では  $P_{II}$  hierarchy の WKB 解析を, 第4節, 第5節では  $P_{IV}$  hierarchy の WKB 解析を行なう. 第6節では計算機を使って  $P_{II}$  hierarchy の2番目の方程式の Stokes 曲線を具体的に調べる. まず, 小節 6.2, 6.3 ではパラメータ  $t$  が非線形方程式の turning point の近傍を動く時  $t$  を変形パラメータとする Schrödinger 方程式の Stokes 図形の形状がどのように変化するかを調べる. 小節 6.2 の結果は通常の Painlevé 第2方程式  $P_{II}$  (即ち  $P_{II}$  hierarchy の最初の方程式) の場合と同様の現象, 即ち,  $t$  が非線形方程式の Stokes 曲線を横切る時 Schrödinger 方程式の simple turning point と double turning point を結ぶ Stokes 曲線が現れる, が起きることを示している. 小節 6.3 でも Schrödinger 方程式の Stokes 図形の形状に関して本質的には同様の現象が観察される.

(この場合は double turning point 同士が結ばれる; 通常の  $P_{II}$  の場合は Schrödinger 方程式の double turning point が 1 個しかなかったためこれは起こり得なかったわけである。) この 2 小節の結果は通常の  $P_{II}$  の場合の自然な拡張と考えられるが, 小節 6.4 の結果は全く新しい; 非線形方程式の Stokes 曲線の交点の近くでは,  $t$  が Stokes 曲線にのっていないにも関わらず対応する Schrödinger 方程式の turning point 同士が Stokes 曲線で結ばれることがある. しかも詳しく調べるとそのような anomaly が生じるのは交点から出る “半曲線”(即ち, 曲線の一部, つまり “曲がった半直線”) 上に限られることもわかる. (青木貴史先生が Painlevé 方程式の時にされた計算機実験によると, 通常の Painlevé 方程式の場合はこのような現象は起こらないとのことである.) 理論的説明はまだ出ていないが, この半曲線は [BNR] が 3 階線形方程式の Stokes 現象の研究に際して発見したいわゆる “新しい Stokes 曲線” の一つであると考えられる. このような点での解析は今後の大きな課題と思われる. 最後に, 付録では第 2 節で省略した計算等の補足をした.

この論文を書くにあたり, 懇切丁寧に御指導頂いた河合隆裕先生, 竹井義次先生, 小池達也先生に心からの感謝を捧げたい.

## 2 $P_{II}$ hierarchy 並びに $P_{IV}$ hierarchy の導出

### 2.1 generalized $P_{IV}$ - $P_{II}$ hierarchy について

[GJP] では, 一組の偏微分方程式の system と対応する Lax pair を元に一定の操作を繰り返し行なうことにより, 偏微分方程式の hierarchy である generalized (2+1)-dimensional DWW hierarchy と対応する Lax pair の hierarchy が構成されること, さらにこの方程式の reduction を考えることにより常微分方程式の hierarchy である generalized  $P_{IV}$ - $P_{II}$  hierarchy と対応する Lax pair の hierarchy が得られることが示されていた. この節ではこの generalized  $P_{IV}$ - $P_{II}$  hierarchy を出発点とし,  $P_{II}$  hierarchy 並びに  $P_{IV}$  hierarchy を導出することを目標とする.

まず, generalized  $P_{IV}$ - $P_{II}$  hierarchy とは

$$R^n \mathbf{u}_t + g_{n-1} R^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + g_n R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + g_{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_t u \partial_t^{-1} - \partial_t & 2 \\ 2v + v_t \partial_t^{-1} & u + \partial_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$u, v$  は従属変数,  $t$  は独立変数,

$g_{n-1}, g_n, g_{n+1}$  は定数で  $g_{n-1}, g_n, g_{n+1}$  のどれかは 0 ではない

という方程式の hierarchy ( $n \geq 1$ ) であった. ここで, 付録 (命題 A.1) で示すように  $u, v$  の微分多項式  $\mathcal{K}_i, \mathcal{L}_i$  ( $i \geq 0$ ) を

$$\partial_t \mathbf{K}_{i+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_t u - \partial_t^2 & 2\partial_t \\ 2v\partial_t + v_t & u\partial_t + \partial_t^2 \end{pmatrix} \mathbf{K}_i, \quad \mathbf{K}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_i \\ \mathcal{L}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

により帰納的に定義すれば(ただし, 各ステップでの左辺の  $\partial_t$  により生じる定数を足す不定性については, 適当に正規化しておくものとする.),  $R^{i-1}\mathbf{u}_t$  を

$$R^{i-1}\mathbf{u}_t = \partial_t \mathbf{K}_i, \quad (i \geq 1)$$

という形で書くことができ,  $R^i\mathbf{u}_t$  が  $\partial_t^{-1}$  を含むことなく  $u, v$  の微分多項式として順次計算される. ここで,  $\mathbf{K}_i$  の最初の幾つかを紹介しておく.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^2 + 2v - u_t \\ 2uv + v_t \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_3 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} u^3 + 6uv - 3uu_t + u_{tt} \\ 3u^2v + 3v^2 + 3uv_t + v_{tt} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_4 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} u^4 + 12u^2v + 6v^2 - 6u_tv^2 - 6u_tv + 3u_t^2 + 4uu_{tt} + 2v_{tt} - u_{ttt} \\ 4u^3v + 12uv^2 + 6u^2v_t + 6vv_t + 2u_tv_t + 2u_{tt}v + 4uv_{tt} + v_{ttt} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

なお, この hierarchy (1) において  $g_{n-1} = g_n = 0, g_{n+1} \neq 0$  の場合から  $n = 1$  のとき  $P_{II}$  と同値な方程式が得られる hierarchy ( $P_{II}$  hierarchy) が,  $g_{n-1} = 0, g_n \neq 0$  の場合から  $n = 1$  のとき  $P_{IV}$  と同値な方程式が得られる hierarchy ( $P_{IV}$  hierarchy) が導かれるのであった. 一方, 上述の記号  $\mathcal{K}_i, \mathcal{L}_i$  を使うと, [GJP] で構成された generalized  $P_{IV}$ - $P_{II}$  hierarchy に対する Lax pair は

$$\left( \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 g_{n+1-i} x^i \right) \Psi_x = A \Psi \quad (3)$$

$$\Psi_t = B \Psi \quad (4)$$

と書ける. 即ち, (3) と (4) の両立条件として非線形方程式 (1) が現れる. ここで,

$$A = A^{(n)} + A^{(-1)},$$

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}((2x-u)S_n + S_{n,t}) & S_n \\ -\frac{1}{2}((2x-u)S_n + S_{n,t} + \mathcal{K}_{n+1})_t - vS_n & \frac{1}{2}((2x-u)S_n + S_{n,t}) \end{pmatrix},$$

$$A^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 g_{n+1-i} x^i - \frac{1}{4} g_n (tu)_t - \\ -\frac{1}{8} g_{n-1} ((tu^2 - tu_t - u)_t + 4v + 2tv_t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -x + \frac{u}{2} & 1 \\ -v & x - \frac{u}{2} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix},$$

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n x^{n-j} \mathcal{K}_j$$

とした. さらに, [GJP] ではこの hierarchy が (1) の左辺に

$$R^i \mathbf{u}_t \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

の線形結合を付け加えた hierarchy

$$R^n \mathbf{u}_t + \sum_{i=0}^{n-1} c_i R^i \mathbf{u}_t + g_{n-1} R^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + g_n R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + g_{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

ただし  $c_i$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ) は定数

に拡張できることにも触れられていた. なお, (3),(4) を参考にすると, この方程式に対する Lax pair は

$$\left( \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 g_{n+1-i} x^i \right) \Psi_x = \hat{A} \Psi \quad (6)$$

$$\Psi_t = B \Psi \quad (7)$$

で与えられることがわかる. ここで,  $A^{(n)}, A^{(-1)}, B, S_n$  は上述のものと同じ記号とし,

$$\hat{A} = A^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} c_i A^{(i)} + A^{(-1)},$$

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} ((2x-u) S_i + S_{i,t}) & S_i \\ -\frac{1}{2} ((2x-u) S_i + S_{i,t} + \mathcal{K}_{i+1})_t - v S_i & \frac{1}{2} ((2x-u) S_i + S_{i,t}) \end{pmatrix},$$

$$S_i = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^i x^{i-j} \mathcal{K}_j \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

とおいた. 以下ではこの hierarchy (5) とその Lax pair (6),(7) について考えることにし, 次小節以降ではこの hierarchy において  $g_{n-1} = g_n = 0, g_{n+1} \neq 0$  とした時の話,  $g_{n-1} = 0, g_n \neq 0$  とした時の話をまとめることにする.

## 2.2 $P_{II}$ hierarchy の導出

この小節では, (5) で,  $g_{n-1} = g_n = 0, g_{n+1} \neq 0$  とした hierarchy

$$R^n \mathbf{u}_t + \sum_{i=0}^{n-1} c_i R^i \mathbf{u}_t + g_{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

から,  $P_{II}$  hierarchy とその Lax pair が導かれる様子をまとめる. ここで  $c_{n-1}$  は一般性を失わず 0 とできる (付録参照) ので, ここでは

$$R^n \mathbf{u}_t + \sum_{i=0}^{n-2} c_i R^i \mathbf{u}_t + g_{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

を取り扱うことにする. さて,  $\partial_t \mathbf{K}_{i+1} = R^i \mathbf{u}_t$  よりこの方程式は一階積分することが出来て, 積分定数を  $\gamma, \delta - \frac{1}{2}g_{n+1}$  とすると

$$\partial_t^{-1} R^n \mathbf{u}_t + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \partial_t^{-1} R^i \mathbf{u}_t + g_{n+1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta - \frac{1}{2}g_{n+1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

が得られる. [GJP] では, この式で  $c_i = 0$  ( $0 \leq i \leq n-2$ ) としたものを  $P_{II}$  hierarchy と呼んでおり, 特に  $n=1$  のとき Painlevé 第2方程式と同値な system が得られるのであった. この式(10)では,  $g_{n+1} \neq 0$  より,  $t$  を適当に平行移動すると一般性を失わず  $\gamma = 0$  とできる. よって, 以下では  $\gamma = 0$  として

$$\partial_t^{-1} R^n \mathbf{u}_t + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \partial_t^{-1} R^i \mathbf{u}_t + g_{n+1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta - \frac{1}{2}g_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

あるいは, これを  $\mathbf{K}_i = {}^t(\mathcal{K}_i, \mathcal{L}_i)$  を用いて書き直した式

$$\mathbf{K}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \mathbf{K}_{i+1} + g_{n+1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta - \frac{1}{2}g_{n+1} \end{pmatrix} \quad (12)$$

を考える. この論文では言葉を乱用してこの拡張された方程式(11),(12)の方を  $P_{II}$  hierarchy と呼ぶこととする. この方程式においても  $n=1$  のとき Painlevé 第2方程式と同値な system が得られる.

一方, (12) を使って, (6),(7) から  $u, v$  の  $t$  についての  $n$  階微分の項を消去すると,

$$\frac{1}{2}g_{n+1} \Psi_x = A_{II} \Psi \quad (13)$$

$$\Psi_t = B \Psi, \quad (14)$$

$$A_{II} = A_{II}^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i A_{II}^{(i)} + A_{II}^{(-1)},$$

$$A_{II}^{(i)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}((2x-u)S_i + S_{i,t} + \mathcal{K}_{i+1}) & S_i \\ -\frac{1}{2}((2x-u)S_i + S_{i,t} + \mathcal{K}_{i+1})_t - vS_i + \mathcal{L}_{i+1} & \frac{1}{2}((2x-u)S_i + S_{i,t} + \mathcal{K}_{i+1}) \end{pmatrix} \quad (0 \leq i \leq n),$$

$$A_{II}^{(-1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}g_{n+1}t & 0 \\ -\delta + \frac{1}{2}g_{n+1} & \frac{1}{2}g_{n+1}t \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -x + \frac{u}{2} & 1 \\ -v & x - \frac{u}{2} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix},$$

$$S_i = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^i x^{i-j} \mathcal{K}_j \quad (0 \leq i \leq n)$$

が得られるが, この式が (11), (12) の Lax pair になっている. 実際に, この 2 式の両立条件を計算すると

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - B, \frac{g_{n+1}}{2} \frac{\partial}{\partial x} - A \right] \quad (15)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \mathcal{L}_{i+1} - \delta + \frac{1}{2} g_{n+1} & \mathcal{K}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \mathcal{K}_{i+1} + g_{n+1} t \\ v (\mathcal{K}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \mathcal{K}_{i+1} + g_{n+1} t) + (2x - u) \cdot (\mathcal{L}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \mathcal{L}_{i+1} - \delta + \frac{1}{2} g_{n+1}) & -\mathcal{L}_{n+1} - \sum_{i=0}^{n-2} c_i \mathcal{L}_{i+1} + \delta - \frac{1}{2} g_{n+1} \end{pmatrix}$$

となる (付録参照).

### 2.3 $P_{IV}$ hierarchy I の導出

この小節と次小節では, (5) で,  $g_{n-1} = 0, g_n \neq 0$  とした hierarchy

$$R^n \mathbf{u}_t + \sum_{i=0}^{n-1} c_i R^i \mathbf{u}_t + g_n R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + g_{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

を扱う. とくに, この小節ではこの hierarchy から  $P_{IV}$  hierarchy I とその Lax pair が導かれる様子をまとめる. ここで,  $c_0, g_{n+1}$  は一般性を失わず 0 とできる (付録参照) ので, 以下では

$$R^n \mathbf{u}_t + \sum_{i=1}^{n-1} c_i R^i \mathbf{u}_t + g_n R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

を取り扱うことにする. この式については [K] で用いられている変換

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Phi[U, V] = \begin{pmatrix} U \\ UV - V^2 + V_t \end{pmatrix} \quad (18)$$

を施して, 次のようにして “一階積分した” 式を考えられる; 作用素  $R$  は元々

$$R = \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1^{-1}$$

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \partial_t \\ \partial_t & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_t & \partial_t u - \partial_t^2 \\ u\partial_t + \partial_t^2 & v\partial_t + \partial_t v \end{pmatrix}$$

と分解できていたが, この変換 (18) を使うと  $\mathcal{B}_2$  はさらに

$$\mathcal{B}_2 = \mathcal{J} \mathcal{B} \mathcal{J}^\dagger,$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_t & \partial_t \\ \partial_t & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathcal{J} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ V & U - 2V + \partial_t \end{pmatrix} : \Phi \text{ の Frechét 微分}, \\
\mathcal{J}^\dagger &= \begin{pmatrix} 1 & V \\ 0 & U - 2V - \partial_t \end{pmatrix} : \mathcal{J} \text{ の formal adjoint}
\end{aligned}$$

と分解できることがわかる ([K], (3.26) 式). よって,  $\mathcal{L}_i, \mathcal{K}_i$  について変換 (18) を施した後の式も同じ記号で表すことにすると, (17) に変換 (18) を施した式は

$$\mathcal{J}B\mathcal{J}^\dagger \left[ \begin{pmatrix} \mathcal{L}_n \\ \mathcal{K}_n \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \begin{pmatrix} \mathcal{L}_i \\ \mathcal{K}_i \end{pmatrix} + g_n \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. そこで,

$$B\mathcal{J}^\dagger \left[ \begin{pmatrix} \mathcal{L}_n \\ \mathcal{K}_n \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \begin{pmatrix} \mathcal{L}_i \\ \mathcal{K}_i \end{pmatrix} + g_n \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考える. これは (17) の特殊解を考えることに相当する. この式は一階積分することが出来て, 積分定数を  $\alpha, \beta$  として積分すると,

$$\mathcal{J}^\dagger \left[ \begin{pmatrix} \mathcal{L}_n \\ \mathcal{K}_n \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \begin{pmatrix} \mathcal{L}_i \\ \mathcal{K}_i \end{pmatrix} + g_n \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (19)$$

が得られる. この hierarchy を  $P_{IV}$  hierarchy I と呼ぶことにする.

一方, (19) を使って, (6), (7) に変換 (18) を施した式から  $U, V$  の  $t$  についての  $n$  階微分の項を消去すると,

$$\frac{1}{2} g_n x \Psi_x = A_{IV} \Psi \quad (20)$$

$$\Psi_t = B \Psi, \quad (21)$$

$$A_{IV} = A_{IV}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i A_{IV}^{(i)} + A_{IV}^{(-1)} + A_{IV}^{(-2)},$$

$$A_{IV}^{(i)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} ((2x - U) S_i + S_{i,t}) & S_i \\ -\frac{1}{2} ((2x - U) S_i + S_{i,t} + \mathcal{K}_{i+1})_t - v S_i & \frac{1}{2} ((2x - U) S_i + S_{i,t}) \end{pmatrix} \quad (1 \leq i \leq n),$$

$$A_{IV}^{(-1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} (2x - U) g_n t - \frac{1}{4} g_n & \frac{1}{2} g_n t \\ -\frac{1}{2} g_n t v & \frac{1}{4} (2x - U) g_n t + \frac{1}{4} g_n \end{pmatrix},$$

$$A_{IV}^{(-2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} F & 0 \\ \frac{1}{2} G_t + \frac{V}{2} F + 2xG & \frac{1}{4} F \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -x + \frac{U}{2} & 1 \\ -v & x - \frac{U}{2} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix},$$

$$S_i = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^i x^{i-j} \mathcal{K}_j \quad (0 \leq i \leq n),$$

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = (\mathcal{F}')^\dagger \left[ \begin{pmatrix} \mathcal{L}_n \\ \mathcal{K}_n \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \begin{pmatrix} \mathcal{L}_i \\ \mathcal{K}_i \end{pmatrix} + g_n \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$v = UV - V^2 + V_t$$

が得られるが、この式が (19) の Lax pair になっている。実際に、この2式の両立条件を計算すると

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - B, \frac{g_n}{2} x \frac{\partial}{\partial x} - A \right] \quad (22)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} [\mathcal{K}_{n+1,t} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathcal{K}_{i+1,t} + \frac{g_n}{2} (Ut)_t] + \frac{1}{4} F_t + \frac{1}{2} G_t + \frac{1}{2} V F + 2xG & \frac{1}{2} F \\ \left[ \mathcal{L}_{n+1,t} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathcal{L}_{i+1,t} + \frac{g_n}{2} (2v + v_t t) \right] + \frac{1}{2} [\mathcal{K}_{n+1,t} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathcal{K}_{i+1,t} + \frac{g_n}{2} (Ut)_t] - \frac{1}{4} F_t - \frac{1}{2} G_t - \frac{1}{2} V F - 2xG & \end{pmatrix}$$

とな(付録参照)。

次小節では、この hierarchy を利用して (17) の第一積分が導かれることを示す。

## 2.4 $P_{IV}$ hierarchy II の導出

前小節の最後に述べたように、 $P_{IV}$  hierarchy I を用いて (17) の第一積分を求め、 $P_{IV}$  hierarchy II とその Lax pair を導く。

まず、 $K_n, L_n$  を

$$K_n = \mathcal{K}_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathcal{K}_i + g_n t$$

$$L_n = \mathcal{L}_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathcal{L}_i$$

とおくと、前小節で定義した  $P_{IV}$  hierarchy I は、

$$\begin{cases} L_n + V K_n = \alpha \\ (U - 2V - \partial_t) K_n = \beta \end{cases}$$



となる. これを  $U, V$  について解いて,

$$\begin{cases} U = \frac{2\alpha + \beta - 2L_n + K_{n,t}}{K_n} \\ V = \frac{\alpha - L_n}{K_n} \end{cases}$$

を得る. これを  $u, v$  を  $U, V$  に変換した式,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ UV - V^2 + V_t \end{pmatrix}$$

に代入して整理すると,

$$\begin{cases} (\partial_t - u)K_n - 2L_n = -2\alpha - \beta \\ -(L_n)^2 + (2\alpha + \beta)L_n + L_{n,t}K_n + vK_n^2 = \alpha^2 + \alpha\beta \end{cases}$$

となり,

$$\begin{aligned} I_n &= K_{n,t} - 2L_n - uK_n \\ J_n &= K_n L_{n,t} + vK_n^2 + L_n^2 - K_{n,t}L_n + uK_n L_n \end{aligned}$$

が定数となることがわかる. この二式が (17) の第一積分であることは, 実際にこの二式を  $t$  で微分して,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} I_n \\ J_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2L_n & 2K_n \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} K_{n,t} \\ L_{n,t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2L_n & 2K_n \end{pmatrix} \left[ R^n \mathbf{u}_t + \sum_{i=1}^{n-1} c_i R^i \mathbf{u}_t + g_n R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることよりわかる. よって, 積分定数を  $\gamma + g_n, \delta + \frac{g_n}{2}\gamma$  として, (19) と同値な系,

$$\begin{cases} K_{n,t} = 2L_n + uK_n + \gamma + g_n \\ L_{n,t} = \frac{1}{K_n} (-vK_n^2 - L_n^2 + K_{n,t}L_n - uK_n L_n + \delta + \frac{g_n}{2}\gamma) \end{cases} \quad (23)$$

が得られる. この hierarchy で  $c_i = 0$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) としたものが [GJP] の  $P_{IV}$  hierarchy で  $g_{n+1} = 0$  としたものに对应するが, ここでは (23) を  $P_{IV}$  hierarchy II と呼ぶことにする. 特に, この hierarchy において  $n=1$  の時を考えると, Painlevé 第4方程式と同値な system が得られる.

一方, (23) を使って (6), (7) から  $u, v$  の  $t$  についての  $n$  階微分の項を消去すると,

$$\frac{g_n}{2} x \Psi_x = A_{IV} \Psi \quad (24)$$

$$\Psi_t = B \Psi, \quad (25)$$

$$A_{IV'} = A_{IV'}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i A_{IV'}^{(i)} + A_{IV'}^{(-1)} + A_{IV'}^{(-2)},$$

$$A_{IV'}^{(i)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}((2x-u)S_i + S_{i,t} + \mathcal{K}_{i+1}) & S_i \\ -\frac{1}{2}((2x-u)S_i + S_{i,t} + \mathcal{K}_{i+1})_t - vS_i & \frac{1}{2}((2x-u)S_i + S_{i,t} + \mathcal{K}_{i+1}) \end{pmatrix} \quad (1 \leq i \leq n),$$

$$A_{IV'}^{(-1)} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{4} - \frac{x}{2}g_n t - \frac{g_n}{4} & -\frac{1}{2}g_n t \\ -\frac{v}{2}g_n t & \frac{\gamma}{4} + \frac{x}{2}g_n t + \frac{g_n}{4} \end{pmatrix},$$

$$A_{IV'}^{(-2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{K_n L_{n,t} + vK_n^2 - L_n^2 - (\gamma + g_n)L_n - \delta - \frac{g_n}{2}\gamma}{K_n} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -x + \frac{u}{2} & 1 \\ -v & x - \frac{u}{2} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix},$$

$$S_i = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^i x^{i-j} \mathcal{K}_j \quad (0 \leq i \leq n)$$

が得られるが<sup>3</sup>, この式が<sup>3</sup> (23) の Lax pair になっている. 実際に, この2式の両立条件を計算すると

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - B, \frac{g_n}{2} x \frac{\partial}{\partial x} - A \right] \quad (26)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{K_n L_{n,t} + vK_n^2 - L_n^2 - (\gamma + g_n)L_n - \delta - \frac{g_n}{2}\gamma}{K_n} & \frac{1}{2}(uK_n - K_{n,t} + 2L_n + \gamma + g_n) \\ \mathcal{L}_{n+1,t} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathcal{L}_{i+1,t} + \frac{g_n}{2} v t + g_n v + \frac{v}{2}(uK_n - K_{n,t} + 2L_n + \gamma + g_n) + (2x - u + \partial_t) \cdot & \frac{K_n L_{n,t} + vK_n^2 - L_n^2 - (\gamma + g_n)L_n - \delta - \frac{g_n}{2}\gamma}{K_n} \\ \frac{K_n L_{n,t} + vK_n^2 - L_n^2 - (\gamma + g_n)L_n - \delta - \frac{g_n}{2}\gamma}{K_n} & \end{pmatrix}$$

となる (付録参照).

以下ではこの第2節においてまとめた hierarchy 達に対して large parameter  $\eta$  を導入し WKB 解析を行っていく.

### 3 large parameter を持つ $P_{II}$ hierarchy の WKB 解析

この節では, 前節で導出した  $P_{II}$  hierarchy の WKB 解析を行なう. まず, 小節 3.1 で  $P_{II}$  hierarchy と対応する Lax pair に large parameter  $\eta$  を導入し, 小節 3.2 ではその  $\eta$  を含んだ非線形方程式に対して,  $\eta$  の負べきに関する形式的べき級数解 (0-パラメータ解) を構成する. そして, 小節 3.3 ではその 0-パラメータ解を Lax pair の係数に代入した式と非線形方程式との関係を考える. 最後に, 小節 3.4 では非線形方程式の Stokes 幾何学と, それに対応する線形方程式 (Lax pair の片側) の Stokes 幾何学との関係を示す.

### 3.1 large parameter の導入

この小節では  $P_{II}$  hierarchy (11),(12) とそれに対応する Lax pair (13),(14) に large parameter  $\eta$  を導入することを目標とする. まず, Lax pair に注目し, Lax pair に large parameter を入れた式が線形方程式の WKB 解析の議論の枠組に入るようにしたい. 今の場合, Lax pair の式が一階の system であるから, (13),(14) に large parameter を入れた式は  $\eta$  について 0 次から始まる負べきの級数を成分に持つ  $2 \times 2$  行列  $\tilde{A}, \tilde{B}$  を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g_{n+1}\Psi_x &= \eta\tilde{A}\Psi \\ \Psi_t &= \eta\tilde{B}\Psi \end{aligned}$$

という形でかけていけばよい. 又, WKB 解析においては large parameter に関して最高次の項が非常に大きな役割を果たすことを考えれば, 右辺の  $\eta$  についての一次の項ができるだけ多くなるようにしておきたい. この方針で考えると, まず (14) には

$$\begin{aligned} t &\mapsto t\eta^T, & u &\mapsto u\eta^{1-T}, & v &\mapsto v\eta^{2(1-T)}, \\ x &\mapsto x\eta^{1-T}, & \psi &\mapsto \psi, & \varphi &\mapsto \varphi\eta^{1-T} \end{aligned}$$

で large parameter を入れるのが適切であると考えられる. (ただし  $T$  は任意定数.) さらに, このようにして  $\mathbf{K}_{i+1} = {}^t(\mathcal{K}_{i+1}, \mathcal{L}_{i+1})$  に large parameter を入れた式が,

$$\mathcal{K}_{i+1} \mapsto \eta^{(i+1)(1-T)}\tilde{\mathcal{K}}_{i+1}, \quad \mathcal{L}_{i+1} \mapsto \eta^{(i+2)(1-T)}\tilde{\mathcal{L}}_{i+1}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_{i+1} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} \\ \tilde{\mathcal{L}}_{i+1} \end{pmatrix}$$

(ただし,  $\tilde{\mathcal{K}}_{i+1}, \tilde{\mathcal{L}}_{i+1}$  は  $\eta$  の 0 次から始まる負べきの級数) という形で書けることを用いて, (13) についても (14) のときと同様の考察をすると, 他の記号についても

$$\begin{aligned} g_{n+1} &\mapsto g_{n+1}\eta^{(n+1)(1-T)-T}, & \delta &\mapsto \delta\eta^{(n+2)(1-T)}, \\ c_i &\mapsto c_i\eta^{(n-i)(1-T)} \quad (0 \leq i \leq n-2) \end{aligned}$$

として large parameter  $\eta$  を入れるのが適切であると考えられる. このようにして (13),(14) に large parameter  $\eta$  を導入した式は

$$\frac{1}{2}g_{n+1}\Psi_x = \eta\tilde{A}_{II}\Psi \tag{27}$$

$$\Psi_t = \eta\tilde{B}\Psi \tag{28}$$

となる. ここで

$$\tilde{A}_{II} = \tilde{A}_{II}^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \tilde{A}_{II}^{(i)} + \tilde{A}_{II}^{(-1)},$$

$$\tilde{A}_{II}^{(i)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \left( (2x-u) \tilde{S}_i + \tilde{S}_{i,t} \eta^{-1} + \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} \right) & \tilde{S}_i \\ -\frac{1}{2} \eta^{-1} \left( (2x-u) \tilde{S}_i + \tilde{S}_{i,t} \eta^{-1} + \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} \right)_t - & \frac{1}{2} \left( (2x-u) \tilde{S}_i + \tilde{S}_{i,t} \eta^{-1} + \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} \right) \\ -v \tilde{S}_i + \tilde{\mathcal{L}}_{i+1} & \end{pmatrix} \quad (0 \leq i \leq n),$$

$$\tilde{A}_{II}^{(-1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} g_{n+1} t & 0 \\ -\delta + \frac{\eta^{-1}}{2} g_{n+1} & \frac{1}{2} g_{n+1} t \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} -x + \frac{u}{2} & 1 \\ -v & x - \frac{u}{2} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{S}_i = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^i x^{i-j} \tilde{\mathcal{K}}_j$$

とした。

次に、この方法で非線形方程式 (11) に large parameter を入れて整理すると、

$$\begin{aligned} & \partial_t^{-1} \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} \partial_t u \partial_t^{-1} - \partial_t \eta^{-1} & 2 \\ 2v + v_t \partial_t^{-1} & u + \partial_t \eta^{-1} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \\ & + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \partial_t^{-1} \frac{1}{2^i} \begin{pmatrix} \partial_t u \partial_t^{-1} - \partial_t \eta^{-1} & 2 \\ 2v + v_t \partial_t^{-1} & u + \partial_t \eta^{-1} \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} g_{n+1} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta - \frac{\eta^{-1}}{2} g_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

となり、この式は先ほど定義した  $\tilde{\mathcal{K}}_{i+1}, \tilde{\mathcal{L}}_{i+1}$  を使うと

$$\tilde{\mathcal{K}}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} + g_{n+1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta - \frac{\eta^{-1}}{2} g_{n+1} \end{pmatrix} \quad (30)$$

と書くことも出来る。以上により、 $P_{II}$  hierarchy と対応する Lax pair に large parameter が導入された。

最後に、次小節以降のためこの小節で定義した  $\tilde{\mathcal{K}}_{i+1}, \tilde{\mathcal{L}}_{i+1}$  についてももう少し詳しく調べておく。まず、 $\mathcal{K}_{i+1}, \mathcal{L}_{i+1}$  の定義より  $\tilde{\mathcal{K}}_{i+1}, \tilde{\mathcal{L}}_{i+1}$  は

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} \\ \tilde{\mathcal{L}}_{i+1} \end{pmatrix} = \partial_t^{-1} \frac{1}{2^i} \begin{pmatrix} \partial_t u \partial_t^{-1} - \partial_t \eta^{-1} & 2 \\ 2v + v_t \partial_t^{-1} & u + \partial_t \eta^{-1} \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \quad (31)$$

と書くこともできる。よって  $\tilde{\mathcal{K}}_{i+1}, \tilde{\mathcal{L}}_{i+1}$  は  $\eta$  について 0 次から  $-i$  次までのべき級数になっており

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} &= \tilde{\mathcal{K}}_{i+1,0} + \eta^{-1} \tilde{\mathcal{K}}_{i+1,1} + \eta^{-2} \tilde{\mathcal{K}}_{i+1,2} + \cdots + \eta^{-i} \tilde{\mathcal{K}}_{i+1,i} \\ \tilde{\mathcal{L}}_{i+1} &= \tilde{\mathcal{L}}_{i+1,0} + \eta^{-1} \tilde{\mathcal{L}}_{i+1,1} + \eta^{-2} \tilde{\mathcal{L}}_{i+1,2} + \cdots + \eta^{-i} \tilde{\mathcal{L}}_{i+1,i} \end{aligned}$$

(ただし,  $\tilde{\mathcal{K}}_{i+1,k}, \tilde{\mathcal{L}}_{i+1,k}$  ( $0 \leq k \leq i$ ) は  $\eta$  を含まない  $u, v$  の微分多項式) という形で書ける. とくに

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{K}}_{i+1,i} \\ \tilde{\mathcal{L}}_{i+1,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^i u_{it} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^i v_{it} \end{pmatrix}$$

であり, さらに付録の式 (91) に large parameter を入れた式,

$$\tilde{\mathcal{K}}_{i+1} = \frac{1}{2} \left( u\tilde{\mathcal{K}}_i - \eta^{-1}\tilde{\mathcal{K}}_{i,t} + 2\tilde{\mathcal{L}}_i \right) \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{i+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{i-1} \left( \eta^{-1}\tilde{\mathcal{L}}_{m+1,t}\tilde{\mathcal{K}}_{i-m-1} \right. \right. \\ \left. \left. - \tilde{\mathcal{L}}_{m+1}\tilde{\mathcal{L}}_{i-m-1} + \tilde{\mathcal{K}}_{i-m-1}v\tilde{\mathcal{K}}_{m+1} \right) + v\tilde{\mathcal{K}}_i \right) \end{aligned} \quad (33)$$

より,  $\tilde{\mathcal{K}}_{i+1,0}, \tilde{\mathcal{L}}_{i+1,0}$  が  $u, v$  の  $t$  微分を含まないことも帰納的にわかる.  $\tilde{\mathcal{K}}_{i+1,0}, \tilde{\mathcal{L}}_{i+1,0}$  がこのような形をしていることにより, 次小節で構成される 0-パラメータ解の 0 次の項が微分方程式ではなく代数方程式の根として求まることとなる.

### 3.2 0-パラメータ解について

この小節では, 前小節で導入した large parameter  $\eta$  を含んだ非線形方程式 (30) に対して,  $\eta$  の負べきに関する形式的べき級数解を構成する.

まず

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{G} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_0 + \eta^{-1}F_1 + \cdots + \eta^{-n}F_n \\ G_0 + \eta^{-1}G_1 + \cdots + \eta^{-n}G_n \end{pmatrix} \\ &= \tilde{\mathbf{K}}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \tilde{\mathbf{K}}_{i+1} + g_{n+1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \delta - \frac{\eta^{-1}}{2}g_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

として,  $u, v$  の微分多項式  $F_0, \dots, F_n, G_0, \dots, G_n$  と  $\tilde{F}, \tilde{G}$  を定義する. ここで, 前小節の  $\tilde{\mathcal{K}}_i, \tilde{\mathcal{L}}_i$  についての考察より,  $F_0 = F_0(t, u, v), G_0 = G_0(t, u, v)$  は  $t, u, v$  の多項式となることがすぐにわかる. この  $F_0, G_0$  を用いて集合  $\Delta$  を

$$\Delta = \left\{ t \in \mathbb{C} \left| \begin{array}{l} \text{ある } u, v \text{ について,} \\ F_0(t, u, v) = G_0(t, u, v) = \frac{\partial F_0}{\partial u} \frac{\partial G_0}{\partial v} - \frac{\partial F_0}{\partial v} \frac{\partial G_0}{\partial u} = 0 \\ \text{が成立する.} \end{array} \right. \right\}$$

で定義すると, (30) の  $\eta^{-1}$  に関する形式解は次の定理により構成される.

#### 定理 3.1

$t_0$  を  $\Delta$  に含まれない  $\mathbb{C}$  の点としたとき,  $t_0$  の適当な近傍  $U$  上で, (30) をみたく  $\eta^{-1}$  についての形式的べき級数解

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}(t, \eta) \\ \hat{v}(t, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(t) + u_1(t)\eta^{-1} + u_2(t)\eta^{-2} + \cdots \\ v_0(t) + v_1(t)\eta^{-1} + v_2(t)\eta^{-2} + \cdots \end{pmatrix} \quad (35)$$

- (i)  $u_j(t), v_j(t)$  は  $\mathcal{U}$  上正則 ( $j \geq 0$ )  
(ii)  $F_0(t, u_0(t), v_0(t)) = G_0(t, u_0(t), v_0(t)) = 0$  ( $t \in \mathcal{U}$ )

をみます. さらに,  $(u_j(t), v_j(t))$  ( $j \geq 1$ ) は,  $(u_0(t), v_0(t))$  が決まれば, 後は一意的に決定される.

(証明)

まず,  $(u_0(t_0), v_0(t_0))$  は代数方程式

$$F_0(t_0, u_0(t_0), v_0(t_0)) = G_0(t_0, u_0(t_0), v_0(t_0)) = 0$$

の根として定まり, さらに  $t_0 \notin \Delta$  より陰関数の定理を使うと,

$u_0(t), v_0(t)$  は  $\mathcal{U}$  上正則,

$$F_0(t, u_0(t), v_0(t)) = G_0(t, u_0(t), v_0(t)) = 0 \quad (t \in \mathcal{U})$$

となるような  $u_0(t), v_0(t)$  と  $t_0$  の近傍  $\mathcal{U}$  が存在する. (ここで  $\mathcal{U} \cap \Delta = \emptyset$ .)

次に, 式 (30) に  $u = \hat{u}(t, \eta), v = \hat{v}(t, \eta)$  を代入してその  $\eta^{-1}$  の係数をみると,

$$\frac{\partial F_0}{\partial u}(u_0(t), v_0(t))u_1 + \frac{\partial F_0}{\partial v}(u_0(t), v_0(t))v_1 + (u_0(t), v_0(t) \text{ の微分多項式}) = 0$$

$$\frac{\partial G_0}{\partial u}(u_0(t), v_0(t))u_1 + \frac{\partial G_0}{\partial v}(u_0(t), v_0(t))v_1 + (u_0(t), v_0(t) \text{ の微分多項式}) = 0$$

となる.  $t \in \mathcal{U}$  において, この  $u_1, v_1$  についての連立一次方程式を解くことができ, (i) をみたくような  $u_1(t), v_1(t)$  が一意的に決まる.

以下,  $u_{m-1}(t), v_{m-1}(t)$  まで求まったとすると, 式 (30) に  $u = \hat{u}(t, \eta), v = \hat{v}(t, \eta)$  を代入したときの  $\eta^{-m}$  の係数は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_0}{\partial u}(u_0(t), v_0(t))u_m + \frac{\partial F_0}{\partial v}(u_0(t), v_0(t))v_m \\ & + (u_0(t), \dots, u_{m-1}(t), v_0(t), \dots, v_{m-1}(t) \text{ の微分多項式}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial G_0}{\partial u}(u_0(t), v_0(t))u_m + \frac{\partial G_0}{\partial v}(u_0(t), v_0(t))v_m \\ & + (u_0(t), \dots, u_{m-1}(t), v_0(t), \dots, v_{m-1}(t) \text{ の微分多項式}) = 0 \end{aligned}$$

となり,  $u_1, v_1$  のときと同様にして, (i) をみたく  $u_m(t), v_m(t)$  が一意的に求まる.

(証明終)

この定理により構成された解を (30) の 0-パラメータ解と呼ぶ。以下では、この 0-パラメータ解についてもう少し考察してみる。

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{K}}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} + g_{n+1}t = 0 \\ \tilde{\mathcal{L}}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \tilde{\mathcal{L}}_{i+1} - \delta + \frac{\eta^{-1}}{2} g_{n+1} = 0 \end{cases}$$

には  $\eta$  の奇数乗の項があらわれるが、 $v = V + \frac{u}{2}\eta^{-1}$  という変換をしたときの  $\tilde{\mathcal{K}}_{i+1}$  を  $\hat{\mathcal{K}}_{i+1}$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}_{i+1}$  を  $\hat{\mathcal{L}}_{i+1}$  ( $0 \leq i \leq n$ ) とおくと、次が成立することがわかる。

補題 3.1

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{K}}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \hat{\mathcal{K}}_{i+1} + g_{n+1}t = 0 \\ \hat{\mathcal{L}}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \hat{\mathcal{L}}_{i+1} - \delta + \frac{\eta^{-1}}{2} g_{n+1} \\ - \frac{1}{2}\eta^{-1}\partial_t \left( \hat{\mathcal{K}}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \hat{\mathcal{K}}_{i+1} + g_{n+1}t \right) = 0 \end{cases} \quad (36)$$

の両辺には  $\eta$  の偶数べきのみしかあらわれない。

(証明)

まず、 $\hat{\mathcal{K}}_{i+1}, \hat{\mathcal{L}}_{i+1} - \frac{1}{2}\eta^{-1}\partial_t \hat{\mathcal{K}}_{i+1}$  が  $\eta$  の偶数べきのみで書けることを示す。

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}}_1 &= u, \\ \hat{\mathcal{L}}_1 &= V + \frac{u_t}{2}\eta^{-1}, \\ \hat{\mathcal{L}}_1 - \frac{1}{2}\eta^{-1}\partial_t \hat{\mathcal{K}}_1 &= V. \end{aligned}$$

以下、 $i$  まで成立したとすると

$$\partial_t \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{K}}_{i+1} \\ \hat{\mathcal{L}}_{i+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_t u - \eta^{-1}\partial_t^2 & 2\partial_t \\ (2V\partial_t + V_t) + (u_t\partial_t + \frac{1}{2}u_{tt})\eta^{-1} & u\partial_t + \eta^{-1}\partial_t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{K}}_i \\ \hat{\mathcal{L}}_i \end{pmatrix},$$

つまり

$$\partial_t \hat{\mathcal{K}}_{i+1} = \partial_t \left[ \frac{1}{2} \left( u\hat{\mathcal{K}}_i + 2 \left( \hat{\mathcal{L}}_i - \frac{1}{2}\eta^{-1}\partial_t \hat{\mathcal{K}}_i \right) \right) \right],$$

$$\partial_t \left( \hat{\mathcal{L}}_{i+1} - \frac{1}{2}\eta^{-1}\partial_t \hat{\mathcal{K}}_{i+1} \right) = \frac{1}{2} \left( 2V\hat{\mathcal{K}}_{i,t} + V_t\hat{\mathcal{K}}_i + \frac{1}{2}\eta^{-2}\hat{\mathcal{K}}_{i,ttt} + u\partial_t \left( \hat{\mathcal{L}}_i - \frac{1}{2}\eta^{-1}\partial_t \hat{\mathcal{K}}_i \right) \right)$$

が成立する。よって、 $\hat{\mathcal{K}}_{i+1}, \hat{\mathcal{L}}_{i+1} - \frac{1}{2}\eta^{-1}\partial_t \hat{\mathcal{K}}_{i+1}$  が  $\eta$  の偶数べきのみで書けることがわかった。この事実を使うと

$$\begin{aligned} & \left( \hat{\mathcal{L}}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \hat{\mathcal{L}}_{i+1} - \delta + \frac{\eta^{-1}}{2} g_{n+1} \right) - \frac{1}{2}\eta^{-1}\partial_t \left( \hat{\mathcal{K}}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \hat{\mathcal{K}}_{i+1} + g_{n+1}t \right) \\ &= \left( \hat{\mathcal{L}}_{n+1} - \frac{1}{2}\eta^{-1}\partial_t \hat{\mathcal{K}}_{n+1} \right) + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \left( \hat{\mathcal{L}}_{i+1} - \frac{1}{2}\eta^{-1}\partial_t \hat{\mathcal{K}}_{i+1} \right) - \delta \end{aligned}$$

となり、(36) には  $\eta$  の偶数べきしかあらわれない。

この補題 3.1 と定理 3.1 の証明よりただちに次がわかる.

### 補題 3.2

定理 3.1 で構成された 0-パラメータ解 (35) は

$$\begin{cases} u = \hat{u}(t, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} u_{2i} \eta^{-2i} \\ v = \hat{v}(t, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} v_{2i} \eta^{-2i} + \frac{\eta^{-1}}{2} \sum_{i=0}^{\infty} u_{2i,t} \eta^{-2i} \end{cases} \quad (37)$$

という形をしている.

以下, この節においては, この小節で構成した (30) の 0-パラメータ解 (37) を Lax pair (27), (28) の係数の  $u, v$  に代入した線形方程式系と非線形方程式との関係を考える. 以下では特に断りのない限り代入した後の式も同じ記号で表すことにし, 簡単のため  $A_{II}$  などの添字  $II$  も省略することにする. つまり次のような記号を用いる.

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(i)} &= \tilde{A}_{II}^{(i)} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = A_0^{(i)} + \eta^{-1} A_1^{(i)} + \cdots \quad (0 \leq i \leq n), \\ \tilde{A}^{(-1)} &= \tilde{A}_{II}^{(-1)} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = A_0^{(-1)} + \eta^{-1} A_1^{(-1)}, \\ \tilde{A} &= \tilde{A}_{II} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = A_0 + \eta^{-1} A_1 + \cdots, \\ \tilde{B} &= \tilde{B} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = B_0 + \eta^{-1} B_1 + \cdots, \\ \tilde{S}_i &= \tilde{S}_i \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = S_{i,0} + \eta^{-1} S_{i,1} + \cdots \quad (0 \leq i \leq n), \\ \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} &= \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = \mathcal{K}_{i+1,0} + \eta^{-1} \mathcal{K}_{i+1,1} + \cdots \quad (0 \leq i \leq n), \\ \tilde{\mathcal{L}}_{i+1} &= \tilde{\mathcal{L}}_{i+1} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = \mathcal{L}_{i+1,0} + \eta^{-1} \mathcal{L}_{i+1,1} + \cdots \quad (0 \leq i \leq n). \end{aligned}$$

さらに,  $\tilde{T}$  を

$$\tilde{T} = \left( \tilde{S}_n + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \tilde{S}_i \right) \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = T_0 + \eta^{-1} T_1 + \cdots$$

で定義しておく. この時, 0-パラメータ解が (37) の形をしていることと  $\tilde{\mathcal{K}}_i$  に  $\eta$  の奇数乗の項が現れないことを使うと

$$\begin{aligned} A_0^{(i)} &= \begin{pmatrix} -\left(x - \frac{u_0}{2}\right) S_{i,0} - \frac{1}{2} \mathcal{K}_{i+1,0} & S_{i,0} \\ -v_0 S_{i,0} + \mathcal{L}_{i+1,0} & \left(x - \frac{u_0}{2}\right) S_{i,0} + \frac{1}{2} \mathcal{K}_{i+1,0} \end{pmatrix} \quad (0 \leq i \leq n), \\ A_1^{(i)} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} S_{i,0,t} & 0 \\ -\frac{u_{0,t}}{2} S_{i,0} - \frac{1}{2} [(2x - u_0) S_{i,0} + \mathcal{K}_{i+1,0}]_t + \mathcal{L}_{i+1,1} & \frac{1}{2} S_{i,0,t} \end{pmatrix} \quad (0 \leq i \leq n), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
A_0^{(-1)} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}g_{n+1}t & 0 \\ -\delta & \frac{1}{2}g_{n+1}t \end{pmatrix}, & A_1^{(-1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2}g_{n+1} & 0 \end{pmatrix}, \\
A_0 &= \begin{pmatrix} -(x - \frac{u_0}{2})T_0 & T_0 \\ -v_0T_0 & (x - \frac{u_0}{2})T_0 \end{pmatrix}, \\
A_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}T_{0,t} & 0 \\ -\frac{u_{0,t}}{2}T_0 - \frac{1}{2}[(2x - u_0)T_0]_t + \frac{1}{2}g_{n+1} & \frac{1}{2}T_{0,t} \end{pmatrix}, \\
B_0 &= \begin{pmatrix} -x + \frac{u_0}{2} & 1 \\ -v_0 & x - \frac{u_0}{2} \end{pmatrix}, & B_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{u_{0,t}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\
S_{i,0} &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^i x^{i-j} \mathcal{K}_{j,0}
\end{aligned}$$

となることがわかる. とくに

$$A_0 = T_0 B_0$$

が成立していることに注意する.

以上を用いて次小節では非線形方程式と Lax pair の種々の関係を示す.

### 3.3 非線形方程式と Lax pair の関係

この小節では次小節で考える非線形方程式の Stokes 幾何学と線形方程式の Stokes 幾何学の橋渡しをする非線形方程式と線形方程式の種々の関係を導くことを目標とする.

まず, 線形方程式 (27),(28) に対してその特性方程式とは次のような方程式のことであった.

$$\begin{aligned}
&\det \left( \frac{1}{2}g_{n+1}\lambda - A_0 \right) \\
&= \frac{1}{4}g_{n+1}^2\lambda^2 + \det A_0 \\
&= \frac{1}{4}g_{n+1}^2\lambda^2 + \left( S_{n,0} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i S_{i,0} \right)^2 \left( -\left(x - \frac{u_0}{2}\right)^2 + v_0 \right) \\
&= 0, \tag{38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\det(\mu - B_0) \\
&= \mu^2 + \det B_0 \\
&= \mu^2 - \left(x - \frac{u_0}{2}\right)^2 + v_0 \\
&= 0. \tag{39}
\end{aligned}$$

ここで  $\text{tr}A_0 = 0, \text{tr}B_0 = 0$  を使った. さらに, 線形方程式 (27),(28) の turning point とはこれらの特性方程式が重根を持つような点  $(x, t)$  をいい, 特にその点において判別式

が位数1の零点となっているとき simple turning point, 位数2の零点となっているとき double turning point と呼ぶのであった. ただし, 本論文では  $t$  をパラメータと考えているので, 以下ではその  $x$  成分 (これは  $t$  に依存する) のみに注目し, “turning point  $x = x(t)$ ” という表現を主に用いる. よって, (27) の simple turning point は generic には

$$-\left(x - \frac{u_0}{2}\right)^2 + v_0 = 0$$

の根で, これを  $a_1(t), a_2(t)$  とおく. また, (27) の double turning point は generic には

$$S_{n,0} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i S_{i,0} = 0 \quad (40)$$

の根であるが,  $S_{i,0}$  が  $x$  の  $i$  次式であり  $x^i$  の係数が1であることから, この方程式の根は全部で  $n$  個あり, これらを  $b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)$  とおく. 一方, (28) の turning point は

$$-\left(x - \frac{u_0}{2}\right)^2 + v_0 = 0$$

の根で, これらは  $a_1(t), a_2(t)$  と一致する.

次に, 非線形方程式 (30) の  $u = \hat{u}, v = \hat{v}$  における線形化方程式とその特性方程式を求める. そのために  $\tilde{\mathcal{K}}_{i+1}, \tilde{\mathcal{L}}_{i+1}$  の  $u, v$  に  $u = \hat{u}, v = \hat{v}$  ではなく  $u = \hat{u} + \Delta u, v = \hat{v} + \Delta v$  を代入して,  $\Delta u, \Delta v$  について一次の項をとってきて, これらを  $\Delta \tilde{\mathcal{K}}_{i+1}, \Delta \tilde{\mathcal{L}}_{i+1}$  とおく. するとこれらは,

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} &= P_{11}^{(i+1)}(t, \eta^{-1} \frac{d}{dt}, \eta^{-1}) \Delta u + P_{12}^{(i+1)}(t, \eta^{-1} \frac{d}{dt}, \eta^{-1}) \Delta v \\ \Delta \tilde{\mathcal{L}}_{i+1} &= P_{21}^{(i+1)}(t, \eta^{-1} \frac{d}{dt}, \eta^{-1}) \Delta u + P_{22}^{(i+1)}(t, \eta^{-1} \frac{d}{dt}, \eta^{-1}) \Delta v \end{aligned}$$

という形で書ける. ここで  $P_{kl}^{(i+1)}$  は

$$\begin{aligned} P_{kl}^{(i+1)}(t, \eta^{-1} \frac{d}{dt}, \eta^{-1}) &= P_{kl,0}^{(i+1)}(t, \eta^{-1} \frac{d}{dt}) + \eta^{-1} P_{kl,1}^{(i+1)}(t, \eta^{-1} \frac{d}{dt}) + \dots \\ &\quad (1 \leq k, l \leq 2) \\ &\quad (\text{ただし, } \eta^{-1} \frac{d}{dt} \text{ は右側に集めておく}) \end{aligned}$$

という形の作用素である. この記号を用いると, (30) の  $u = \hat{u}, v = \hat{v}$  における線形化方程式は

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\mathcal{K}}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \Delta \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} = 0 \\ \Delta \tilde{\mathcal{L}}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \Delta \tilde{\mathcal{L}}_{i+1} = 0, \end{cases} \quad (41)$$

または

$$\begin{cases} \left[ P_{11}^{(n+1)} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i P_{11}^{(i+1)} \right] \Delta u + \left[ P_{12}^{(n+1)} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i P_{12}^{(i+1)} \right] \Delta v = 0 \\ \left[ P_{21}^{(n+1)} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i P_{21}^{(i+1)} \right] \Delta u + \left[ P_{22}^{(n+1)} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i P_{22}^{(i+1)} \right] \Delta v = 0 \end{cases} \quad (42)$$

と書くことができる。ここで、 $P_{kl}^{(i+1)}(t, \eta^{-1} \frac{d}{dt}, \eta^{-1})$  を  $P_{kl}^{(i+1)}$  と略した。よって、この特性方程式は、

$$\det \left[ \begin{pmatrix} P_{11,0}^{(n+1)}(t, \nu) & P_{12,0}^{(n+1)}(t, \nu) \\ P_{21,0}^{(n+1)}(t, \nu) & P_{22,0}^{(n+1)}(t, \nu) \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \begin{pmatrix} P_{11,0}^{(i+1)}(t, \nu) & P_{12,0}^{(i+1)}(t, \nu) \\ P_{21,0}^{(i+1)}(t, \nu) & P_{22,0}^{(i+1)}(t, \nu) \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (43)$$

と書くことができる。この左辺を  $C(t, \nu)$  とおいておく。実は、ここに出てくる行列

$$\begin{pmatrix} P_{11,0}^{(i+1)}(t, \nu) & P_{12,0}^{(i+1)}(t, \nu) \\ P_{21,0}^{(i+1)}(t, \nu) & P_{22,0}^{(i+1)}(t, \nu) \end{pmatrix}$$

は具体的には次の補題で示すような形で書ける。

### 補題 3.3

$$\begin{pmatrix} P_{11,0}^{(i+1)}(t, \nu) & P_{12,0}^{(i+1)}(t, \nu) \\ P_{21,0}^{(i+1)}(t, \nu) & P_{22,0}^{(i+1)}(t, \nu) \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^i \frac{\mathcal{K}_{i-j,0}}{2} \mathcal{R}^j, \quad (44)$$

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_0 - \nu) & 1 \\ v_0 & \frac{1}{2}(u_0 + \nu) \end{pmatrix}.$$

(証明)

$\tilde{\mathcal{K}}_{i+1}, \tilde{\mathcal{L}}_{i+1}$  と  $\tilde{\mathcal{K}}_i, \tilde{\mathcal{L}}_i$  の間の関係式を使うと

$$\begin{aligned} \eta^{-1} \partial_t \Delta \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} &= \frac{1}{2} \eta^{-1} \partial_t \left( \Delta u \tilde{\mathcal{K}}_i + \hat{u} \Delta \tilde{\mathcal{K}}_i - \Delta \tilde{\mathcal{K}}_{i,t} \eta^{-1} + 2 \Delta \tilde{\mathcal{L}}_i \right) \\ \eta^{-1} \partial_t \Delta \tilde{\mathcal{L}}_{i+1} &= \frac{1}{2} \left( 2 \Delta v \eta^{-1} \tilde{\mathcal{K}}_{i,t} + 2 \hat{v} \eta^{-1} \Delta \tilde{\mathcal{K}}_{i,t} + \Delta v_t \eta^{-1} \tilde{\mathcal{K}}_i \right. \\ &\quad \left. + \hat{v}_t \eta^{-1} \Delta \tilde{\mathcal{K}}_i + \Delta u \tilde{\mathcal{L}}_{i,t} \eta^{-1} + \hat{u} \Delta \tilde{\mathcal{L}}_{i,t} \eta^{-1} + \Delta \tilde{\mathcal{L}}_{i,tt} \eta^{-2} \right) \end{aligned}$$

となり、よって

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} &= P_{11}^{(i+1)} \Delta u + P_{12}^{(i+1)} \Delta v \\ &= \frac{1}{2} \left( \tilde{\mathcal{K}}_i \Delta u + \hat{u} \left( P_{11}^{(i)} \Delta u + P_{12}^{(i)} \Delta v \right) \right. \\ &\quad \left. - \eta^{-1} \partial_t \left( P_{11}^{(i)} \Delta u + P_{12}^{(i)} \Delta v \right) + 2 \left( P_{21}^{(i)} \Delta u + P_{22}^{(i)} \Delta v \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \mathcal{K}_i + \hat{u} P_{11}^{(i)} - \eta^{-1} \partial_t P_{11}^{(i)} + 2 P_{21}^{(i)} \right) \Delta u + \frac{1}{2} \left( \hat{u} P_{12}^{(i)} - \eta^{-1} \partial_t P_{12}^{(i)} + 2 P_{22}^{(i)} \right) \Delta v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta^{-1}\partial_t\Delta\tilde{\mathcal{L}}_{i+1} &= \eta^{-1}\partial_t P_{21}^{(i+1)}\Delta u + \eta^{-1}\partial_t P_{22}^{(i+1)}\Delta v \\
&= \frac{1}{2}\left(2\eta^{-1}\tilde{\mathcal{K}}_{i,t}\Delta v + 2\hat{v}\eta^{-1}\partial_t\left(P_{11}^{(i)}\Delta u + P_{12}^{(i)}\Delta v\right) + \tilde{\mathcal{K}}_i\eta^{-1}\partial_t\Delta v\right. \\
&\quad \left.+ \hat{v}_t\eta^{-1}\left(P_{11}^{(i)}\Delta u + P_{12}^{(i)}\Delta v\right) + \tilde{\mathcal{L}}_{i,t}\eta^{-1}\Delta u\right. \\
&\quad \left.+ \hat{u}\eta^{-1}\partial_t\left(P_{21}^{(i)}\Delta u + P_{22}^{(i)}\Delta v\right) + \eta^{-2}\partial_t^2\left(P_{21}^{(i)}\Delta u + P_{22}^{(i)}\Delta v\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\eta^{-1}\partial_t\left\{\left(2\hat{v}P_{11}^{(i)} + \hat{u}P_{21}^{(i)} + \eta^{-1}\partial_t P_{21}^{(i)}\right)\Delta u\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ \left(\tilde{\mathcal{K}}_i + 2\hat{v}P_{12}^{(i)} + \hat{u}P_{22}^{(i)} + \eta^{-1}\partial_t P_{22}^{(i)}\right)\Delta v\right\}\right. \\
&\quad \left.+ \eta^{-1}\tilde{\mathcal{K}}_{i,t}\Delta v - \hat{v}_t\eta^{-1}\left(P_{11}^{(i)}\Delta u + P_{12}^{(i)}\Delta v\right)\right. \\
&\quad \left.+ \tilde{\mathcal{L}}_{i,t}\eta^{-1}\Delta u - \hat{u}_t\eta^{-1}\left(P_{21}^{(i)}\Delta u + P_{22}^{(i)}\Delta v\right)\right]
\end{aligned}$$

が成立する. この二式で  $\eta^{-1}\partial_t$  を  $\nu$  に置き換えて  $\eta^{-1}$  について最高次の項を見ると,

$$\begin{cases}
P_{11,0}^{(i+1)}(t,\nu) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{K}_{i,0} + u_0 P_{11,0}^{(i)}(t,\nu) - \nu P_{11,0}^{(i)}(t,\nu) + 2P_{21,0}^{(i)}(t,\nu)\right) \\
P_{12,0}^{(i+1)}(t,\nu) = \frac{1}{2}\left(u_0 P_{12,0}^{(i)}(t,\nu) - \nu P_{12,0}^{(i)}(t,\nu) + 2P_{22,0}^{(i)}(t,\nu)\right) \\
P_{21,0}^{(i+1)}(t,\nu) = \frac{1}{2}\left(2v_0 P_{11,0}^{(i)}(t,\nu) + u_0 P_{21,0}^{(i)}(t,\nu) + \nu P_{21,0}^{(i)}(t,\nu)\right) \\
P_{22,0}^{(i+1)}(t,\nu) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{K}_{i,0} + 2v_0 P_{12,0}^{(i)}(t,\nu) + u_0 P_{22,0}^{(i)}(t,\nu) + \nu P_{22,0}^{(i)}(t,\nu)\right)
\end{cases}$$

がわかる. これを書き直すと

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P_{11,0}^{(i+1)}(t,\nu) \\ P_{21,0}^{(i+1)}(t,\nu) \end{pmatrix} &= \mathcal{R} \begin{pmatrix} P_{11,0}^{(i)}(t,\nu) \\ P_{21,0}^{(i)}(t,\nu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{K}_{i,0}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} P_{12,0}^{(i+1)}(t,\nu) \\ P_{22,0}^{(i+1)}(t,\nu) \end{pmatrix} &= \mathcal{R} \begin{pmatrix} P_{12,0}^{(i)}(t,\nu) \\ P_{22,0}^{(i)}(t,\nu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mathcal{K}_{i,0}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P_{11,0}^{(i+1)}(t,\nu) \\ P_{21,0}^{(i+1)}(t,\nu) \end{pmatrix} &= \mathcal{R}^i \begin{pmatrix} P_{11,0}^{(1)}(t,\nu) \\ P_{21,0}^{(1)}(t,\nu) \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{i-1} \mathcal{R}^j \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{K}_{i-j,0}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} P_{12,0}^{(i+1)}(t,\nu) \\ P_{22,0}^{(i+1)}(t,\nu) \end{pmatrix} &= \mathcal{R}^i \begin{pmatrix} P_{12,0}^{(1)}(t,\nu) \\ P_{22,0}^{(1)}(t,\nu) \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{i-1} \mathcal{R}^j \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mathcal{K}_{i-j,0}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

がわかる. ここで,  $\Delta\tilde{\mathcal{K}}_1 = \Delta u$ ,  $\Delta\tilde{\mathcal{L}}_1 = \Delta v$  であることより

$$\begin{pmatrix} P_{11,0}^{(1)}(t,\nu) \\ P_{21,0}^{(1)}(t,\nu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P_{12,0}^{(1)}(t,\nu) \\ P_{22,0}^{(1)}(t,\nu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり, 補題が証明された.

よって, この補題を用いれば, 特性方程式 (43) の  $C(t, \nu)$  は

$$C(t, \nu) = \det \left[ \sum_{j=0}^n \frac{\mathcal{K}_{j,0}}{2} \mathcal{R}^{n-j} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \sum_{j=0}^i \frac{\mathcal{K}_{j,0}}{2} \mathcal{R}^{i-j} \right] \quad (45)$$

という形でも書くことができる.

以上を用いて次の命題を示す.

### 命題 3.1

(i) (27) の特性方程式 (38) の判別式と (28) の特性方程式 (39) の判別式の間には

$$\{(38) \text{ の判別式} \} = \frac{4}{g_{n+1}^2} \left( S_{n,0} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i S_{i,0} \right)^2 \times \{(39) \text{ の判別式} \}$$

という関係式が存在する. 従って, (27) の turning point 全体の集合は (40) の零点として与えられる (一般には) double の turning point 全体の集合と (28) の turning point 全体の集合との和集合に等しい.

(ii) (27) の特性方程式 (38) の根を

$$\lambda_{\pm} = \pm \frac{2}{g_{n+1}} T_0 \sqrt{\left(x - \frac{u_0}{2}\right)^2 - v_0},$$

(28) の特性方程式 (39) の根を

$$\mu_{\pm} = \pm \sqrt{\left(x - \frac{u_0}{2}\right)^2 - v_0}$$

とするとき,

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_{\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \mu_{\pm} \quad (\text{複号同順})$$

が成立する.

(iii) 非線形方程式 (30) の  $u = \hat{u}, v = \hat{v}$  における線形化方程式の特性方程式  $C(t, \nu)$  は

$$C(t, \nu) = (-1)^n \prod_{j=1}^n \det(\mu - B_0) \Big|_{\substack{\mu = \frac{\nu}{x} \\ x = b_j}} \quad (46)$$

という形で書くことができる. 特に,  $C(t, \nu)$  は  $\nu^2$  の多項式であって  $C(t, \nu) = f(t, \nu^2)$  の形に書ける.

(i) 命題の前の考察より明らか.

(ii) Lax pair (27),(28) の両立条件を考えると,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \eta \tilde{B}, \frac{g_{n+1}}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \eta \tilde{A} \right] = -\eta \tilde{A}_t + \eta^2 \tilde{B} \tilde{A} - \eta^2 \tilde{A} \tilde{B} + \frac{g_{n+1}}{2} \eta \tilde{B}_x = 0.$$

$[A_0, B_0] = 0$  より  $\eta^2$  の項は明らかに 0. 次に  $\eta^1$  の項を見ると,

$$-A_{0,t} + B_0 A_1 + B_1 A_0 - A_0 B_1 - A_1 B_0 + \frac{g_{n+1}}{2} B_{0,x} = 0.$$

左辺を計算すると (2,1) 成分以外は 0 だが, (2,1) 成分は

$$2 \left( - \left( x - \frac{u_0}{2} \right)^2 + v_0 \right) T_{0,t} + T_0 \left( \left( x - \frac{u_0}{2} \right) u_{0,t} + v_{0,t} \right) + g_{n+1} \left( x - \frac{u_0}{2} \right)$$

となり, ここから

$$\frac{2}{g_{n+1}} \left( \left( x - \frac{u_0}{2} \right)^2 - v_0 \right) T_{0,t} - \frac{1}{g_{n+1}} T_0 \left( \left( x - \frac{u_0}{2} \right) u_{0,t} + v_{0,t} \right) = \left( x - \frac{u_0}{2} \right)$$

という関係式が出てくる. この式を使うと,

$$\begin{aligned} \sqrt{\left( x - \frac{u_0}{2} \right)^2 - v_0} \frac{\partial \lambda_+}{\partial t} &= \frac{2}{g_{n+1}} T_{0,t} \left( \left( x - \frac{u_0}{2} \right)^2 - v_0 \right) \\ &\quad - \frac{1}{g_{n+1}} T_0 \left( \left( x - \frac{u_0}{2} \right) u_{0,t} + v_{0,t} \right) \\ &= \left( x - \frac{u_0}{2} \right) \\ \sqrt{\left( x - \frac{u_0}{2} \right)^2 - v_0} \frac{\partial \mu_+}{\partial x} &= \left( x - \frac{u_0}{2} \right) \end{aligned}$$

となり, これより,

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_+ = \frac{\partial}{\partial x} \mu_+$$

が成立することがわかる. 同様にして,

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_- = \frac{\partial}{\partial x} \mu_-$$

もわかる.

(iii) (45) より右辺を変形していくと

$$\begin{aligned}
C(t, \nu) &= \det \left[ \left( \sum_{j=0}^n \frac{\mathcal{K}_{j,0}}{2} x^{n-j} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i \sum_{j=0}^i \frac{\mathcal{K}_{j,0}}{2} x^{i-j} \right) \Big|_{x=\mathcal{R}} \right] \\
&= \det \left[ \left( S_{n,0} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i S_{i,0} \right) \Big|_{x=\mathcal{R}} \right] \\
&= \det \left[ \prod_{j=1}^n (x - b_j) \Big|_{x=\mathcal{R}} \right] \\
&= \prod_{j=1}^n \det \left[ (x - b_j) \Big|_{x=\mathcal{R}} \right] \\
&= \prod_{j=1}^n \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_0 - \nu) - b_j & 1 \\ v_0 & \frac{1}{2}(u_0 + \nu) - b_j \end{pmatrix} \\
&= \prod_{j=1}^n \left[ -\frac{\nu^2}{4} + \left( \frac{u_0}{2} - b_j \right)^2 - v_0 \right] \\
&= (-1)^n \prod_{j=1}^n \left[ \mu^2 - \left( \frac{u_0}{2} - b_j \right)^2 + v_0 \right] \Big|_{\substack{\mu=\frac{\nu}{2} \\ x=b_j}}
\end{aligned}$$

が得られる.

(証明終)

この命題 3.1 (iii) の式は竹井義次先生に教えて頂いたものであるが、非線形方程式 (30) の特性方程式とその Lax pair (27),(28) の特性方程式を関係づける非常に不思議な関係式となっている.

### 3.4 非線形方程式と線形方程式の Stokes 幾何学の関係

この小節では非線形方程式 (30) の turning point と Stokes 曲線を定義し、前小節の結果を用いてそれらが線形方程式 (27) の Stokes 幾何学とどのように関わってくるかを調べる.

まず、非線形方程式 (30) の turning point と Stokes 曲線の定義から始める.

#### 定義 3.1

- (i) 特性方程式  $C(t, \nu)$  が重根を持つ点  $t = \tau$  を非線形方程式 (30) の turning point と呼ぶ. 特に、特性根  $\nu_j(t)$  と  $\nu_{j'}(t)$  が重なるような turning point を type  $(j, j')$  の turning point と呼ぶ.

(ii)  $t = \tau$  を (30) の type  $(j, j')$  の turning point とするとき,

$$\Im \int_{\tau}^t (\nu_j(t) - \nu_{j'}(t)) dt = 0$$

で定義される  $t = \tau$  から出る曲線を type  $(j, j')$  の Stokes 曲線と呼ぶ. 又, より詳しく,  $\Re \int_{\tau}^t (\nu_j(t) - \nu_{j'}(t)) dt$  の正負に応じて type  $j > j'$  または type  $j < j'$  の Stokes 曲線と呼ぶ.

(iii)  $t = \tau$  が (30) の turning point であるとする. 命題 3.1 (iii) より, 次の 2 つの場合が考えられる.

(I)  $C(\tau, \nu)$  が  $\nu = 0$  を重根に持つ時,  $t = \tau$  を type I の turning point と呼ぶ.

(II)  $C(\tau, \nu) = f(\tau, \nu^2)$  に対して,  $f(\tau, z)$  が重根を持つ時,  $t = \tau$  を type II の turning point と呼ぶ.

次に, type I の turning point から出る Stokes 曲線, type II の turning point から出る Stokes 曲線と線形方程式 (27) の Stokes 曲線との関係についてそれぞれ考えていく.

### 3.4.1 type I の turning point から出る Stokes 曲線と線形方程式 (27) の Stokes 曲線の関係について

まず, type I の turning point について考えるが, generic な場合を考えるため, type I の turning point  $t = \tau$  では次の 2 つの仮定 (仮定 (#) と呼ぶ) をみたすとする.

(i)  $t = \tau$  は type II の turning point ではない. (従って,  $f(\tau, z)$  は重根を持たない. 特に,  $\nu = 0$  は  $C(\tau, \nu)$  の 2 重根である.)

(ii)

$$\left. \frac{\partial C}{\partial t} \right|_{t=\tau, \nu=0} \neq 0.$$

このとき, 命題 3.1 の (iii) よりある  $j$  があって

$$-\det B_0 \Big|_{\substack{x=b_j(\tau) \\ t=\tau}} = 0$$

となる. ここで, 命題 3.1 の (i) より

$$\det B_0 = -(x - a_1(t))(x - a_2(t))$$

であるので

$$b_j(\tau) = a_1(\tau) \quad \text{又は} \quad b_j(\tau) = a_2(\tau)$$



となる. 以下では,  $b_j(\tau) = a_1(\tau)$  と仮定しておく. 一方, 命題 3.1 の (ii) より

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left( \int_{a_1(t)}^{b_j(t)} \sqrt{-\frac{4}{g_{n+1}^2} \det A_0(x, t)} dx \right) \\
&= \sqrt{-\frac{4}{g_{n+1}^2} \det A_0(b_j(t), t)} \frac{db_j}{dt} - \sqrt{-\frac{4}{g_{n+1}^2} \det A_0(a_1(t), t)} \frac{da_1}{dt} \\
&\quad + \int_{a_1(t)}^{b_j(t)} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{-\frac{4}{g_{n+1}^2} \det A_0(x, t)} dx \\
&= \int_{a_1(t)}^{b_j(t)} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{-\det B_0(x, t)} dx \\
&= \sqrt{-\det B_0(b_j(t), t)}
\end{aligned}$$

となるので, この両辺を積分すると

$$\int_{a_1(t)}^{b_j(t)} \sqrt{-\frac{4}{g_{n+1}^2} \det A_0(x, t)} dx = \frac{1}{2} \int_{\tau}^t 2\sqrt{-\det B_0(b_j(t), t)} dt \quad (47)$$

が得られる. ここで, 線形方程式 (27) の turning point  $a$  から出る Stokes 曲線が

$$\Im \int_a^x \sqrt{-\frac{4}{g_{n+1}^2} \det A_0(x, t)} dx = 0$$

で定義されることと, 非線形方程式 (30) の turning point  $\tau$  から出る Stokes 曲線が

$$\Im \int_{\tau}^t 2\sqrt{-\det B_0(b_j(t), t)} dt = 0$$

で定義されることより, 式 (47) の両辺の虚部をとった式を考えると次がいえる.

### 定理 3.2

非線形方程式 (30) の type I の turning point  $t = \tau$  が仮定 (#) をみたすとする. このとき,  $t = \tau$  においては, 線形方程式 (27) のある simple turning point  $x = a_k(t)$  ( $1 \leq k \leq 2$ ) とある double turning point  $x = b_j(t)$  ( $1 \leq j \leq n$ ) が合流する. さらに,  $t = \tau$  から出る Stokes 曲線上では,  $a_k(t)$  と  $b_j(t)$  を結ぶ線形方程式 (27) の Stokes 曲線が存在する.

### 3.4.2 type II の turning point から出る Stokes 曲線と線形方程式の (27) Stokes 曲線の関係について

次に, type II の turning point について考えるが, generic な場合を考えるため, type II の turning point  $t = \tau$  では次の 2 つの仮定 (仮定 (##) と呼ぶ) をみたすとする.

- (i)  $t = \tau$  は type I の turning point ではない. (即ち,  $f(\tau, z)$  の重根は 0 ではない.)  
(ii)  $t = \tau$  は  $f(t, z) = 0$  の判別式の simple な零点.

この仮定の下で次の補題が成立する.

補題 3.4

type II の turning point  $\tau$  において, ある  $k$  と  $l$  が存在して

$$b_k(\tau) = b_l(\tau)$$

となる.

(証明)

$t = \tau$  でどの  $b_k(t)$  達も重ならない, つまり

$$S_{n,0} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i S_{i,0} = 0$$

が  $t = \tau$  で重根を持たないとする. このとき, 仮定 (i) より  $u_0(t), v_0(t)$  は  $t = \tau$  で正則であり, この方程式の係数も  $t = \tau$  で正則であるから全ての  $b_k$  達は  $t = \tau$  で正則となる. よって,

$$\det B_0(b_k(t), t) = - \left( b_k(t) - \frac{u_0(t)}{2} \right)^2 + v_0(t)$$

も  $t = \tau$  で正則となる. 一方, 命題 3.1 の (iii) より  $f(t, z) = 0$  の判別式はこの  $\det B_0(b_k(t), t)$  達の差積

$$(-1)^n \prod_{k>l} (\det B_0(b_k(t), t) - \det B_0(b_l(t), t))^2$$

である. 従って,  $t = \tau$  はこの式の 2 位以上の零点となり, 仮定 (ii) に反する. よって, 補題が示された.

(証明終)

この補題の  $k, l$  に対して, ( $\sqrt{-\det B_0(x, t)}$  の分枝を定めれば, )

$$\sqrt{-\det B_0(b_k(\tau), \tau)} = \sqrt{-\det B_0(b_l(\tau), \tau)}$$

が成立する. このとき, 命題 3.1 の (ii) より

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left( \int_{b_k(t)}^{b_l(t)} \sqrt{-\frac{4}{g_{n+1}^2} \det A_0(x, t)} dx \right) \\
&= \int_{b_k(t)}^{b_l(t)} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{-\frac{4}{g_{n+1}^2} \det A_0(x, t)} dx \\
&= \int_{b_k(t)}^{b_l(t)} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{-\det B_0(x, t)} dx \\
&= \sqrt{-\det B_0(b_l(t), t)} - \sqrt{-\det B_0(b_k(t), t)}
\end{aligned}$$

となるので, 両辺を積分すると,

$$\begin{aligned}
& \int_{b_k(t)}^{b_l(t)} \sqrt{-\frac{4}{g_{n+1}^2} \det A_0(x, t)} dx \\
&= \int_{\tau}^t \left( \sqrt{-\det B_0(b_l(t), t)} - \sqrt{-\det B_0(b_k(t), t)} \right) dt \quad (48)
\end{aligned}$$

が得られる. このことより, type I のときと同様に考えると, 次の定理が成立する.

### 定理 3.3

非線形方程式 (30) の type II の turning point  $t = \tau$  が仮定 (##) をみたすとする. このとき,  $t = \tau$  においては, 線形方程式 (27) の 2 つの double turning point  $b_k(t)$  と  $b_l(t)$  ( $1 \leq k, l \leq n$ ) が合流する. さらに,  $t = \tau$  からでる Stokes 曲線上では, この 2 つの double turning point  $b_k(t)$  と  $b_l(t)$  を結ぶ線形方程式 (27) の Stokes 曲線が存在する.

以上, 定理 3.2, 定理 3.3 において  $t$  が非線形方程式 (30) の Stokes 曲線上にあるとき, 線形方程式 (27) においては 2 つの turning point が Stokes 曲線で結ばれるという意味で Stokes 幾何学の “退化” が起きることがわかったが,  $t$  が非線形方程式の Stokes 曲線のどちら側かに外れることによりこの “退化” は 2 通りの方法で “解消” されることが期待される (第 6 節参照). よって, あとは [KT1], [T] にならって議論を進めれば, これらの hierarchy に属する方程式の解の接続公式を導くことができると期待される.

## 4 large parameter を持つ $P_{IV}$ hierarchy I の WKB 解析

この節では, 前節と同様にして第 2 節で導出した  $P_{IV}$  hierarchy I の WKB 解析を行

#### 4.1 large parameter の導入

この小節では  $P_{IV}$  hierarchy I (19) とそれに対応する Lax pair (20),(21) に large parameter を導入する. ここでは,  $P_{II}$  hierarchy のときの議論を参考にして, large parameter  $\eta$  を

$$\begin{aligned} t &\mapsto t\eta^T, & U &\mapsto U\eta^{1-T}, & V &\mapsto V\eta^{1-T}, & g_n &\mapsto g_n\eta^{n(1-T)-T}, \\ \alpha &\mapsto \alpha\eta^{(n+1)(1-T)}, & \beta &\mapsto \beta\eta^{(n+1)(1-T)}, & c_i &\mapsto c_i\eta^{(n-i)(1-T)} & (1 \leq i \leq n-1) \\ x &\mapsto x\eta^{1-T}, & \psi &\mapsto \psi, & \varphi &\mapsto \varphi\eta^{1-T} \end{aligned}$$

で導入することにする. (ただし  $T$  は任意定数.) この方法で非線形方程式 (19) に large parameter を入れて整理すると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U - 2V - \eta^{-1}\partial_t & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix} &\left[ \partial_t^{-1} \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} \partial_t U \partial_t^{-1} - \eta^{-1}\partial_t & 2 \\ 2\tilde{v} + \tilde{v}_t \partial_t^{-1} & U + \eta^{-1}\partial_t \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} U_t \\ \tilde{v}_t \end{pmatrix} \right. \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} c_i \partial_t^{-1} \frac{1}{2^{i-1}} \begin{pmatrix} \partial_t U \partial_t^{-1} - \eta^{-1}\partial_t & 2 \\ 2\tilde{v} + \tilde{v}_t \partial_t^{-1} & U + \eta^{-1}\partial_t \end{pmatrix}^{i-1} \begin{pmatrix} U_t \\ \tilde{v}_t \end{pmatrix} \\ &\left. + g_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\text{ただし, } \tilde{v} = UV - V^2 + V_t\eta^{-1}$$

となる. ここで, (19) とは第一成分と第二成分を入れ換えて書いた. この式は

$$\tilde{J}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & V \\ 0 & U - 2V - \eta^{-1}\partial_t \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\tilde{J}^\dagger \left[ \begin{pmatrix} \tilde{L}_n \\ \tilde{K}_n \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \begin{pmatrix} \tilde{L}_i \\ \tilde{K}_i \end{pmatrix} + g_n \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (50)$$

と書くこともできる. ここで

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{G} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_0 + \eta^{-1}F_1 + \cdots + \eta^{-n}F_n \\ G_0 + \eta^{-1}G_1 + \cdots + \eta^{-n}G_n \end{pmatrix} \\ &= \tilde{J}^\dagger \left[ \begin{pmatrix} \tilde{L}_n \\ \tilde{K}_n \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \begin{pmatrix} \tilde{L}_i \\ \tilde{K}_i \end{pmatrix} + g_n \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (51)$$

として,  $\tilde{F}, \tilde{G}$  を定義しておく.  $\tilde{K}_i, \tilde{L}_i$  の形より,  $F_0 = F_0(t, U, V), G_0 = G_0(t, U, V)$  が  $t, U, V$  の多項式となることがすぐにわかる.

次に, Lax pair (20),(21) に large parameter を入れると

$$\frac{1}{2}g_n x \Psi_x = \eta \tilde{A}_{IV} \Psi \quad (52)$$

$$\Psi_t = \eta \tilde{B} \Psi \quad (53)$$

となる. ここで

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{IV} &= \tilde{A}_{IV}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \tilde{A}_{IV}^{(i)} + \tilde{A}_{IV}^{(-1)} + \tilde{A}_{IV}^{(-2)}, \\ \tilde{A}_{IV}^{(i)} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \left( (2x - U) \tilde{S}_i + \tilde{S}_{i,t} \eta^{-1} \right) & \tilde{S}_i \\ -\frac{1}{2} \eta^{-1} \left( (2x - U) \tilde{S}_i + \tilde{S}_{i,t} \eta^{-1} + \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} \right)_t - \tilde{v} \tilde{S}_i & \frac{1}{2} \left( (2x - U) \tilde{S}_i + \tilde{S}_{i,t} \eta^{-1} \right) \end{pmatrix} \\ &\quad (1 \leq i \leq n), \\ \tilde{A}_{IV}^{(-1)} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} (2x - U) g_n t - \frac{1}{4} g_n \eta^{-1} & \frac{1}{2} g_n t \\ -\frac{1}{2} g_n t \tilde{v} & \frac{1}{4} (2x - U) g_n t + \frac{1}{4} g_n \eta^{-1} \end{pmatrix}, \\ \tilde{A}_{IV}^{(-2)} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \tilde{F} & 0 \\ \frac{1}{2} \tilde{G}_t \eta^{-1} + \frac{V}{2} \tilde{F} + 2x \tilde{G} & \frac{1}{4} \tilde{F} \end{pmatrix}, \\ \tilde{B} &= \begin{pmatrix} -x + \frac{U}{2} & 1 \\ -\tilde{v} & x - \frac{U}{2} \end{pmatrix}, \\ \tilde{v} &= UV - V^2 + V_t \eta^{-1}, \quad \tilde{S}_i = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^i x^{i-j} \tilde{\mathcal{K}}_j\end{aligned}$$

とした. 以上により  $P_{IV}$  hierarchy I に large parameter が導入された.

## 4.2 0-パラメータ解について

この小節では, 前小節で導入した large parameter  $\eta$  を含んだ非線形方程式の (50) に対して,  $\eta$  の負べきに関する形式的べき級数解を構成する.

まず, 前小節で定義した  $F_0, G_0$  を用いて集合  $\Delta$  を

$$\Delta = \left\{ t \in \mathbb{C} \left| \begin{array}{l} \text{ある } U, V \text{ について} \\ F_0(t, U, V) = G_0(t, U, V) = \frac{\partial F_0}{\partial U} \frac{\partial G_0}{\partial V} - \frac{\partial F_0}{\partial V} \frac{\partial G_0}{\partial U} = 0 \\ \text{が成立する.} \end{array} \right. \right\}$$

で定義すると, (50) の  $\eta^{-1}$  に関する形式的べき級数解は次の定理により構成される.

### 定理 4.1

$t_0$  を  $\Delta$  に含まれない  $\mathbb{C}$  の点としたとき,  $t_0$  の適当な近傍  $\mathcal{U}$  上で, (50) をみたす  $\eta^{-1}$  についての形式的べき級数解

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}(t, \eta) \\ \hat{V}(t, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0(t) + U_1(t) \eta^{-1} + U_2(t) \eta^{-2} + \cdots \\ V_0(t) + V_1(t) \eta^{-1} + V_2(t) \eta^{-2} + \cdots \end{pmatrix} \quad (54)$$

- (i)  $U_j(t), V_j(t)$  は  $\mathcal{U}$  上正則 ( $j \geq 0$ )  
(ii)  $F_0(t, U_0(t), V_0(t)) = G_0(t, U_0(t), V_0(t)) = 0$  ( $t \in \mathcal{U}$ )

をみます.

さらに,  $(U_j(t), V_j(t))$  ( $j \geq 1$ ) は,  $(U_0(t), V_0(t))$  が決まれば, 後は一意的に決定される.

証明は 定理 3.1 と同様にできる.

この定理によって構成された解を (50) の 0-パラメータ解と呼ぶ. 以下, この節においては, この小節で構成した (50) の 0-パラメータ解 (54) を Lax pair (52), (53) の係数の  $u, v$  に代入した線形方程式系と非線形方程式との関係を考える. 以下では特に断りのない限り代入した後の式も同じ記号で表すことにし, 簡単のため  $A_{IV}$  などの添字  $IV$  も省略することにする. つまり次のような記号を用いる.

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{(i)} &= \tilde{A}_{IV}^{(i)} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = A_0^{(i)} + \eta^{-1} A_1^{(i)} + \cdots \quad (1 \leq i \leq n), \\ \tilde{A}^{(-1)} &= \tilde{A}_{IV}^{(-1)} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = A_0^{(-1)} + \eta^{-1} A_1^{(-1)} + \cdots, \\ \tilde{A}^{(-2)} &= \tilde{A}_{IV}^{(-2)} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = A_0^{(-2)} + \eta^{-1} A_1^{(-2)} + \cdots, \\ \tilde{A} &= \tilde{A}_{IV} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = A_0 + \eta^{-1} A_1 + \cdots, \\ \tilde{B} &= \tilde{B} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = B_0 + \eta^{-1} B_1 + \cdots, \\ \tilde{S}_i &= \tilde{S}_i \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = S_{i,0} + \eta^{-1} S_{i,1} + \cdots \quad (0 \leq i \leq n), \\ \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} &= \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = \mathcal{K}_{i+1,0} + \eta^{-1} \mathcal{K}_{i+1,1} + \cdots \quad (0 \leq i \leq n), \\ \tilde{\mathcal{L}}_{i+1} &= \tilde{\mathcal{L}}_{i+1} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = \mathcal{L}_{i+1,0} + \eta^{-1} \mathcal{L}_{i+1,1} + \cdots \quad (0 \leq i \leq n).\end{aligned}$$

さらに,  $\tilde{T}$  を

$$\tilde{T} = \left( \tilde{S}_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \tilde{S}_i + \frac{g_n t}{2} \right) \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = T_0 + \eta^{-1} T_1 + \cdots$$

で定義しておく. とくに

$$A_0 = T_0 B_0$$

が成立していることに注意する.

以上を用いて次小節では非線形方程式と Lax pair の種々の関係を示す.

### 4.3 非線形方程式と Lax pair の関係

この小節では次小節で考える非線形方程式の Stokes 幾何学と線形方程式の Stokes 幾何学の橋渡しをする非線形方程式と線形方程式の種々の関係を示すことを目標とする。

まず, 線形方程式 (52), (53) に対してその特性方程式を考えると  $\text{tr}A_0 = 0, \text{tr}B_0 = 0$  より,

$$\begin{aligned} & \det \left( \frac{1}{2} g_n x \lambda - A_0 \right) \\ &= \frac{1}{4} g_n^2 x^2 \lambda^2 + \det A_0 \\ &= \frac{1}{4} g_n^2 x^2 \lambda^2 + \left( S_{n,0} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i S_{i,0} + \frac{g_n t}{2} \right)^2 \left( - \left( x - \frac{u_0}{2} \right)^2 + v_0 \right) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} & \det (\mu - B_0) \\ &= \mu^2 + \det B_0 \\ &= \mu^2 - \left( x - \frac{u_0}{2} \right)^2 + v_0 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{56}$$

となる. よって, (52) の simple turning point は generic には

$$- \left( x - \frac{u_0}{2} \right)^2 + v_0 = 0$$

の根で, これを  $a_1(t), a_2(t)$  とおく. 次に, (52) の double turning point は generic には

$$S_{n,0} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i S_{i,0} + \frac{g_n t}{2} = 0 \tag{57}$$

の根であるが,  $S_{i,0}$  が  $x$  の  $i$  次式であり  $x^i$  の係数が 1 であることから, この方程式の根は全部で  $n$  個あり, これらを  $b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)$  とおく. 一方, (53) の turning point は

$$- \left( x - \frac{u_0}{2} \right)^2 + v_0 = 0$$

の根で, これらは  $a_1(t), a_2(t)$  と一致する.

次に, 非線形方程式 (50) の  $U = \hat{U}, V = \hat{V}$  における線形化方程式とその特性方程式を求める. まず, (18) に  $\eta$  を入れた式,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \tilde{\Phi}[U, V] = \begin{pmatrix} U \\ UV - V^2 + \eta^{-1} V_t \end{pmatrix} \tag{58}$$

に  $U = \hat{U} + \Delta U, V = \hat{V} + \Delta V$  を代入して,  $\Delta$  について一次の項までをとってくると,

$$u \sim \hat{U} + \Delta U \quad , \quad v \sim \hat{U}\hat{V} - \hat{V}^2 + \eta^{-1}\hat{V}_t + \hat{V}\Delta U + \left( \hat{U} - 2\hat{V} + \eta^{-1}\partial_t \right) \Delta V$$

となる。これを元に、

$$\hat{u} = \hat{U} \quad , \quad \hat{v} = \hat{U}\hat{V} - \hat{V}^2 + \eta^{-1}\hat{V}_t$$

$$\Delta u = \Delta U \quad , \quad \Delta v = \hat{V}\Delta U + (\hat{U} - 2\hat{V} + \eta^{-1}\partial_t)\Delta V$$

とおいておいて、 $P_{II}$  の時に使った記号  $\Delta\tilde{\mathcal{K}}_{i+1}, \Delta\tilde{\mathcal{L}}_{i+1}, P_{kl}^{(i+1)}$  を流用する。(50) の  $U, V$  に  $U = \hat{U} + \Delta U, V = \hat{V} + \Delta V$  を代入した式から  $\Delta$  について一次の項をとってくると

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta V \\ 0 & \Delta U - 2\Delta V \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{L}}_n \\ \tilde{\mathcal{K}}_n \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{L}}_i \\ \tilde{\mathcal{K}}_i \end{pmatrix} + g_n \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \right]$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & \hat{V} \\ 0 & \hat{U} - 2\hat{V} - \eta^{-1}\partial_t \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \Delta\tilde{\mathcal{L}}_n \\ \Delta\tilde{\mathcal{K}}_n \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \begin{pmatrix} \Delta\tilde{\mathcal{L}}_i \\ \Delta\tilde{\mathcal{K}}_i \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。よって、この式を  $\Delta U, \Delta V$  についてまとめると、非線形方程式 (50) の  $U = \hat{U}, V = \hat{V}$  における線形化方程式は

$$\begin{aligned} & \left[ \left( P_{21}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_{21}^{(i)} \right) + \left( P_{22}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_{22}^{(i)} \right) \hat{V} \right. \\ & \quad \left. + \hat{V} \left( P_{11}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_{11}^{(i)} \right) + \hat{V} \left( P_{12}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_{12}^{(i)} \right) \hat{V} \right] \Delta U \\ & \quad + \left[ \left( \tilde{\mathcal{K}}_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \tilde{\mathcal{K}}_i + g_n t \right) + \left( P_{22}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_{22}^{(i)} \right) (\hat{U} - 2\hat{V} + \eta^{-1}\partial_t) \right. \\ & \quad \left. + \hat{V} \left( P_{12}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_{12}^{(i)} \right) (\hat{U} - 2\hat{V} + \eta^{-1}\partial_t) \right] \Delta V = 0 \\ & \left[ \left( \tilde{\mathcal{K}}_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \tilde{\mathcal{K}}_i + g_n t \right) + (\hat{U} - 2\hat{V} - \eta^{-1}\partial_t) \left( P_{11}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_{11}^{(i)} \right) \right] \Delta U \\ & \quad + \left[ -2 \left( \tilde{\mathcal{K}}_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \tilde{\mathcal{K}}_i + g_n t \right) \right. \\ & \quad \left. + (\hat{U} - 2\hat{V} - \eta^{-1}\partial_t) \left( P_{12}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_{12}^{(i)} \right) (\hat{U} - 2\hat{V} + \eta^{-1}\partial_t) \right] \Delta V = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

となる。ただし、ここで  $P_{kl}^{(i+1)}(t, \eta^{-1}\frac{d}{dt}, \eta^{-1})$  を  $P_{kl}^{(i+1)}$  と略して書いた。よって、この式の特性方程式が

$$\begin{aligned} -4 \det & \left[ \begin{pmatrix} P_{11,0}^{(n)} & P_{12,0}^{(n)} \\ P_{21,0}^{(n)} & P_{22,0}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(U_0 - \nu) & 1 \\ (U_0 - V_0)V_0 & \frac{1}{2}(U_0 + \nu) \end{pmatrix} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \begin{pmatrix} P_{11,0}^{(i)} & P_{12,0}^{(i)} \\ P_{21,0}^{(i)} & P_{22,0}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(U_0 - \nu) & 1 \\ (U_0 - V_0)V_0 & \frac{1}{2}(U_0 + \nu) \end{pmatrix} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} (\mathcal{K}_{n,0} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathcal{K}_{i,0} + g_n t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

となることがわかる。ただし、ここで  $P_{kl,0}^{(i+1)}(t, \nu)$  を  $P_{kl,0}^{(i+1)}$  と略して書いた。この左辺を  $C(t, \nu)$  とおいておく。この式に対して

$$\mathcal{R}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(U_0 - \nu) & 1 \\ (U_0 - V_0)V_0 & \frac{1}{2}(U_0 + \nu) \end{pmatrix}$$



とにおいて, 補題 3.3 を応用すると, この  $C(t, \nu)$  は

$$\begin{aligned}
 C(t, \nu) &= -4 \det \left[ \begin{pmatrix} P_{11,0}^{(n+1)} & P_{12,0}^{(n+1)} \\ P_{21,0}^{(n+1)} & P_{22,0}^{(n+1)} \end{pmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \begin{pmatrix} P_{11,0}^{(i+1)} & P_{12,0}^{(i+1)} \\ P_{21,0}^{(i+1)} & P_{22,0}^{(i+1)} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} g_n t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\
 &= -4 \det \left[ \sum_{j=0}^n \frac{\kappa_{j,0}}{2} \mathcal{R}^{n-j} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \sum_{j=0}^i \frac{\kappa_{j,0}}{2} \mathcal{R}^{i-j} + \frac{1}{2} g_n t I \right]
 \end{aligned} \tag{61}$$

と書くこともできる.

以上を用いて次の命題を示す.

#### 命題 4.1

(i) (52) の特性方程式 (55) の判別式と (53) の特性方程式 (56) の判別式の間には

$$\{(55) \text{ の判別式} \} = \frac{4}{g_n^2 x^2} \left( S_{n,0} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i S_{i,0} + \frac{g_n t}{2} \right)^2 \times \{(56) \text{ の判別式} \}$$

という関係式が存在する. 従って, (52) の turning point 全体の集合は (57) の零点として与えられる (一般には) double の turning point 全体の集合と (53) の turning point 全体の集合との和集合に等しい.

(ii) (52) の特性方程式 (55) の根を

$$\lambda_{\pm} = \pm \frac{2}{g_n x} T_0 \sqrt{\left(x - \frac{u_0}{2}\right)^2 - v_0}$$

(53) の特性方程式 (56) の根を

$$\mu_{\pm} = \pm \sqrt{\left(x - \frac{u_0}{2}\right)^2 - v_0}$$

とするとき,

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_{\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \mu_{\pm} \quad (\text{複号同順})$$

が成立する.

(iii) 非線形方程式 (49) の  $U = \hat{U}, V = \hat{V}$  における線形化方程式の特性方程式  $C(t, \nu)$  は

$$C(t, \nu) = (-1)^{n+1} 4 \prod_{j=1}^n \det(\mu - B_0) \Big|_{\substack{\mu = \frac{\nu}{2} \\ x = b_j}} \tag{62}$$

という形で書くことができる. 特に,  $C(t, \nu)$  は  $\nu^2$  の多項式であって  $C(t, \nu) = f(t, \nu^2)$  の形に書ける.

(i) 命題の前の考察より明らか.

(ii) まず,  $A_0 = T_0 B_0$  より,  $A_0, B_0$  は同時対角化することができて

$$\frac{g_n x}{2} \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} = T_0 \begin{pmatrix} \mu_+ & 0 \\ 0 & \mu_- \end{pmatrix}$$

が成立する. 一方, Lax pair (52), (53) の両立条件を考えると,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \eta \tilde{B}, \frac{g_n x}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \eta \tilde{A} \right] = -\eta \tilde{A}_t + \eta^2 \tilde{B} \tilde{A} - \eta^2 \tilde{A} \tilde{B} + \frac{g_n}{2} x \eta \tilde{B}_x = 0.$$

この式で  $\eta$  について一次の項を見てみると,

$$-A_{0,t} + [B_0, A_1] + [B_1, A_0] + \frac{g_n}{2} x B_{0,x}$$

となる. この対角成分をみると,  $A_0$  と  $B_0$  が対角行列であることより  $[B_0, A_1] + [B_1, A_0]$  の対角成分は 0. 一方,

$$-A_{0,t} + \frac{g_n x}{2} B_{0,x} = \text{diag} \left( -\frac{g_n}{2} x \frac{\partial \lambda_+}{\partial t} + \frac{g_n}{2} x \frac{\partial \mu_+}{\partial x}, -\frac{g_n}{2} x \frac{\partial \lambda_-}{\partial t} + \frac{g_n}{2} x \frac{\partial \mu_-}{\partial x} \right)$$

より, (ii) がいえる.

(iii) (61) より右辺を変形していくと

$$\begin{aligned} C(t, \nu) &= -4 \det \left[ \left( S_{n,0} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i S_{i,0} + \frac{1}{2} g_n t \right) \Big|_{x=\mathcal{R}'} \right] \\ &= -4 \det \left[ \prod_{j=1}^n (x - b_j) \Big|_{x=\mathcal{R}'} \right] \\ &= -4 \prod_{j=1}^n \det [(x - b_j) |_{x=\mathcal{R}'}] \\ &= -4 \prod_{j=1}^n \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (U_0 - \nu) - b_j & 1 \\ (U_0 - V_0) V_0 & \frac{1}{2} (U_0 + \nu) - b_j \end{pmatrix} \\ &= -4 \prod_{j=1}^n \left[ -\frac{\nu^2}{4} + \left( \frac{U_0}{2} - b_j \right)^2 - (U_0 - V_0) V_0 \right] \\ &= (-1)^{n+1} 4 \prod_{j=1}^n \left[ \mu^2 - \left( \frac{U_0}{2} - b_j \right)^2 + (U_0 - V_0) V_0 \right] \Big|_{\substack{\mu=\frac{\nu}{2} \\ x=b_j}} \end{aligned}$$

が得られる.

(証明終)

#### 4.4 非線形方程式と線形方程式の Stokes 幾何学の関係

非線形方程式の turning point と Stokes 曲線を  $P_{II}$  hierarchy のときと同様に定義し、前小節の結果を用いて  $P_{II}$  hierarchy のときと同様の議論を行えば、次の2つの定理がいえる。

##### 定理 4.2

非線形方程式 (50) の type I の turning point  $t = \tau$  が仮定 (#) をみたすとする。このとき、 $t = \tau$  においては、線形方程式 (52) のある simple turning point  $x = a_k(t)$  ( $1 \leq k \leq 2$ ) とある double turning point  $x = b_j(t)$  ( $1 \leq j \leq n$ ) が合流する。さらに、 $t = \tau$  から出る Stokes 曲線上では、 $a_k(t)$  と  $b_j(t)$  を結ぶ線形方程式 (52) の Stokes 曲線が存在する。

##### 定理 4.3

非線形方程式 (50) の type II の turning point  $t = \tau$  が仮定 (##) をみたすとする。このとき、 $t = \tau$  においては、線形方程式 (52) の2つの double turning point  $b_k(t)$  と  $b_l(t)$  ( $1 \leq k, l \leq n$ ) が合流する。さらに、 $t = \tau$  から出る Stokes 曲線上では、この2つの double turning point  $b_k(t)$  と  $b_l(t)$  を結ぶ線形方程式 (52) の Stokes 曲線が存在する。

## 5 large parameter を持つ $P_{IV}$ hierarchy II の WKB 解析

この節では、第3節と同様にして第2節で導出した  $P_{IV}$  hierarchy II の WKB 解析を行なう。

### 5.1 large parameter の導入

この小節では  $P_{IV}$  hierarchy II (23) とそれに対応する Lax pair (20),(21) に large parameter を導入する。ここでは、 $P_{II}$  hierarchy のときの議論を参考にして、large parameter  $\eta$  を

$$\begin{aligned} t &\mapsto t\eta^T, & u &\mapsto u\eta^{1-T}, & v &\mapsto v\eta^{2(1-T)}, & g_n &\mapsto g_n\eta^{n(1-T)-T}, \\ \gamma &\mapsto \gamma\eta^{(n+1)(1-T)}, & \delta &\mapsto \delta\eta^{2(n+1)(1-T)}, & \psi &\mapsto \psi, & \varphi &\mapsto \varphi\eta^{1-T}, \\ & & c_i &\mapsto c_i\eta^{(n-i)(1-T)} & (1 \leq i \leq n-1) \end{aligned}$$

で導入することにする. (ただし  $T$  は任意定数.) このとき

$$\begin{aligned}\tilde{K}_n &= \tilde{\mathcal{K}}_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \tilde{\mathcal{K}}_i + g_n t, \\ \tilde{L}_n &= \tilde{\mathcal{L}}_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \tilde{\mathcal{L}}_i\end{aligned}$$

とにおいて非線形方程式 (23) に large parameter を入れると

$$\begin{cases} \eta^{-1} \tilde{K}_{n,t} = 2\tilde{L}_n + u\tilde{K}_n + \gamma + g_n \eta^{-1} \\ \eta^{-1} \tilde{L}_{n,t} = \frac{1}{\tilde{K}_n} \left( -v\tilde{K}_n^2 - \tilde{L}_n^2 + \eta^{-1} \tilde{K}_{n,t} \tilde{L}_n - u\tilde{K}_n \tilde{L}_n + \delta + \frac{g_n}{2} \gamma \eta^{-1} \right) \end{cases} \quad (63)$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{G} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_0 + \eta^{-1} F_1 + \cdots + \eta^{-n} F_n \\ G_0 + \eta^{-1} G_1 + \cdots + \eta^{-n} G_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \eta^{-1} \tilde{K}_{n,t} - 2\tilde{L}_n - u\tilde{K}_n - \gamma - g_n \eta^{-1} \\ \eta^{-1} \tilde{K}_n \tilde{L}_{n,t} + v\tilde{K}_n^2 + \tilde{L}_n^2 - \eta^{-1} \tilde{K}_{n,t} \tilde{L}_n + u\tilde{K}_n \tilde{L}_n - \delta - \frac{g_n}{2} \gamma \eta^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (64)$$

として,  $u, v$  の微分多項式,  $F_0, \dots, F_n, G_0, \dots, G_n$  と  $\tilde{F}, \tilde{G}$  を定義しておく. すると,  $\tilde{\mathcal{K}}_i, \tilde{\mathcal{L}}_i$  の性質より,  $F_0 = F_0(t, u, v), G_0 = G_0(t, u, v)$  が  $t, u, v$  の多項式となることがすぐにわかる.

次に, Lax pair (24), (25) に large parameter を入れた式は

$$\frac{g_n}{2} x \Psi_x = \eta \tilde{A}_{IV'} \Psi \quad (65)$$

$$\Psi_t = \eta \tilde{B} \Psi \quad (66)$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{IV'} &= \tilde{A}_{IV'}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \tilde{A}_{IV'}^{(i)} + \tilde{A}_{IV'}^{(-1)} + \tilde{A}_{IV'}^{(-2)}, \\ \tilde{A}_{IV'}^{(i)} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \left( (2x - u) \tilde{S}_i + \tilde{S}_{i,t} \eta^{-1} + \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} \right) & \tilde{S}_i \\ -\frac{1}{2} \eta^{-1} \left( (2x - u) \tilde{S}_i + \tilde{S}_{i,t} \eta^{-1} + \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} \right)_t - v \tilde{S}_i & \frac{1}{2} \left( (2x - u) \tilde{S}_i + \tilde{S}_{i,t} \eta^{-1} + \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} \right) \end{pmatrix} \\ &\quad (0 \leq i \leq n), \end{aligned}$$

$$\tilde{A}_{IV'}^{(-1)} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} - \frac{x}{2} g_n t - \frac{g_n}{4} \eta^{-1} & \frac{1}{2} g_n t \\ -\frac{v}{2} g_n t & \frac{\gamma}{2} + \frac{x}{2} g_n t + \frac{g_n}{4} \eta^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_{IV'}^{(-2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{K}_n \tilde{L}_{n,t} + v\tilde{K}_n^2 - \tilde{L}_n^2 - (\gamma + g_n \eta^{-1}) \tilde{L}_n - \delta - \frac{g_n}{2} \gamma \eta^{-1}}{\tilde{K}_n} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} -x + \frac{u}{2} & 1 \\ -v & x - \frac{u}{2} \end{pmatrix}$$

とおいた. 以上により  $P_{IV}$  hierarchy II に large parameter が導入された.

## 5.2 0-パラメータ解について

この小節では, 前小節で導入した large parameter  $\eta$  を含んだ非線形方程式 (63) に対して,  $\eta$  の負べきに関する形式的べき級数解を構成する.

まず,  $F_0, G_0$  を用いて集合  $\Delta$  を

$$\Delta = \left\{ t \in \mathbb{C} \left| \begin{array}{l} \text{ある } u, v \text{ について,} \\ F_0(t, u, v) = G_0(t, u, v) = \frac{\partial F_0}{\partial u} \frac{\partial G_0}{\partial v} - \frac{\partial F_0}{\partial v} \frac{\partial G_0}{\partial u} = 0 \\ \text{が成立する.} \end{array} \right. \right\}$$

で定義すると, (63) の  $\eta^{-1}$  に関する形式的べき級数解は次の定理により構成される.

定理 5.1

$t_0$  を  $\Delta$  に含まれない  $\mathbb{C}$  の点としたとき,  $t_0$  の適当な近傍  $\mathcal{U}$  上で, (63) をみたす  $\eta^{-1}$  についての形式的べき級数解

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}(t, \eta) \\ \hat{v}(t, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(t) + u_1(t)\eta^{-1} + u_2(t)\eta^{-2} + \dots \\ v_0(t) + v_1(t)\eta^{-1} + v_2(t)\eta^{-2} + \dots \end{pmatrix} \quad (67)$$

が存在し,

- (i)  $u_j(t), v_j(t)$  は  $\mathcal{U}$  上正則 ( $j \geq 0$ )
- (ii)  $F_0(t, u_0(t), v_0(t)) = G_0(t, u_0(t), v_0(t)) = 0$  ( $t \in \mathcal{U}$ )

をみたす.

さらに,  $(u_j(t), v_j(t))$  ( $j \geq 1$ ) は,  $(u_0(t), v_0(t))$  が決まれば, 後は一意的に決定される.

証明は  $P_{IV}$  hierarchy の時と同じ.

この定理により構成された解を (63) の 0-パラメータ解と呼ぶ. 以下では, この 0-パラメータ解についてもう少し考察してみる (63) には,  $\eta$  の奇数乗の項があらわれるが,  $v = V + \frac{u}{2}\eta^{-1}$  という変換をしたときの  $K_n$  を  $\hat{K}_n$ ,  $L_n$  を  $\hat{L}_n$ ,  $\tilde{K}_{i+1}$  を  $\hat{K}_{i+1}$ ,  $\tilde{L}_{i+1}$  を  $\hat{L}_{i+1}$  ( $i \geq 0$ ) とおくと, 次が成立することがわかる.

$$\begin{cases} \eta^{-1}\hat{K}_{n,t} - 2\hat{L}_n - u\hat{K}_n - \gamma - g_n\eta^{-1} = 0 \\ \eta^{-1}\hat{K}_n\hat{L}_{n,t} + v\hat{K}_n^2 + \hat{L}_n^2 - \eta^{-1}\hat{K}_{n,t}\hat{L}_n + u\hat{K}_n\hat{L}_n - \delta - \frac{g_n}{2}\gamma\eta^{-1} \\ \quad + \frac{\eta^{-1}}{2}(\hat{K}_n\partial_t - g_n)(\eta^{-1}\hat{K}_{n,t} - 2\hat{L}_n - u\hat{K}_n - \gamma - g_n\eta^{-1}) = 0 \end{cases} \quad (68)$$

の両辺には  $\eta$  の偶数べきのみしかあらわれない。

(証明)

$\hat{K}_{i+1}, \hat{L}_{i+1} - \frac{1}{2}\eta^{-1}\partial_t\hat{K}_{i+1}$  が  $\eta$  の偶数べきのみで書けることは  $P_{II}$  のときと同じ。また、このことより  $\hat{K}_n, \hat{L}_n - \frac{1}{2}\eta^{-1}\partial_t(\hat{K}_n - g_{nt})_t$  も  $\eta$  の偶数べきのみで書けることがわかる。よって (68) を計算すると

第一式は

$$-2\left(\hat{L}_n - \frac{\eta^{-1}}{2}(\hat{K}_n - g_{nt})_t\right) - u\hat{K}_n - \gamma = 0$$

第二式は

$$\begin{aligned} & v\hat{K}_n^2 + \left(\hat{L}_n - \frac{\eta^{-1}}{2}(\hat{K}_n - g_{nt})_t\right)^2 - \frac{\eta^{-2}}{4}\left[(\hat{K}_n - g_{nt})_t\right]^2 \\ & + u\hat{K}_n\left(\hat{L}_n - \frac{\eta^{-1}}{2}(\hat{K}_n - g_{nt})_t\right) - \delta + \frac{\eta^{-2}}{2}\hat{K}_n\hat{K}_{n,tt} - \frac{\eta^{-2}}{2}g_n\hat{K}_{n,t} + \frac{\eta^{-2}}{2}g_n^2 \\ & = 0 \end{aligned}$$

となり、 $\eta$  の偶数べきのみで書けることがわかる。

(証明終)

この補題 5.1 と、定理 5.1 の証明よりただちに次がわかる。

補題 5.2

定理 5.1 で構成された 0-パラメータ解 (67) は

$$\begin{cases} u = \hat{u}(t, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} u_{2i}\eta^{-2i} \\ v = \hat{v}(t, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} v_{2i}\eta^{-2i} + \frac{\eta^{-1}}{2}\sum_{i=0}^{\infty} u_{2i,t}\eta^{-2i} \end{cases} \quad (69)$$

という形をしている。

以下、この節においては、この小節で構成した (63) の 0-パラメータ解 (69) を Lax pair (65), (66) の係数の  $u, v$  に代入した線形方程式系と非線形方程式との関係を考える。以下では特に断りのない限り代入した後の式も同じ記号で表すことにし、簡単のため  $A_{IV'}$  な

どの添字  $IV'$  も省略することにする. つまり次のような記号を用いる.

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{(i)} &= \tilde{A}_{IV'} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = A_0^{(i)} + \eta^{-1} A_1^{(i)} + \cdots \quad (0 \leq i \leq n), \\ \tilde{A}^{(-1)} &= \tilde{A}_{IV'} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = A_0^{(-1)} + \eta^{-1} A_1^{(-1)} + \cdots, \\ \tilde{A}^{(-2)} &= \tilde{A}_{IV'} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = A_0^{(-2)} + \eta^{-1} A_1^{(-2)} + \cdots, \\ \tilde{A} &= \tilde{A}_{IV'} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = A_0 + \eta^{-1} A_1 + \cdots, \\ \tilde{B} &= \tilde{B} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = B_0 + \eta^{-1} B_1 + \cdots, \\ \tilde{S}_i &= \tilde{S}_i \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = S_{i,0} + \eta^{-1} S_{i,1} + \cdots \quad (0 \leq i \leq n), \\ \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} &= \tilde{\mathcal{K}}_{i+1} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = \mathcal{K}_{i+1,0} + \eta^{-1} \mathcal{K}_{i+1,1} + \cdots \quad (0 \leq i \leq n), \\ \tilde{\mathcal{L}}_{i+1} &= \tilde{\mathcal{L}}_{i+1} \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = \mathcal{L}_{i+1,0} + \eta^{-1} \mathcal{L}_{i+1,1} + \cdots \quad (0 \leq i \leq n), \\ \tilde{K}_n &= \tilde{K}_n \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = K_{n,0} + \eta^{-1} K_{n,1} + \cdots, \\ \tilde{L}_n &= \tilde{L}_n \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = L_{n,0} + \eta^{-1} L_{n,1} + \cdots.\end{aligned}$$

さらに,  $\tilde{T}$  を

$$\tilde{T} = \left( \tilde{S}_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \tilde{S}_i + \frac{gnt}{2} \right) \Big|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} = T_0 + \eta^{-1} T_1 + \cdots$$

で定義しておく. このとき特に,

$$A_0^{(i)} = \begin{pmatrix} -(x - \frac{u_0}{2}) S_{i,0} - \frac{1}{2} \mathcal{K}_{i+1,0} & S_{i,0} \\ -v_0 S_{i,0} & (x - \frac{u_0}{2}) S_{i,0} + \frac{1}{2} \mathcal{K}_{i+1,0} \end{pmatrix} \quad (0 \leq i \leq n)$$

$$A_1^{(i)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} S_{i,0,t} & 0 \\ -\frac{u_{0,t}}{2} S_{i,0} - \frac{1}{2} [(2x - u_0) S_{i,0} + \mathcal{K}_{i+1,0}]_t & \frac{1}{2} S_{i,0,t} \end{pmatrix} \quad (0 \leq i \leq n),$$

$$A_0^{(-1)} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{4} - \frac{gnt}{2} x & \frac{gnt}{2} \\ -\frac{gnt}{2} v_0 & \frac{\gamma}{4} + \frac{gnt}{2} x \end{pmatrix}, \quad A_1^{(-1)} = \begin{pmatrix} -\frac{gn}{4} & 0 \\ -\frac{gnt}{4} u_t & \frac{gn}{4} \end{pmatrix},$$

$$A_0^{(-2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{v_0 K_{n,0}^2 - L_{n,0}^2 - \gamma L_{n,0} - \delta}{K_{n,0}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1^{(-2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{K_{n,0} L_{n,0,t} + \frac{u_t}{2} K_{n,0}^2 - 2L_{n,0} L_{n,1} - \gamma L_{n,1} - g_n L_{n,0} - \frac{\gamma}{2} g_n}{K_{n,0}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} -x + \frac{u_0}{2} & 1 \\ -v_0 & x - \frac{u_0}{2} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{u_{0,t}}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_{i,0} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^i x^{i-j} \mathcal{K}_{j,0},$$

$$T_0 = S_{n,0} + \sum_{i=1}^{n-1} S_{i,0} + \frac{g_n t}{2},$$

$$A_0 = T_0 \begin{pmatrix} -x + \frac{u_0}{2} & 1 \\ -v_0 & x - \frac{u_0}{2} \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} T_{0,t} & 0 \\ -\frac{1}{2} (2x - u_0) T_{0,t} + \frac{g_n x}{2} & \frac{1}{2} T_{0,t} \end{pmatrix}$$

となることがわかる. とくに

$$A_0 = T_0 B_0$$

が成立していることに注意する.

以上を用いて次小節では非線形方程式と Lax pair の種々の関係を示す.

### 5.3 非線形方程式と Lax pair の関係

この小節では次小節で考える非線形方程式の Stokes 幾何学と線形方程式の Stokes 幾何学の橋渡しをする非線形方程式と線形方程式の種々の関係を示すことを目標とする.

まず, 線形方程式 (65), (66) に対してその特性方程式を考えると  $\text{tr} A_0 = 0, \text{tr} B_0 = 0$  より,

$$\begin{aligned} & \det \left( \frac{1}{2} g_n x \lambda - A_0 \right) \\ &= \frac{1}{4} g_n^2 x^2 \lambda^2 + \det A_0 \\ &= \frac{1}{4} g_n^2 x^2 \lambda^2 + \left( S_{n,0} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i S_{i,0} + \frac{g_n t}{2} \right)^2 \left( - \left( x - \frac{u_0}{2} \right)^2 + v_0 \right) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned} & \det (\mu - B_0) \\ &= \mu^2 + \det B_0 \\ &= \mu^2 - \left( x - \frac{u_0}{2} \right)^2 + v_0 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{71}$$



となる. よって, (65) の simple turning point は generic には

$$-\left(x - \frac{u_0}{2}\right)^2 + v_0 = 0$$

の根で, これを  $a_1(t), a_2(t)$  とおく. 次に, (65) の double turning point は generic には

$$S_{n,0} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i S_{i,0} + \frac{g_n t}{2} = 0 \quad (72)$$

の根であるが,  $S_{i,0}$  が  $x$  の  $i$  次式であり  $x^i$  の係数が 1 であることから, この方程式の根は全部で  $n$  個あり, これらを  $b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)$  とおく. 一方, (66) の turning point は

$$-\left(x - \frac{u_0}{2}\right)^2 + v_0 = 0$$

の根で, これらは  $a_1(t), a_2(t)$  と一致する.

次に, 非線形方程式 (63) の  $u = \hat{u}, v = \hat{v}$  における線形化方程式とその特性方程式を求める.  $\Delta \tilde{K}_{i+1}, \Delta \tilde{L}_{i+1}, P_{kl}^{(i+1)}$  を  $P_{II}$  hierarchy のときと同じ記号とし, さらに  $\tilde{K}_n, \tilde{L}_n$  の  $u, v$  に  $u = \hat{u} + \Delta u, v = \hat{v} + \Delta v$  を代入して  $\Delta u, \Delta v$  について一次の項を取ってきたものを  $\Delta \tilde{K}_n, \Delta \tilde{L}_n$  とおいておく. この記号を用いると (63) の  $u = \hat{u}, v = \hat{v}$  における線形化方程式は

$$\begin{aligned} \eta^{-1} \partial_t (\Delta \tilde{K}_n) &= 2\Delta \tilde{L}_n + \hat{u} \Delta \tilde{K}_n + \Delta u \tilde{K}_n \\ \eta^{-1} \partial_t (\Delta \tilde{L}_n) &= \frac{1}{\tilde{K}_n} \left( -\eta^{-1} \Delta \tilde{K}_n \tilde{L}_{n,t} - \Delta v \tilde{K}_n^2 - 2\hat{v} \tilde{K}_n \Delta \tilde{K}_n - 2\tilde{L}_n \Delta \tilde{L}_n \right. \\ &\quad \left. - \eta^{-1} \partial_t (\Delta \tilde{K}_n) \tilde{L}_n + \eta^{-1} \tilde{K}_{n,t} \Delta \tilde{L}_n - \Delta u \tilde{K}_n \tilde{L}_n \right. \\ &\quad \left. - \hat{u} \Delta \tilde{K}_n \tilde{L}_n - \hat{u} \tilde{K}_n \Delta \tilde{L}_n \right) \end{aligned} \quad (73)$$

と書ける. これを  $\Delta u, \Delta v$  についてまとめてみると

$$\begin{aligned} &\left[ (\eta^{-1} \partial_t - \hat{u}) \left( P_{11}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_{11}^{(i)} \right) - 2 \left( P_{21}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_{21}^{(i)} \right) - \tilde{K}_n \right] \Delta u \\ &+ \left[ (\eta^{-1} \partial_t - \hat{u}) \left( P_{12}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_{12}^{(i)} \right) - 2 \left( P_{22}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_{22}^{(i)} \right) \right] \Delta v = 0 \\ &\frac{1}{\tilde{K}_n} \left[ \left( \eta^{-1} \tilde{L}_{n,t} + 2\hat{v} \tilde{K}_n - \tilde{L}_n \eta^{-1} \partial_t + \hat{u} \tilde{L}_n \right) \left( P_{11}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_{11}^{(i)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \tilde{K}_n \eta^{-1} \partial_t + 2\tilde{L}_n - \eta^{-1} \tilde{K}_{n,t} + \hat{u} \tilde{K}_n \right) \left( P_{21}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_{21}^{(i)} \right) + \tilde{K}_n \tilde{L}_n \right] \Delta u \\ &+ \frac{1}{\tilde{K}_n} \left[ \left( \eta^{-1} \tilde{L}_{n,t} + 2\hat{v} \tilde{K}_n - \tilde{L}_n \eta^{-1} \partial_t + \hat{u} \tilde{L}_n \right) \left( P_{12}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_{12}^{(i)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \tilde{K}_n \eta^{-1} \partial_t + 2\tilde{L}_n - \eta^{-1} \tilde{K}_{n,t} + \hat{u} \tilde{K}_n \right) \left( P_{22}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i P_{22}^{(i)} \right) + \tilde{K}_n^2 \right] \Delta v = 0 \end{aligned}$$

となる. ただし,  $P_{kl}^{(i+1)}(t, \eta^{-1} \frac{d}{dt}, \eta^{-1})$  を  $P_{kl}^{(i+1)}$  と略して書いた. 従って, この方程式の特性方程式は

$$\begin{aligned}
 & -4 \det \left[ \begin{pmatrix} P_{11,0}^{(n)} & P_{12,0}^{(n)} \\ P_{21,0}^{(n)} & P_{22,0}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_0 - \nu) & 1 \\ v_0 & \frac{1}{2}(u_0 + \nu) \end{pmatrix} \right. \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \begin{pmatrix} P_{11,0}^{(i)} & P_{12,0}^{(i)} \\ P_{21,0}^{(i)} & P_{22,0}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_0 - \nu) & 1 \\ v_0 & \frac{1}{2}(u_0 + \nu) \end{pmatrix} \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} (\mathcal{K}_{n,0} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathcal{K}_{i,0} + gnt) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (75)
 \end{aligned}$$

となる. ただし  $P_{kl,0}^{(i+1)}(t, \nu)$  を  $P_{kl,0}^{(i+1)}$  と略して書いた. この左辺を  $C(t, \nu)$  とおいておく. この式に対して補題 3.3 を適用すると  $C(t, \nu)$  は

$$\begin{aligned}
 C(t, \nu) &= -4 \det \left[ \begin{pmatrix} P_{11,0}^{(n+1)} & P_{12,0}^{(n+1)} \\ P_{21,0}^{(n+1)} & P_{22,0}^{(n+1)} \end{pmatrix} \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \begin{pmatrix} P_{11,0}^{(i+1)} & P_{12,0}^{(i+1)} \\ P_{21,0}^{(i+1)} & P_{22,0}^{(i+1)} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} gnt \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\
 &= -4 \det \left[ \sum_{j=0}^n \frac{\mathcal{K}_{j,0}}{2} \mathcal{R}^{n-j} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \sum_{j=0}^i \frac{\mathcal{K}_{j,0}}{2} \mathcal{R}^{i-j} + \frac{1}{2} gnt I \right] \quad (76)
 \end{aligned}$$

と書けることがわかる.

以上を用いて次の命題を示す.

#### 命題 5.1

(i) (65) の特性方程式 (70) の判別式と (66) の特性方程式 (71) の判別式の間には

$$\{(70) \text{ の判別式} \} = \frac{4}{g_n^2 x^2} \left( S_{n,0} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i S_{i,0} + \frac{gnt}{2} \right)^2 \times \{(71) \text{ の判別式} \}$$

という関係式が存在する. 従って, (65) の turning point 全体の集合は (72) の零点として与えられる (一般には) double の turning point 全体の集合と (66) の turning point 全体の集合との和集合に等しい.

(ii) (65) の特性方程式 (70) の根を

$$\lambda_{\pm} = \pm \frac{2}{g_n x} T_0 \sqrt{\left(x - \frac{u_0}{2}\right)^2 - v_0},$$

(66) の特性方程式 (71) の根を

$$\mu_{\pm} = \pm \sqrt{\left(x - \frac{u_0}{2}\right)^2 - v_0}$$

とするとき,

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_{\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \mu_{\pm} \quad (\text{複号同順})$$

が成立する.

(iii) 非線形方程式 (63) の  $u = \hat{u}, v = \hat{v}$  における線形化方程式の特性方程式  $C(t, \nu)$  は

$$C(t, \nu) = (-1)^{n+1} 4 \prod_{j=1}^n \det(\mu - B_0) \Big|_{\substack{\mu = \frac{\nu}{2} \\ x = b_j}} \quad (77)$$

という形で書くことができる. 特に,  $C(t, \nu)$  は  $\nu^2$  の多項式であって  $C(t, \nu) = f(t, \nu^2)$  の形に書ける.

(証明)

(i) 命題の前の考察より明らか.

(ii) Lax pair (65), (66) の両立条件を考えると,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \eta \tilde{B}, \frac{g_n}{2} x \frac{\partial}{\partial x} - \eta \tilde{A} \right] = -\eta \tilde{A}_t + \eta^2 \tilde{B} \tilde{A} - \eta^2 \tilde{A} \tilde{B} + \frac{g_n}{2} x \eta \tilde{B}_x = 0.$$

$[A_0, B_0] = 0$  より  $\eta^2$  の項は明らかに 0. 次に  $\eta^1$  の項を見ると,

$$-A_{0,t} + B_0 A_1 + B_1 A_0 - A_0 B_1 - A_1 B_0 + \frac{g_n}{2} x B_{0,x} = 0.$$

左辺を計算すると (2,1) 成分以外は 0 だが, (2,1) 成分は

$$2 \left( - \left( x - \frac{u_0}{2} \right)^2 + v_0 \right) T_{0,t} + T_0 \left( \left( x - \frac{u_0}{2} \right) u_{0,t} + v_{0,t} \right) + g_n x \left( x - \frac{u_0}{2} \right)$$

となり, ここから

$$\frac{2}{g_n x} \left( \left( x - \frac{u_0}{2} \right)^2 - v_0 \right) T_{0,t} - \frac{1}{g_n x} T_0 \left( \left( x - \frac{u_0}{2} \right) u_{0,t} + v_{0,t} \right) = \left( x - \frac{u_0}{2} \right)$$

という関係式が出てくる. この式を使うと

$$\begin{aligned} \sqrt{\left( x - \frac{u_0}{2} \right)^2 - v_0} \frac{\partial \lambda_+}{\partial t} &= \frac{2}{g_n x} T_{0,t} \left( \left( x - \frac{u_0}{2} \right)^2 - v_0 \right) \\ &\quad - \frac{1}{g_n x} T_0 \left( \left( x - \frac{u_0}{2} \right) u_{0,t} + v_{0,t} \right) \\ &= \left( x - \frac{u_0}{2} \right) \\ \sqrt{\left( x - \frac{u_0}{2} \right)^2 - v_0} \frac{\partial \mu_+}{\partial x} &= \left( x - \frac{u_0}{2} \right) \end{aligned}$$

となり, これより

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_+ = \frac{\partial}{\partial x} \mu_+$$

が成立することがわかる. 同様にして

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_- = \frac{\partial}{\partial x} \mu_-$$

もわかる.

(iii) (76) より右辺を変形していくと

$$\begin{aligned} C(t, \nu) &= -4 \det \left[ \left( \sum_{j=0}^n \frac{\mathcal{K}_{j,0}}{2} x^{n-j} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \sum_{j=0}^i \frac{\mathcal{K}_{j,0}}{2} x^{i-j} + \frac{1}{2} g_n t \right) \Big|_{x=\mathcal{R}} \right] \\ &= -4 \det \left[ \left( S_{n,0} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i S_{i,0} + \frac{1}{2} g_n t \right) \Big|_{x=\mathcal{R}} \right] \\ &= -4 \det \left[ \prod_{j=1}^n (x - b_j) \Big|_{x=\mathcal{R}} \right] \\ &= -4 \prod_{j=1}^n \det [(x - b_j) \Big|_{x=\mathcal{R}}] \\ &= -4 \prod_{j=1}^n \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_0 - \nu) - b_j & 1 \\ v_0 & \frac{1}{2}(u_0 + \nu) - b_j \end{pmatrix} \\ &= -4 \prod_{j=1}^n \left[ -\frac{\nu^2}{4} + \left( \frac{u_0}{2} - b_j \right)^2 - v_0 \right] \\ &= (-1)^{n+1} 4 \prod_{j=1}^n \left[ \mu^2 - \left( \frac{u_0}{2} - b_j \right)^2 + v_0 \right] \Big|_{\substack{\mu=\frac{\nu}{2} \\ x=b_j}} \end{aligned}$$

が得られる.

(証明終)

## 5.4 非線形方程式と線形方程式の Stokes 幾何学の関係

非線形方程式の turning point と Stokes 曲線を  $P_{II}$  hierarchy のときと同様に定義し, 前小節の結果を用いて  $P_{II}$  hierarchy のときと同様の議論を行なえば, 次の2つの定理が

非線形方程式 (63) の type I の turning point  $t = \tau$  が仮定 (#) をみたすとする. このとき,  $t = \tau$  においては, 線形方程式 (65) のある simple turning point  $x = a_k(t)$  ( $1 \leq k \leq 2$ ) とある double turning point  $x = b_j(t)$  ( $1 \leq j \leq n$ ) が合流する. さらに,  $t = \tau$  から出る Stokes 曲線上では,  $a_k(t)$  と  $b_j(t)$  を結ぶ線形方程式 (65) の Stokes 曲線が存在する.

### 定理 5.3

非線形方程式 (63) の type II の turning point  $t = \tau$  が仮定 (##) をみたすとする. このとき,  $t = \tau$  においては, 線形方程式 (65) の 2 つの double turning point  $b_k(t)$  と  $b_l(t)$  ( $1 \leq k, l \leq n$ ) が合流する. さらに,  $t = \tau$  から出る Stokes 曲線上では, この 2 つの double turning point  $b_k(t)$  と  $b_l(t)$  を結ぶ線形方程式 (65) の Stokes 曲線が存在する.

## 6 $P_{II}$ hierarchy で $n = 2$ としたときの方程式の Stokes 曲線について

この節では,  $P_{II}$  hierarchy の  $n = 2$  の方程式の種々の Stokes 曲線を計算機を用いて具体的に図示してみる.

$P_{II}$  hierarchy (30) で  $n = 2$  とした方程式というのは

$$\tilde{K}_3 + c_0 \tilde{K}_1 + g_3 \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta - \frac{\eta^{-1}}{2} g_3 \end{pmatrix} \quad (78)$$

という式であり, 具体的には

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} u^3 + 6uv - 3uu_t \eta^{-1} + u_{tt} \eta^{-2} \\ 3u^2v + 3v^2 + 3uv_t \eta^{-1} + v_{tt} \eta^{-2} \end{pmatrix} + c_0 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + g_3 \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta - \frac{\eta^{-1}}{2} g_3 \end{pmatrix} \quad (79)$$

という形をしている. とくに,  $\eta$  について 0 次の項は

$$\begin{aligned} F_0(t, u, v) &= \frac{1}{4} (u^3 + 6uv + 4c_0u + 4g_3t) \\ G_0(t, u, v) &= \frac{1}{4} (3u^2v + 3v^2 + 4c_0v - \delta) \end{aligned}$$

となる. また, 式 (79) は  $v$  を消去することにより  $u$  についての単独 4 階の微分方程式にすることができて

$$\begin{aligned} u_{ttt} &= \frac{1}{2u^2} \left[ \eta^4 (16g_3^2 t^2 u - 16c_0^2 u^3 - 48\delta u^3 - 16g_3 t u^4 - 24c_0 u^5 - 5u^7) \right. \\ &\quad + \eta^2 (16g_3 u u_t - 16g_3 t u_t^2 + 5u^3 u_t^2 + 16g_3 t u u_{tt} + 10u^4 u_{tt}) \\ &\quad \left. - 4u_t^2 u_{tt} + 3u u_{tt}^2 + 4u u_t u_{ttt} \right] \end{aligned} \quad (80)$$

という形で書くこともできる.

非線形方程式 (78) に対応する Lax pair は (27)(28) で  $n = 2$  とした式

$$\frac{1}{2} g_3 \Psi_x = \eta \tilde{A} \Psi \quad (81)$$

$$\Psi_t = \eta \tilde{B} \Psi \quad (82)$$

で与えられる。ここで

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11} \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = -\frac{1}{4} [4x^3 + 2vx + 2uv + v_t \eta^{-1}] - c_0 x - \frac{1}{2} g_3 t,$$

$$A_{12} = \frac{1}{4} [4x^2 + 2ux + u^2 + 2v - u_t \eta^{-1}] + c_0,$$

$$A_{21} = \frac{1}{4} [-4vx^2 + (-2uv - 2v_t \eta^{-1})x + v^2 + 2u^2v + uv_t \eta^{-1} - u_t v \eta^{-1}] \\ - \delta + \frac{1}{2} g_3 \eta^{-1},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} -x + \frac{u}{2} & 1 \\ -v & x - \frac{u}{2} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix}$$

とおいた。

非線形方程式 (78) の 0-パラメータ解

$$\begin{cases} u = \hat{u}(t, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} u_{2i} \eta^{-2i} \\ v = \hat{v}(t, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} v_{2i} \eta^{-2i} + \frac{\eta^{-1}}{2} \sum_{i=0}^{\infty} u_{2i,t} \eta^{-2i} \end{cases} \quad (83)$$

の  $\eta$  について 0 次の項については,  $u_0(t)$  は

$$5u^6 + 24c_0 u^4 + 16g_3 t u^3 + 12\delta u^2 + 16c_0^2 u^2 - 16g_3^2 t^2 = 0 \quad (84)$$

をみたす代数関数として決まり,  $v_0(t)$  はこの  $u_0(t)$  を用いて

$$v_0 = \frac{-1}{6u_0} (u_0^3 + 4c_0 u_0 + 4g_3 t)$$

と書ける。非線形方程式 (78) の  $u = \hat{u}, v = \hat{v}$  における線形化方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (3\hat{u}^2 + 6\hat{v} + 4c_0 - 3\hat{u}_t \eta^{-1} - 3\hat{u} \eta^{-1} \partial_t + \eta^{-2} \partial_t^2) \Delta u \\ & + \frac{1}{4} (6\hat{u}) \Delta v = 0 \\ & \frac{1}{4} (6\hat{u}\hat{v} + 3\hat{v}_t \eta^{-1}) \Delta u \\ & + \frac{1}{4} (3\hat{u}^2 + 6\hat{v} + 4c_0 + 3\hat{u} \eta^{-1} \partial_t + \eta^{-2} \partial_t^2) \Delta v = 0 \end{aligned} \quad (85)$$

となり, その特性方程式は

$$C(t, \nu) = \frac{1}{16} [\nu^4 + (12v_0 + 8c_0 - 3u_0^2) \nu^2 \\ + 9u_0^4 + 36v_0^2 + 16c_0^2 + 24c_0 u_0^2 + 48c_0 v_0] \quad (86)$$

$$= \frac{1}{16} \left[ \nu^4 + \frac{1}{u_0} (-5u_0^3 - 8g_3 t) \nu^2 \right. \quad (87)$$

$$\left. + \frac{1}{u_0^2} (10u_0^6 + 24c_0 u_0^4 + 8g_3 t u_0^3 + 16g_3^2 t^2) \right] \quad (88)$$

以下ではパラメータを

$$g_3 = 3 + 2i, \quad c_0 = 2.2 + 1.3i, \quad \delta = 2 + 2.6i$$

とにおいて, 計算機を使って描いた Stokes 曲線を示していく.

### 6.1 非線形方程式 (78) の Stokes 曲線

この小節では非線形方程式 (78) の Stokes 曲線を示す. 今の場合,  $u_0$  が 6 価の関数であるから, この方程式の Stokes 曲線は各分枝に対応して 6 枚の sheet に描かれるべきであるが, まずは分岐を無視して非線形方程式の全ての Stokes 曲線を一つの平面に描いた図を示す.

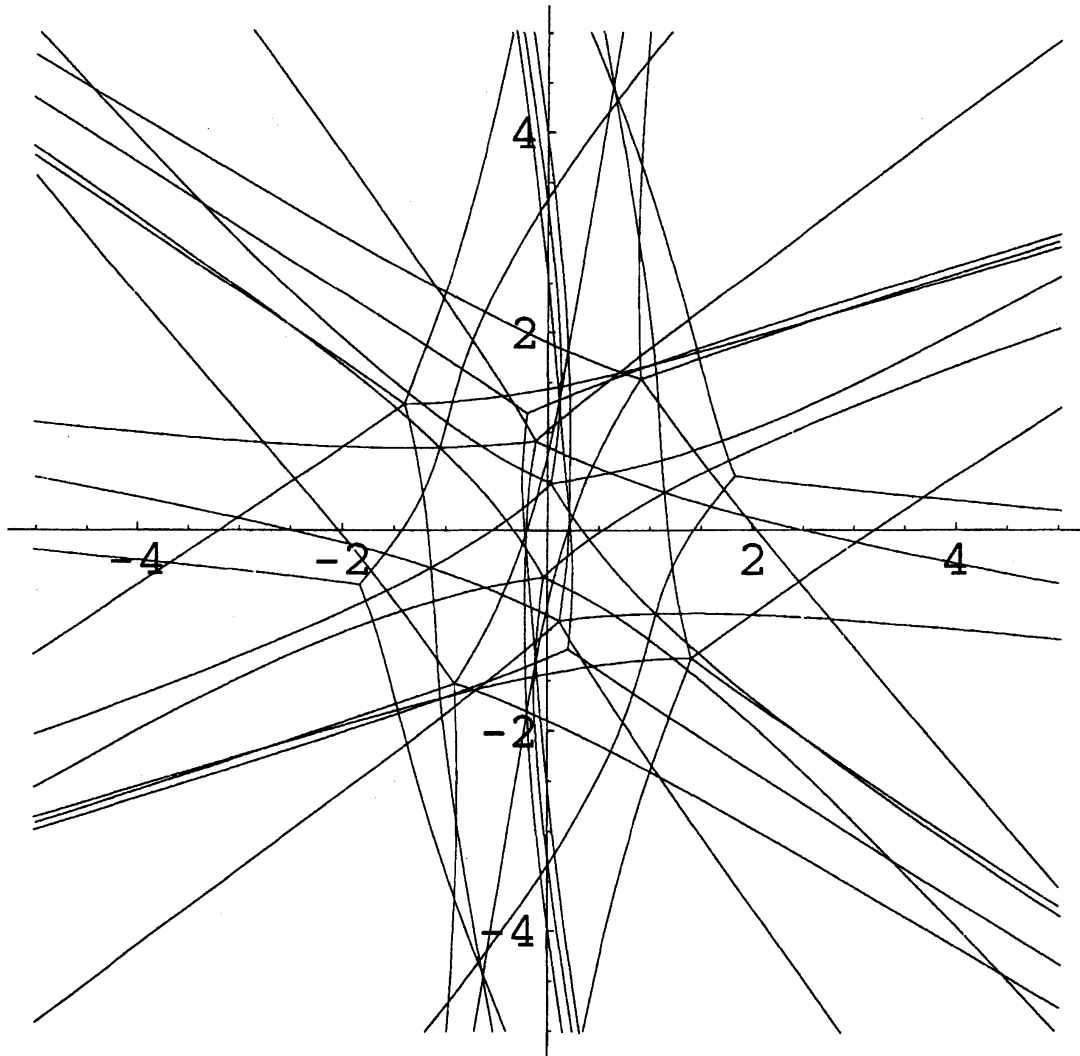


図 1: 非線形方程式 (78) の Stokes 曲線

ここで, turning point を小数点第六位以下を略して実部が小さい順に並べると, type I の turning point が

$$\begin{aligned} \tau_1 &: -1.40632 + 1.28161i & \tau_2 &: -0.90750 - 1.53063i \\ \tau_3 &: -0.11658 + 0.90852i & \tau_4 &: -0.03658 - 0.47213i \\ \tau_5 &: 0.03658 + 0.47213i & \tau_6 &: 0.11658 - 0.90852i \\ \tau_7 &: 0.90750 + 1.53063i & \tau_8 &: 1.40632 - 1.28161i \end{aligned} ,$$

type II の turning point が

$$\begin{aligned} \sigma_1 &: -1.83111 - 0.54816i & \sigma_2 &: -0.20295 + 1.18803i \\ \sigma_3 &: 0.20295 - 1.18803i & \sigma_4 &: 1.83111 + 0.54816i \end{aligned}$$

となる.

次に,  $u_0$  の分枝を考慮に入れて描いた Stokes 曲線の図を示す. ここで, type I の turning point は  $u_0$  の分岐点であることに注意して, 次の図において, Stokes 曲線が出ている type I の turning point で, 上半平面にあるものからは実軸に平行に  $-\infty$  の方向に, 下半平面にあるものからは実軸に平行に  $+\infty$  の方向に, cut を入れるものとする. 今の場合,  $u_0$  の分岐点における特異性はすべて  $\frac{1}{2}$  乗の特異性であるので互いに移り合う cut はすぐにわかる. 各 sheet における  $u_0$  の値は  $\tau_7$  の近傍における  $u_0$  の値を (84) にしたがって解析接続して与えた. 又, 次の図ではある turning point から出た Stokes 曲線が他の turning point から出る cut を越えても描かれているが, 実際には Stokes 曲線は cut を越えればそのまま別の sheet に移って描かれなくてはならない.

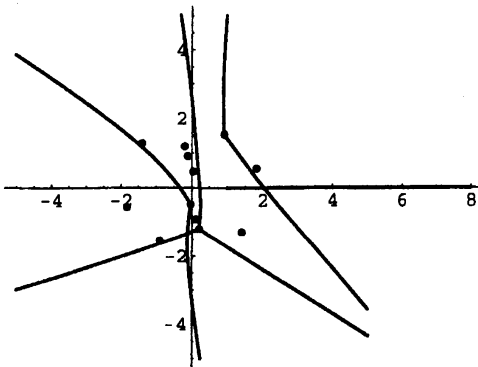


図 2: sheet 1

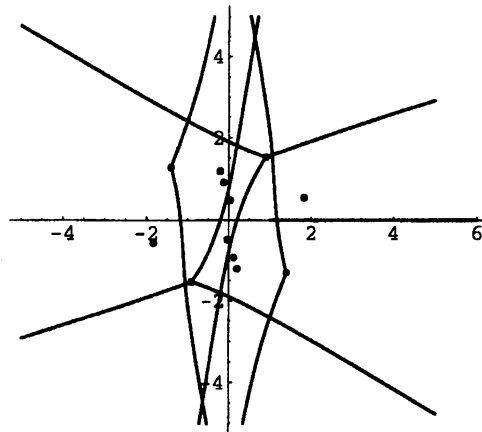


図 3: sheet 2



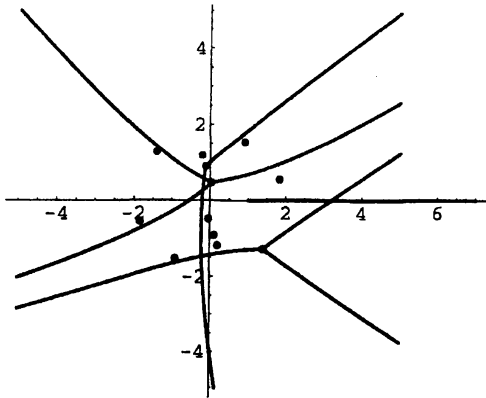


図 4: sheet 3

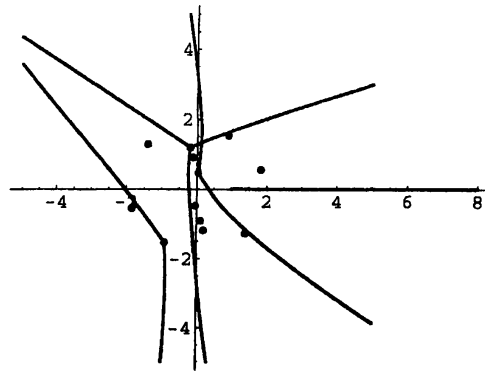


図 5: sheet 4

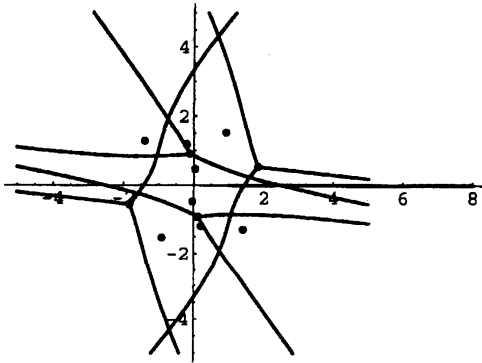


図 6: sheet 5

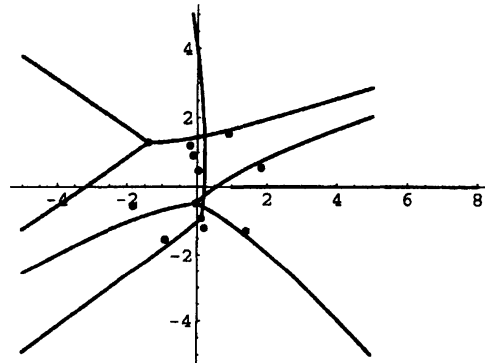


図 7: sheet 6

## 6.2 type I の turning point のまわりでの線形方程式の Stokes 曲線の変化

この小節では、変形パラメータ  $t$  が type I の turning point  $\tau_1$  のまわりをまわった時の線形方程式 (81) の Stokes 曲線の変化を追跡した図を示す。まずは sheet 6 (図 7), sheet 2 (図 3) の  $\tau_1$  のまわりの拡大図を示しておく。今の場合, type I の turning point から出る Stokes 曲線は 2 枚の sheet にまたがって計 5 本になる。下の図において,  $\tau_1$  から出ている波線は分枝を区別するための cut である。

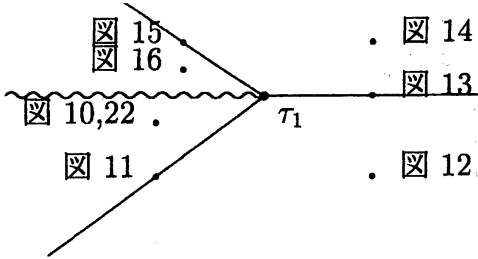


図 8:  $\tau_1$  の近傍 (sheet 6) の拡大図

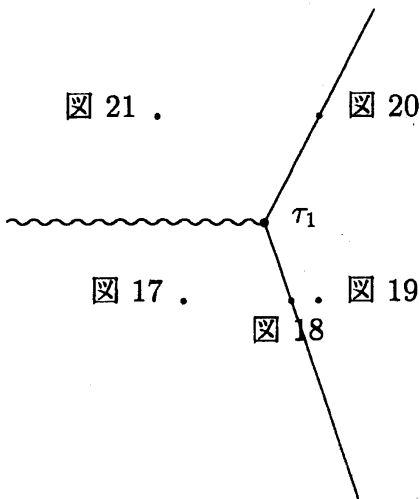


図 9:  $\tau_1$  の近傍 (sheet 2) の拡大図

次の図は  $t$  が sheet 6 の  $-1.8 + 1.2i$  から出発し,  $\tau_1$  の周りを回って, sheet 2 を経て sheet 6 の元の位置へ戻ってくるまでの線形方程式 (81) の Stokes 曲線の図である. 特に, 定理 3.2 で示されたとおり  $t$  が非線形方程式の Stokes 曲線上にのる度に, 線形方程式では simple turning point と double turning point をつなぐ Stokes 曲線が存在していることに注意する. 又, [KT1],[T] において Painlevé 方程式の解の接続公式を計算する際, Painlevé 方程式の独立変数が Painlevé 方程式の Stokes 曲線を越える度に線形方程式の Stokes 曲線の形状が不連続に変化していることが接続公式を計算するための重要な手がかりとなっていた. 下に示した図においてもこのような現象が起こっていることも注意すべき点である.

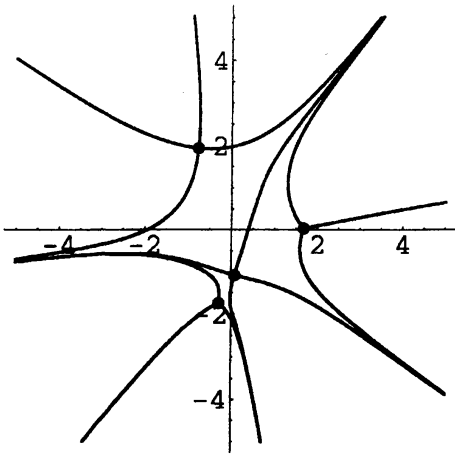


图 10:  $t = -1.8 + 1.2i$

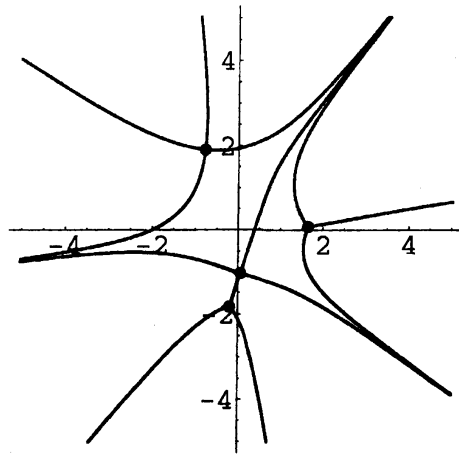


图 11:  $t = -1.8 + 1.0i$

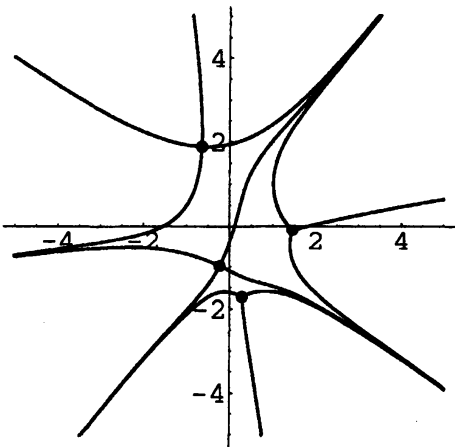


图 12:  $t = -1.0 + 1.0i$

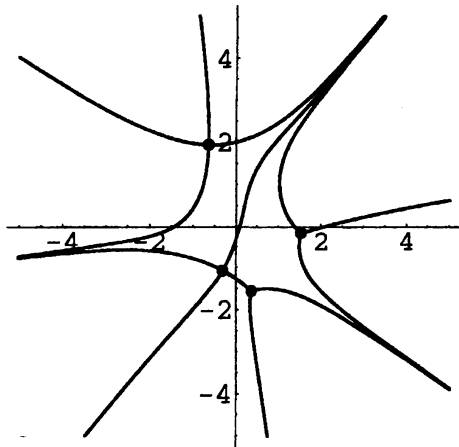


图 13:  $t = -1.0 + 1.3i$

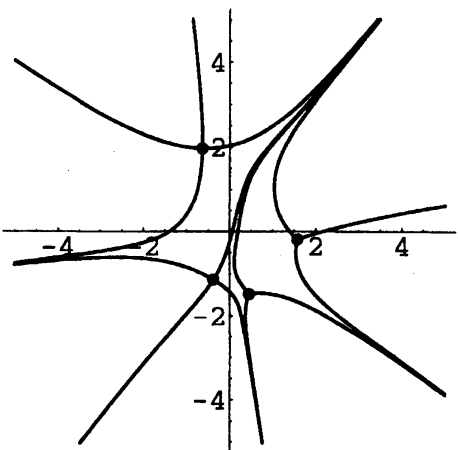


图 14:  $t = -1.0 + 1.5i$

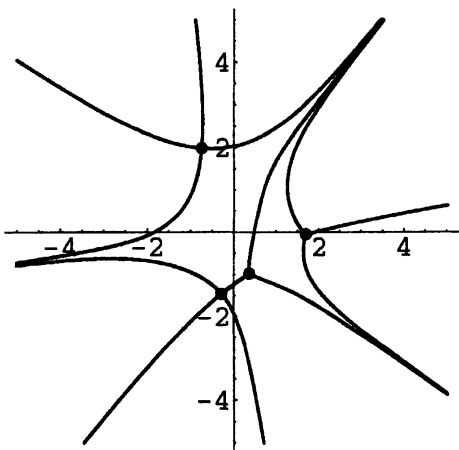


图 15:  $t = -1.7 + 1.5i$

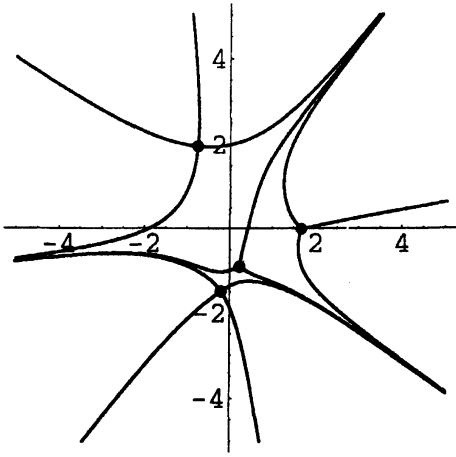


图 16:  $t = -1.7 + 1.3i$

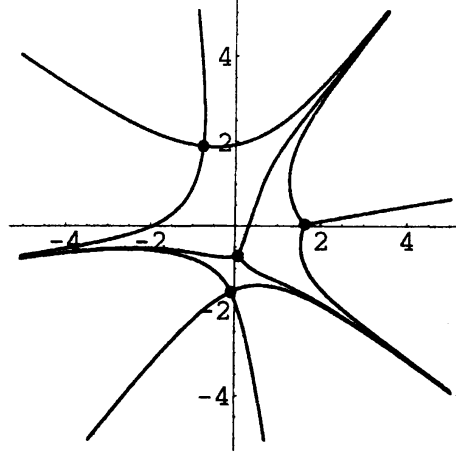


图 17:  $t = -1.7 + 1.0i$

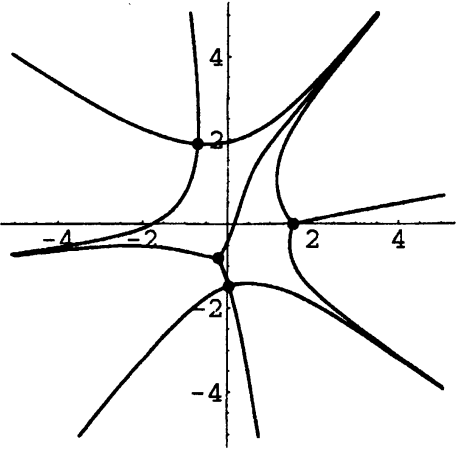


图 18:  $t = -1.34 + 1.0i$

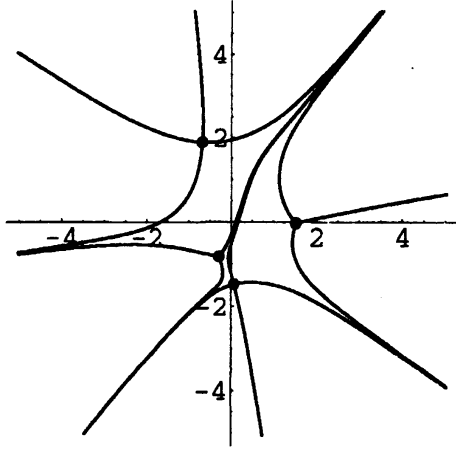


图 19:  $t = -1.25 + 1.0i$

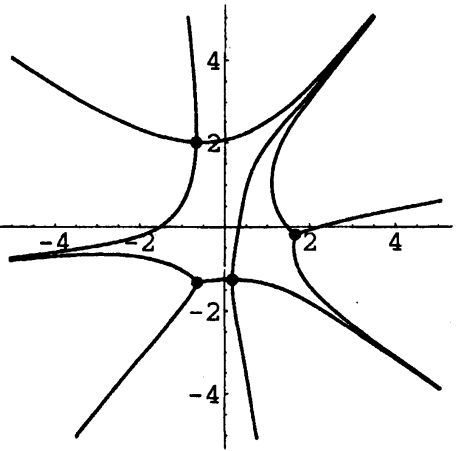


图 20:  $t = -1.25 + 1.7i$

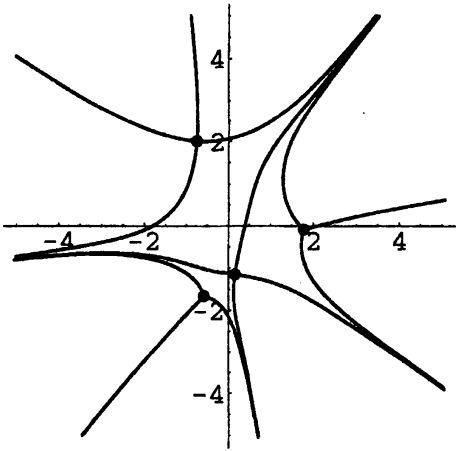


图 21:  $t = -1.8 + 1.7i$

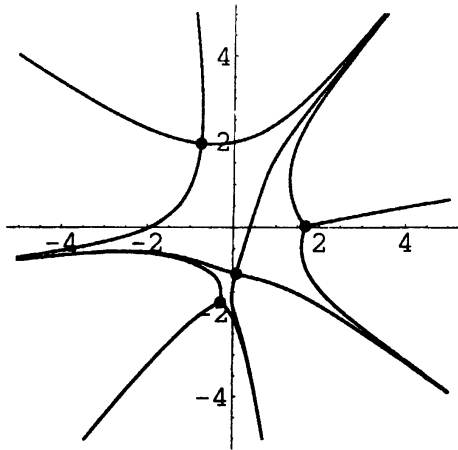


図 22:  $t = -1.8 + 1.2i$

### 6.3 type II の turning point のまわりでの線形方程式の Stokes 曲線の変化

この小節では、変形パラメータ  $t$  が type II の turning point  $\sigma_1$  のまわりをまわった時の線形方程式 (81) の Stokes 曲線の変化を追跡した図を示す. まずは sheet 5 (図 7) の  $\sigma_1$  のまわりの拡大図を示しておく. 今の場合, type II の turning point からでる Stokes 曲線は 3 本になる.

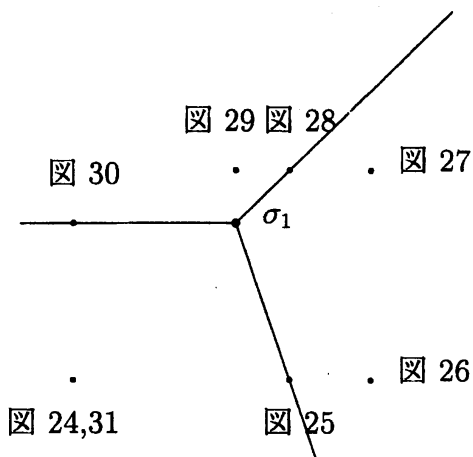


図 23:  $\sigma_1$  の近傍 (sheet 5) の拡大図

次の図は  $t$  が sheet 5 において  $-2.5 - 1.2i$  から  $\sigma_1$  のまわりをまわって、元の位置へ戻ってくるまでの線形方程式 (81) の Stokes 曲線の図である. このケースは 2 階 ( $u, v$  の 1 階の system) の微分方程式である Painlevé 方程式の場合にはなかったケースである.

(その場合, 線形方程式の double turning point は 1 個しか現れない.) 特に, 定理 3.3 で示されたとおり  $t$  が非線形方程式の Stokes 曲線上にのる度に, 線形方程式では double turning point 同士をつなぐ Stokes 曲線が存在していることに注意する.

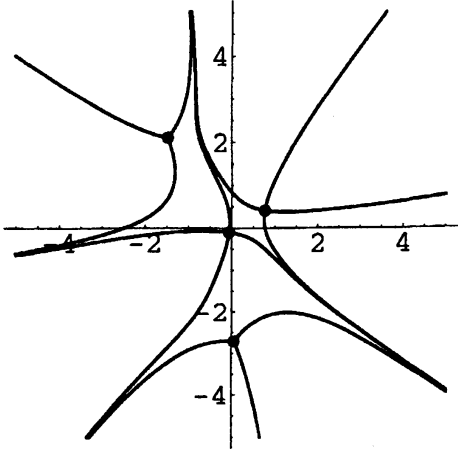


図 24:  $t = -2.5 - 1.2i$

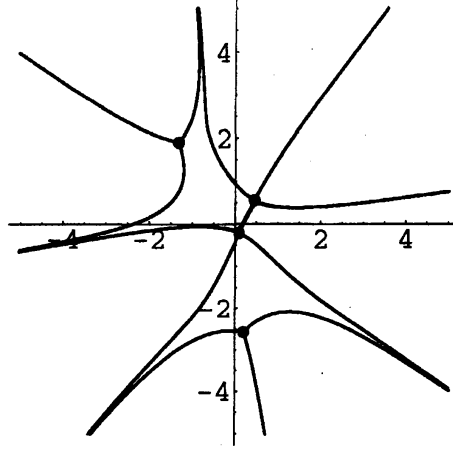


図 25:  $t = -1.6 - 1.2i$

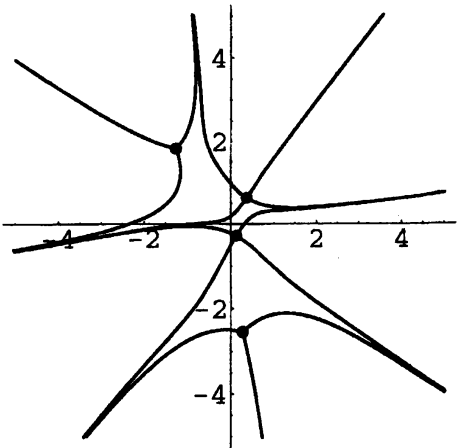


図 26:  $t = -1.3 - 1.2i$

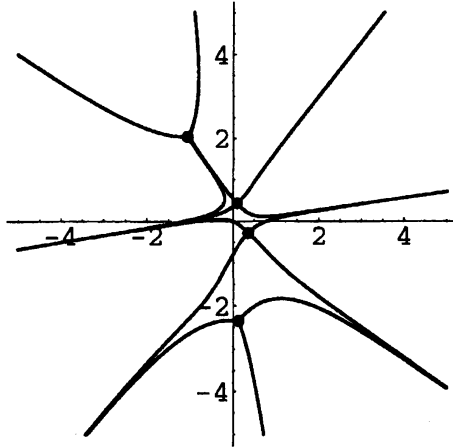
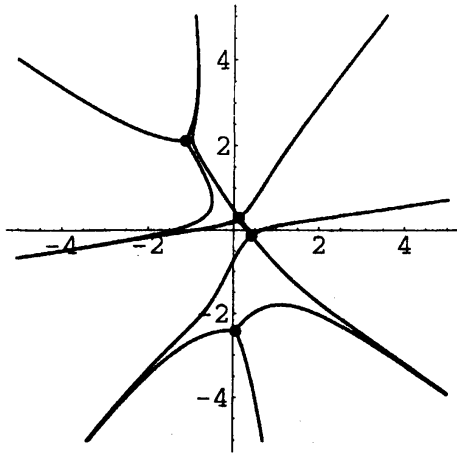
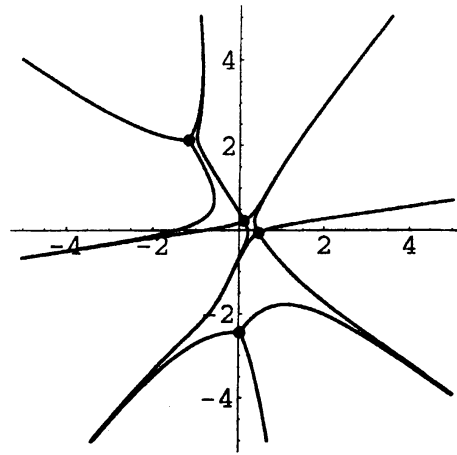
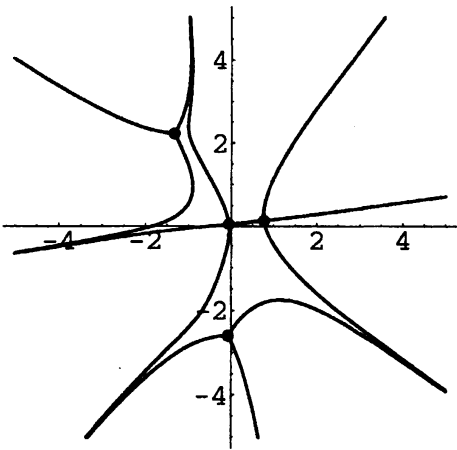
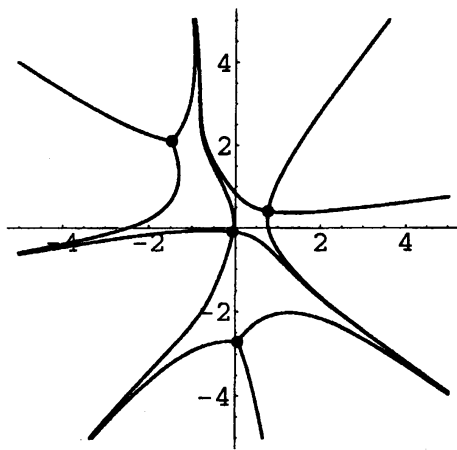


図 27:  $t = -1.3 - 0.35i$

図 28:  $t = -1.65 - 0.35i$ 図 29:  $t = -1.8 - 0.35i$ 図 30:  $t = -2.5 - 0.45i$ 図 31:  $t = -2.5 - 1.2i$ 

#### 6.4 Stokes 曲線の交点のまわりでの線形方程式の Stokes 曲線の変化

上で示した以外にも, Stokes 曲線の交点のまわりをまわったとき線形方程式 (81) の Stokes 曲線がどう変化していくかを調べたところ, 通常の Painlevé 方程式では見つからなかった幾つかの面白い現象が見つかったのでそれらをこの節の残りに示しておく. 具体的には, 非線形方程式の Stokes 曲線の交点の近傍で, 「 $t$  が非線形方程式の turning point からでる Stokes 曲線上にないにも関わらず線形方程式において 2 つの turning point を結ぶ Stokes 曲線が存在している」場合があるということが確認された. しかもこのような点を結んでいくと, その Stokes 曲線の交点から片側にのみ伸びていく半曲線となる. これは高階線形方程式における新しい Stokes 曲線 ([BNR],[AKT2],[AKT3] 参照) と関係していると考えられ, このような点での解析は今後の大きな課題と思われる. 又, 以下の計算は, 非線形方程式の Stokes 曲線は  $t$ -平面でなく  $R = \{F_0(t, u, v) = G_0(t, u, v) = 0\}$

によって定められる多様体の上で考えられるべきものであることも示唆している。実際、私の見つけたこの現象は Stokes 曲線が  $R$  の上で交わっており、青木先生の調べられた  $n = 1$  の場合には、 $t$ -平面では交わっても  $R$  では交わっていなかった。

まず、Stokes 曲線の交点の位置を調べる。6 枚の sheet において Stokes 曲線が cut を越えてどう伸びて行くのかを正確に追跡していくと、上で示した図の範囲において Stokes 曲線は 16 箇所で交わる。このうち type I の turning point から出た Stokes 曲線と type II の turning point から出た Stokes 曲線の交点が 10 個で、存在する場所は

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_1: & \text{ sheet 1 の } -0.11903 - 1.33783i & \tilde{\tau}_2: & \text{ sheet 3 の } -0.244924 + 0.220191i \\ \tilde{\tau}_3: & \text{ sheet 3 の } -0.128936 - 1.45985i & \tilde{\tau}_4: & \text{ sheet 4 の } 0.11903 + 1.35583i \\ \tilde{\tau}_5: & \text{ sheet 5 の } -1.60141 - 0.234294i & \tilde{\tau}_6: & \text{ sheet 5 の } -1.09168 + 0.840713i \\ \tilde{\tau}_7: & \text{ sheet 5 の } 1.091676 - 0.840713i & \tilde{\tau}_8: & \text{ sheet 5 の } 1.60141 + 0.234294i \\ \tilde{\tau}_9: & \text{ sheet 6 の } 0.128936 + 1.45985i & \tilde{\tau}_{10}: & \text{ sheet 6 の } 0.244924 - 0.220192i \end{aligned}$$

type I の turning point から出た Stokes 曲線同士の交点が 6 個で、存在する場所は

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1: & \text{ sheet 2 の } -1.06597 - 1.60153i & \tilde{\sigma}_2: & \text{ sheet 2 の } -0.198185 - 1.81578i \\ \tilde{\sigma}_3: & \text{ sheet 2 の } 0.198185 + 1.81578i & \tilde{\sigma}_4: & \text{ sheet 2 の } 1.06597 + 1.60153i \\ \tilde{\sigma}_5: & \text{ sheet 3 の } -0.165496 + 0.563999i & \tilde{\sigma}_6: & \text{ sheet 6 の } 0.167886 - 0.573006i \end{aligned}$$

である。以下では、この交点のまわりをまわったときの線形方程式 (81) の Stokes 曲線の変化を調べたもののうち代表的なものを図示する。

#### 6.4.1 type I の turning point から出た Stokes 曲線と type II の turning point から出た Stokes 曲線の交点のまわりで上述の現象が確認される場合

まず、sheet 1 の type I の turning point  $\tau_5$  から出た Stokes 曲線と sheet 1 の type II の turning point  $\sigma_3$  から出た Stokes 曲線が sheet 1 の  $\tilde{\tau}_1$  で交わるが、この点での線形方程式 (81) の Stokes 曲線は



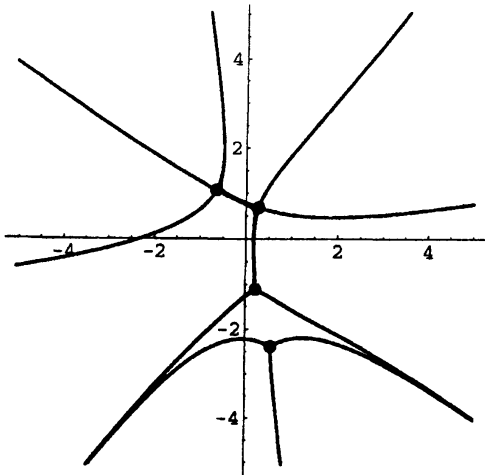


図 32:  $t = \bar{\tau}_1$  での線形方程式 (81) の Stokes 曲線

となる. さらに, この交点  $t = \bar{\tau}_1$  のまわりをまわった時の線形方程式 (81) の Stokes 曲線の変化を調べてみる. まずは sheet 1 (図 2) の  $\bar{\tau}_1$  のまわりの拡大図を示しておく.

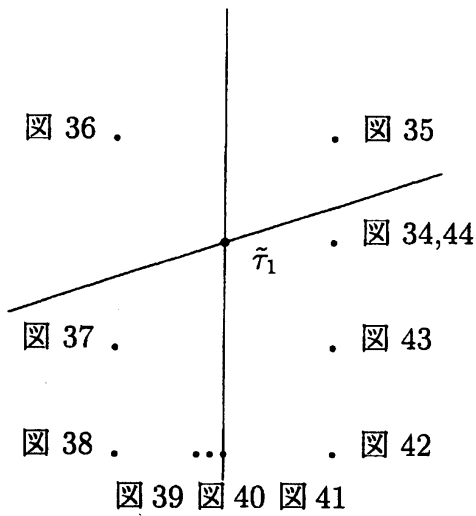


図 33:  $\bar{\tau}_1$  の近傍 (sheet 1) の拡大図

そして sheet 1 の  $\bar{\tau}_1$  のまわりをまわった時の線形方程式 (81) の Stokes 曲線は以下のよ

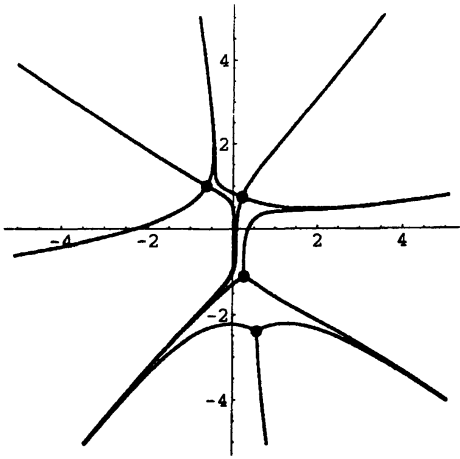


图 34:  $t = \tilde{\tau}_1 + 0.1 + 0i$

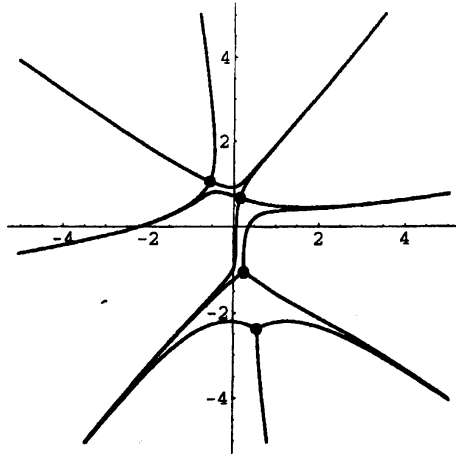


图 35:  $t = \tilde{\tau}_1 + 0.1 + 0.1i$

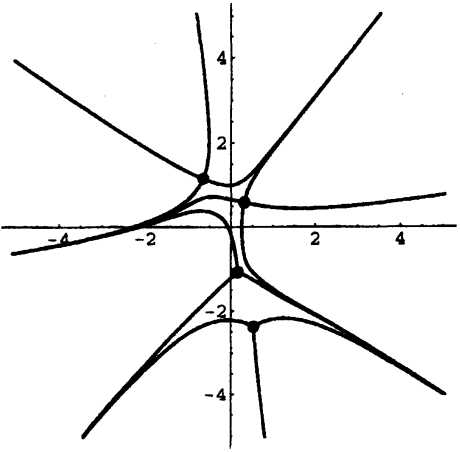


图 36:  $t = \tilde{\tau}_1 - 0.1 + 0.1i$

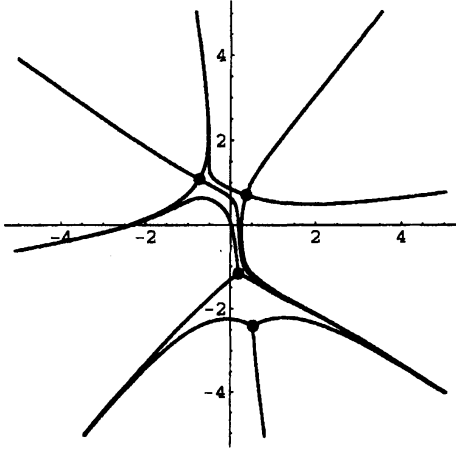


图 37:  $t = \tilde{\tau}_1 - 0.1 - 0.1i$

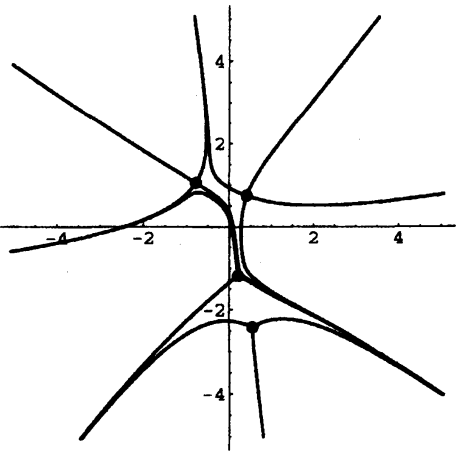


图 38:  $t = \tilde{\tau}_1 - 0.1 - 0.2i$

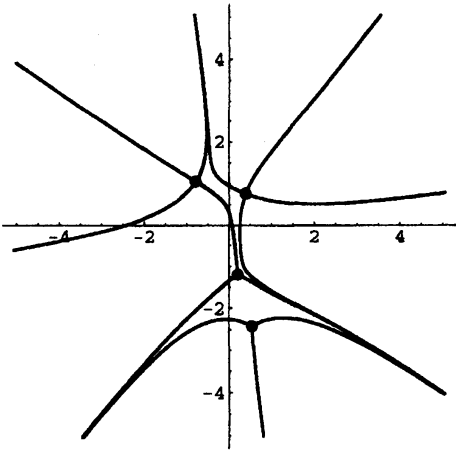


图 39:  $t = \tilde{\tau}_1 - 0.08 - 0.2i$

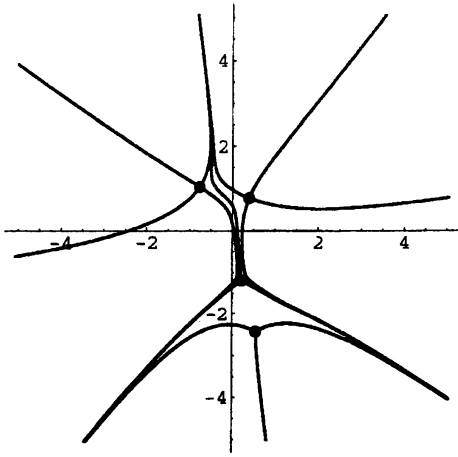


图 40:  $t = \tilde{\tau}_1 - 0.05 - 0.2i$

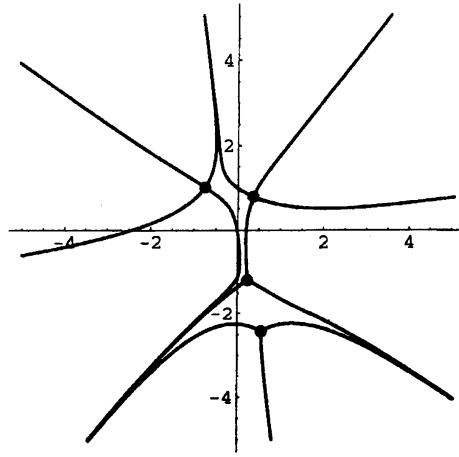


图 41:  $t = \tilde{\tau}_1 + 0 - 0.2i$

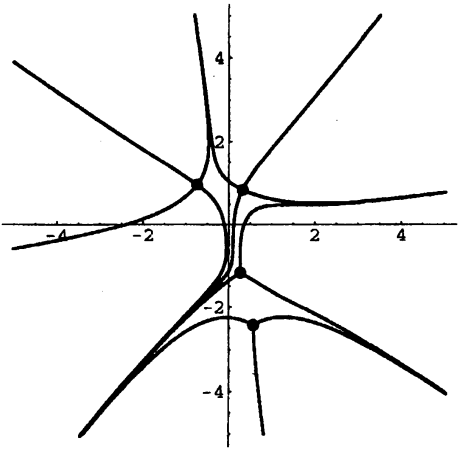


图 42:  $t = \tilde{\tau}_1 + 0.1 - 0.2i$

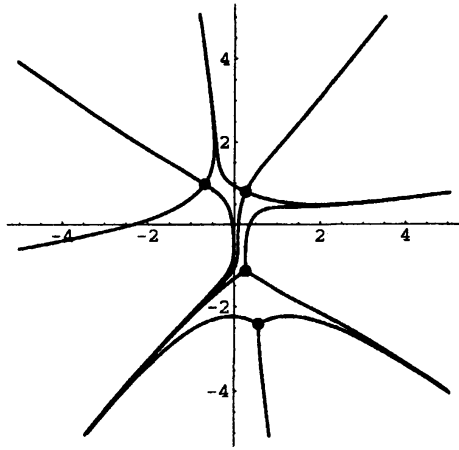


图 43:  $t = \tilde{\tau}_1 + 0.1 - 0.1i$

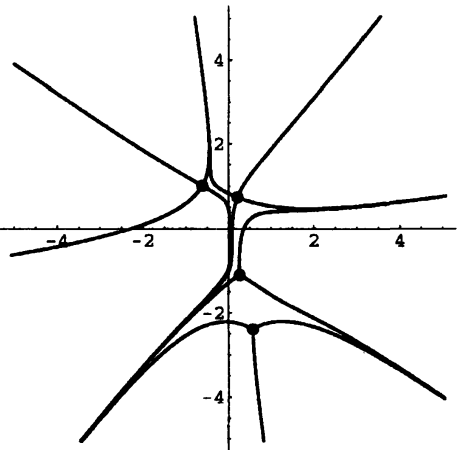


图 44:  $t = \tilde{\tau}_1 + 0.1 + 0i$

この図を順次見ていくと、定理 3.2, 定理 3.3 に従って  $t$  が非線形方程式の Stokes 曲線上にある時に、線形方程式では turning point 同士を結ぶ Stokes 曲線の存在を見てとれるが、6 枚目の図 39 ( $t = \tilde{\tau}_1 - 0.08 - 0.2i$ ) では  $t$  が非線形方程式の Stokes 曲線上にないにも関わらず、線形方程式において simple turning point と double turning point を結ぶ Stokes 曲線が存在している。このように type I の turning point から出てくる Stokes 曲線と type II の turning point から出てくる Stokes 曲線の交点では、その近傍において「 $t$  が非線形方程式の Stokes 曲線上にないにも関わらず、線形方程式では simple turning point と double turning point を結ぶ Stokes 曲線が存在する」といった現象が観察される。同様な現象は

$$\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{\tau}_3, \tilde{\tau}_4, \tilde{\tau}_6, \tilde{\tau}_7, \tilde{\tau}_9, \tilde{\tau}_{10}$$

においても観察される。

#### 6.4.2 type I の turning point から出た Stokes 曲線同士の交点のまわりで上述の現象が確認される場合

次に、sheet 2 の type I の turning point  $\tau_7$  から出た Stokes 曲線と sheet 2 の type I の turning point  $\tau_8$  から出た Stokes 曲線が sheet 2 の  $\tilde{\sigma}_4$  で交わるが、この点での線形方程式 (81) の Stokes 曲線は

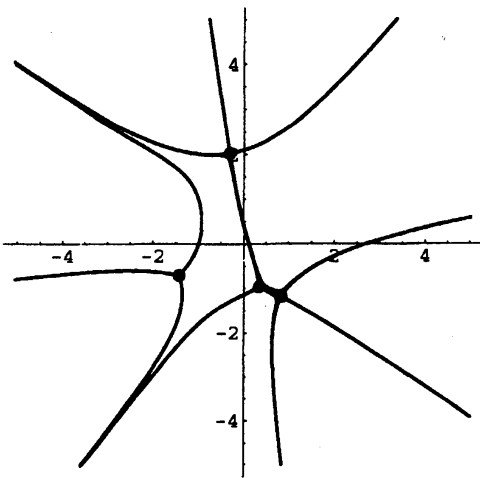


図 45:  $t = \tilde{\sigma}_4$  での線形方程式 (81) の Stokes 曲線

となる。さらに、この交点  $t = \tilde{\sigma}_4$  のまわりをまわった時の線形方程式 (81) の Stokes 曲線の変化を調べてみる。まずは sheet 2 (図 3) の  $\tilde{\sigma}_4$  のまわりの拡大図を示しておく。

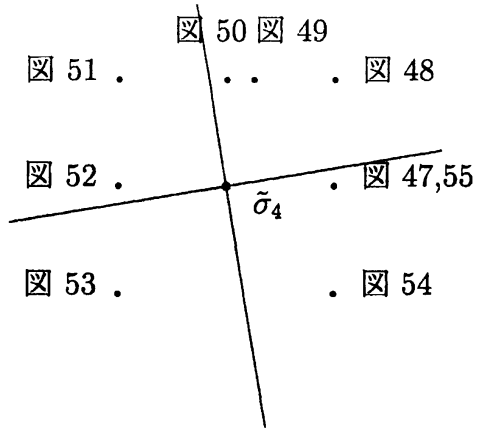


図 46:  $\tilde{\sigma}_4$  の近傍 (sheet 2) の拡大図

そして sheet 2 の  $\tilde{\sigma}_4$  のまわりをまわった時の線形方程式 (81) の Stokes 曲線は以下のようになる。

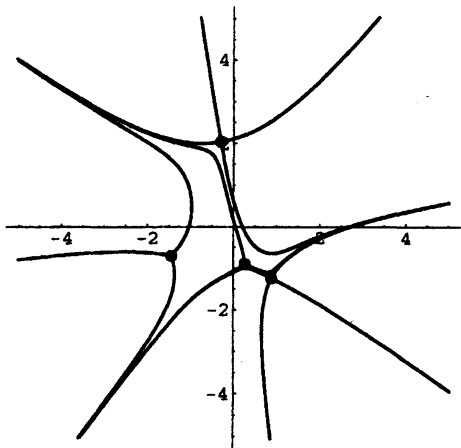


図 47:  $t = \tilde{\sigma}_4 + 0.1 + 0i$

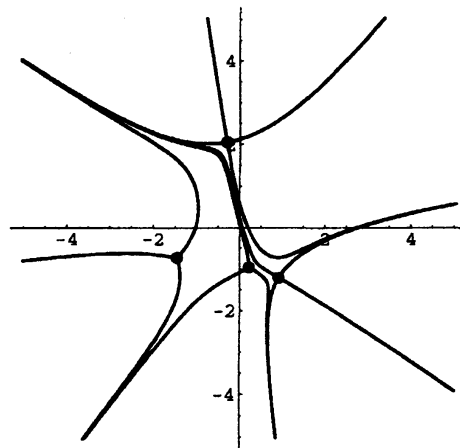


図 48:  $t = \tilde{\sigma}_4 + 0.1 + 0.1i$

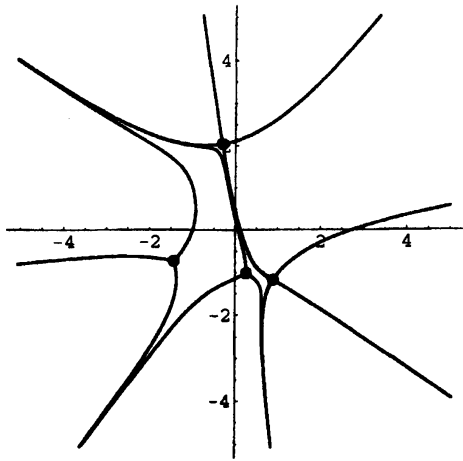


图 49:  $t = \tilde{\sigma}_4 + 0.02 + 0.1i$

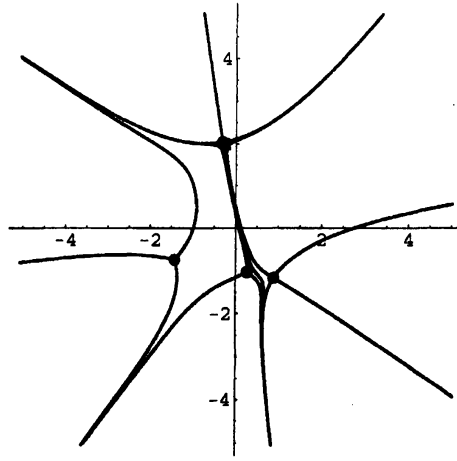


图 50:  $t = \tilde{\sigma}_4 + 0 + 0.1i$

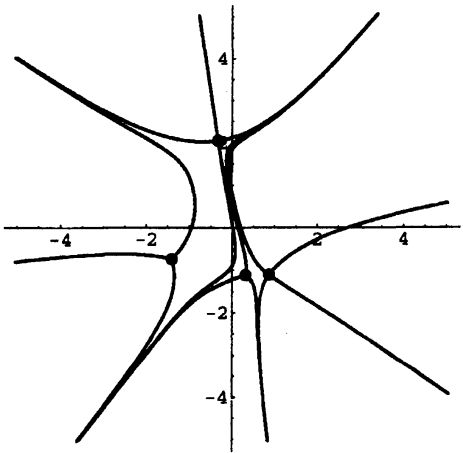


图 51:  $t = \tilde{\sigma}_4 - 0.1 + 0.1i$

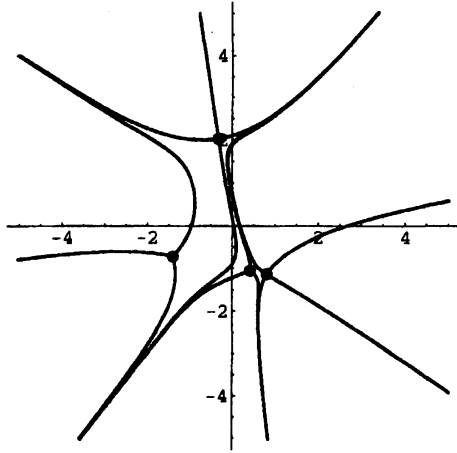


图 52:  $t = \tilde{\sigma}_4 - 0.1 + 0i$

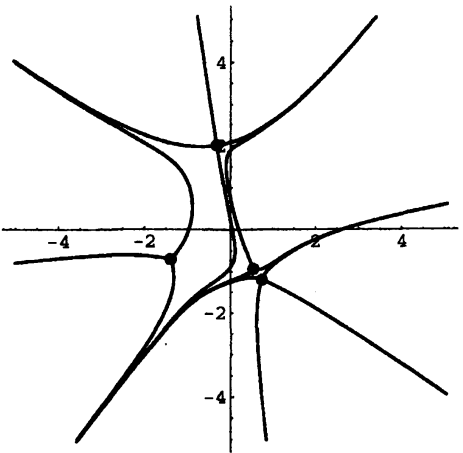


图 53:  $t = \tilde{\sigma}_4 - 0.1 - 0.1i$

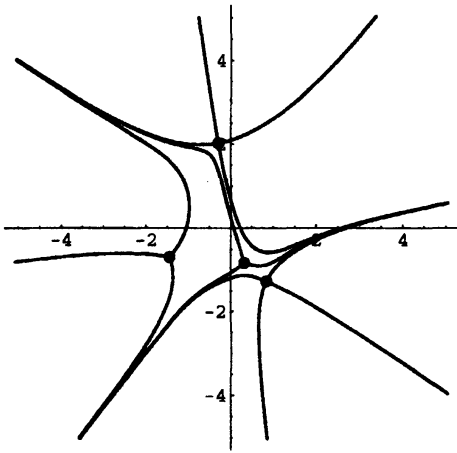


图 54:  $t = \tilde{\sigma}_4 + 0.1 - 0.1i$

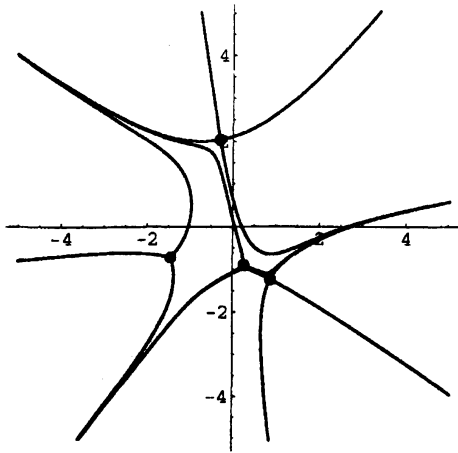


図 55:  $t = \tilde{\sigma}_4 + 0.1 + 0i$

この図を順次見ていくと、定理 3.2 に従って  $t$  が非線形方程式の Stokes 曲線上にある時、線形方程式において turning point 同士を結ぶ Stokes 曲線の存在を見てとれるが、3 枚目の図 49 ( $t = \tilde{\sigma}_4 + 0.02 + 0.1i$ ) では  $t$  が非線形方程式の Stokes 曲線上にないにも関わらず、線形方程式において double turning point 同士を結ぶ Stokes 曲線が存在している。このように type I の turning point から出てくる Stokes 曲線同士の交点では、その近傍において「 $t$  が Stokes 曲線上にないにも関わらず、線形方程式では double turning point 同士を結ぶ Stokes 曲線が存在する」といった現象が観察される。同様な現象は

$$\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_4, \tilde{\sigma}_5, \tilde{\sigma}_6$$

においても観察される。

しかし、今まで見てきたような現象は全ての交点のまわりで現れるわけではなく、以下で示す 2 つの例では定理 3.2, 定理 3.3 に従った線形方程式の Stokes 曲線の退化しか観察されない。

#### 6.4.3 type I の turning point から出た Stokes 曲線と type II の turning point から出た Stokes 曲線の交点のまわりで上述の現象が確認されない場合

まず、sheet 5 の type I の turning point  $\tau_6$  から出た Stokes 曲線と sheet 5 の type II の turning point  $\sigma_1$  から出た Stokes 曲線が sheet 5 の  $\tilde{\tau}_5$  で交わるが、この点での線形方程式 (81) の Stokes 曲線は

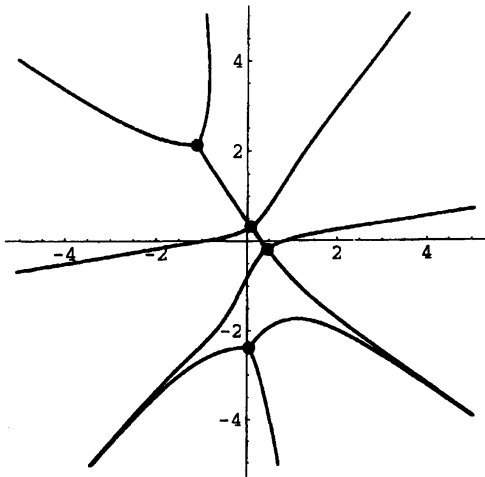


図 56:  $t = \tilde{\tau}_5$  での線形方程式 (81) の Stokes 曲線

となる. さらに, この交点  $t = \tilde{\tau}_5$  のまわりをまわった時の線形方程式 (81) の Stokes 曲線の変化を調べてみる. まずは sheet 5 (図 6) の  $\tilde{\tau}_5$  のまわりの拡大図を示しておく.

図 62 図 61 . 図 60

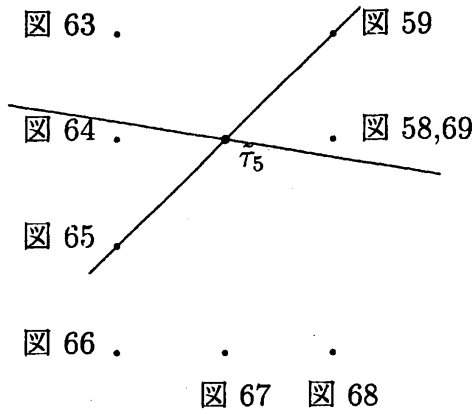


図 57:  $\tilde{\tau}_5$  の近傍 (sheet 5) の拡大図

そして sheet 5 の  $\tilde{\tau}_5$  のまわりをまわった時の線形方程式 (81) の Stokes 曲線は以下のよ



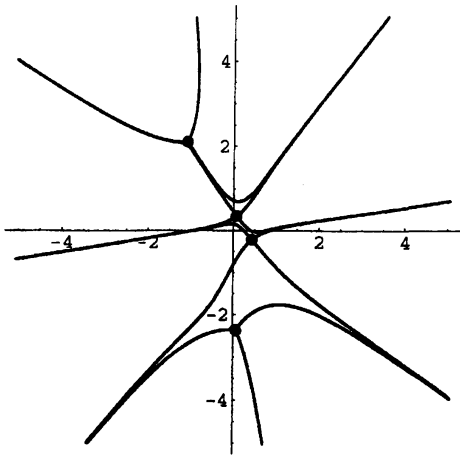


图 58:  $t = \tilde{\tau}_5 + 0.1 + 0i$

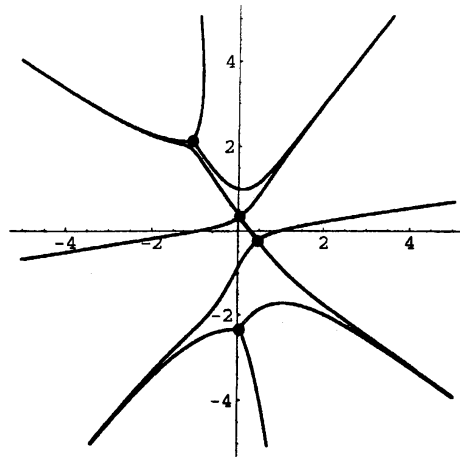


图 59:  $t = \tilde{\tau}_5 + 0.1 + 0.1i$

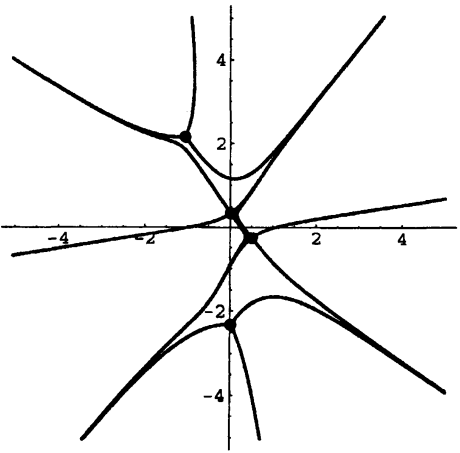


图 60:  $t = \tilde{\tau}_5 + 0.1 + 0.2i$

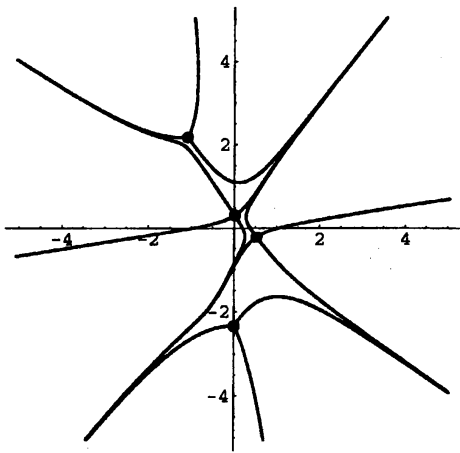


图 61:  $t = \tilde{\tau}_5 + 0 + 0.2i$

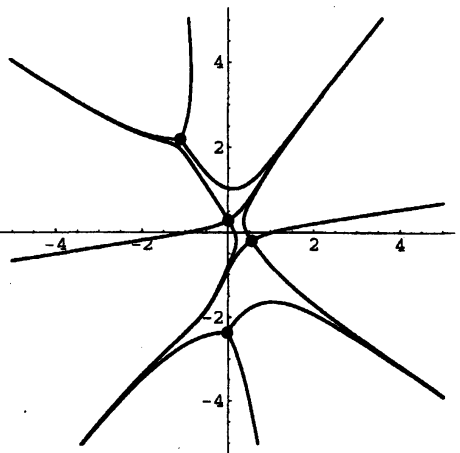


图 62:  $t = \tilde{\tau}_5 - 0.1 + 0.2i$

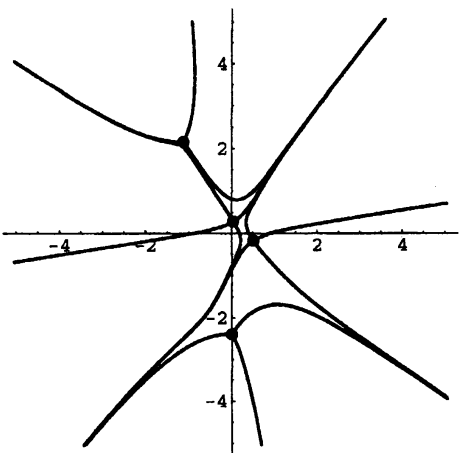


图 63:  $t = \tilde{\tau}_5 - 0.1 + 0.1i$

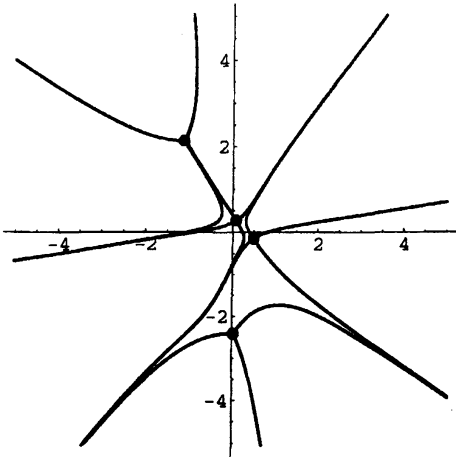


图 64:  $t = \tilde{\tau}_5 - 0.1 + 0i$

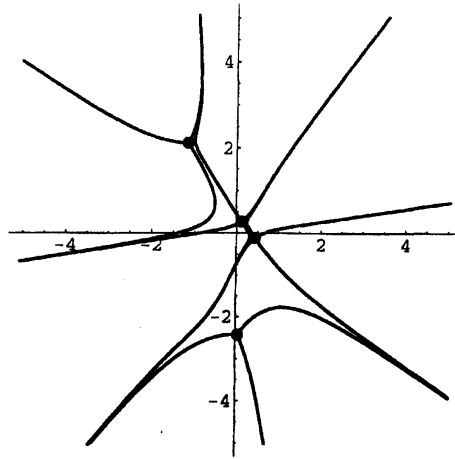


图 65:  $t = \tilde{\tau}_5 - 0.1 - 0.1i$

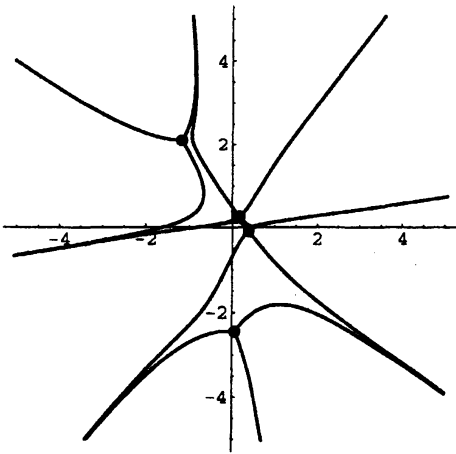


图 66:  $t = \tilde{\tau}_5 - 0.1 - 0.2i$

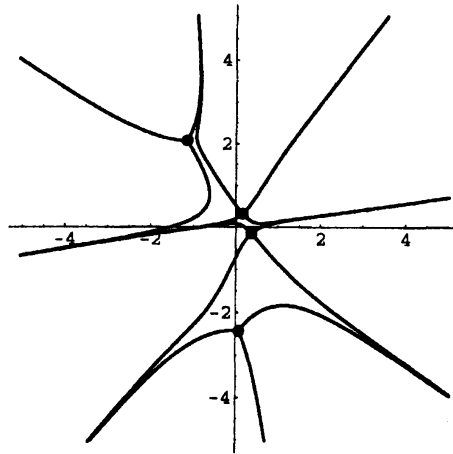


图 67:  $t = \tilde{\tau}_5 + 0 - 0.2i$

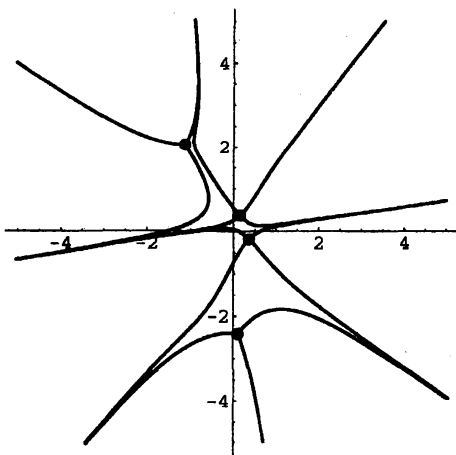


图 68:  $t = \tilde{\tau}_5 + 0.1 - 0.2i$

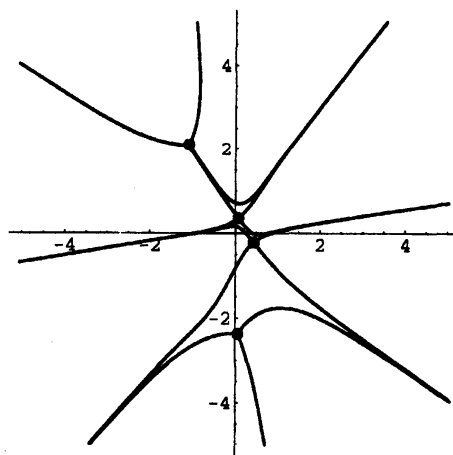


图 69:  $t = \tilde{\tau}_5 + 0.1 + 0i$

このように type I の turning point から出てくる Stokes 曲線と type II の turning point から出てくる Stokes 曲線の交点で, その近傍において, 定理 3.2, 定理 3.3 に従った現象以外は見られないという点として,

$$\tilde{\tau}_5, \tilde{\tau}_8$$

がある.

#### 6.4.4 type I の turning point から出た Stokes 曲線同士の交点のまわりで上述の現象が確認されない場合

次に, sheet 2 の type I の turning point  $\tau_7$  から出た Stokes 曲線と sheet 6 の type I の turning point  $\tau_6$  から出た Stokes 曲線が sheet 2 の  $\tilde{\sigma}_3$  で交わるが, この点での線形方程式 (81) の Stokes 曲線は

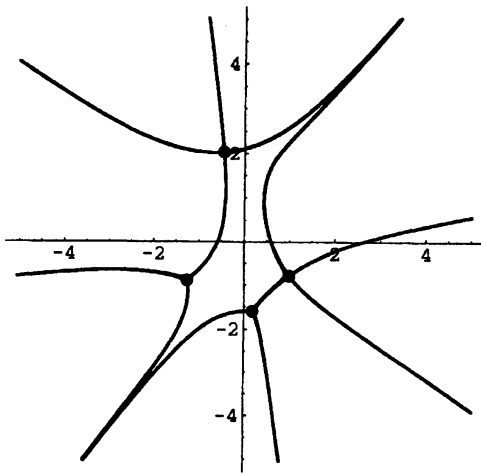


図 70:  $t = \tilde{\sigma}_3$  での線形方程式 (81) の Stokes 曲線

となる. さらに, この交点  $t = \tilde{\sigma}_3$  のまわりをまわった時の線形方程式 (81) の Stokes 曲線の変化を調べてみる. まずは sheet 2 (図 3) の  $\tilde{\sigma}_3$  のまわりの拡大図を示しておく.

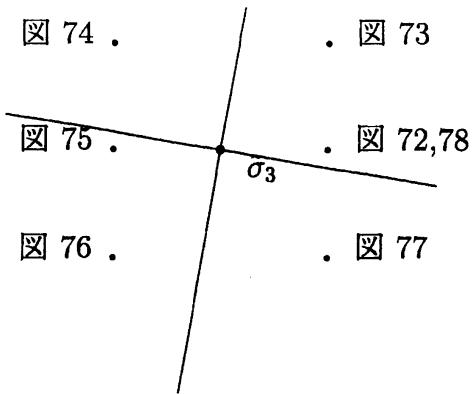


図 71:  $\tilde{\sigma}_3$  の近傍 (sheet 2) の拡大図

そして sheet 2 の  $\tilde{\sigma}_3$  のまわりをまわった時の線形方程式 (81) の Stokes 曲線は以下のようになる。

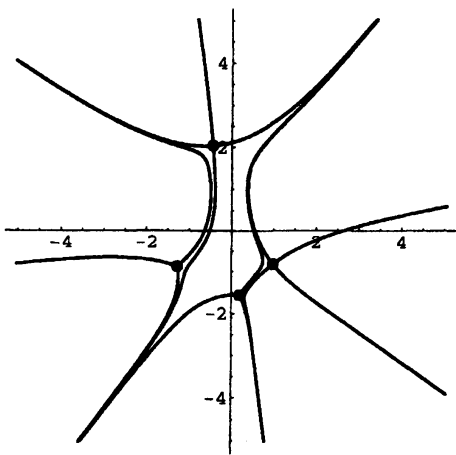


図 72:  $t = \tilde{\sigma}_3 + 0.1 + 0i$

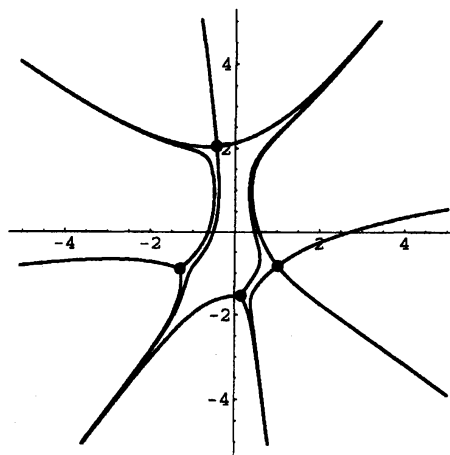


図 73:  $t = \tilde{\sigma}_3 + 0.1 + 0.1i$

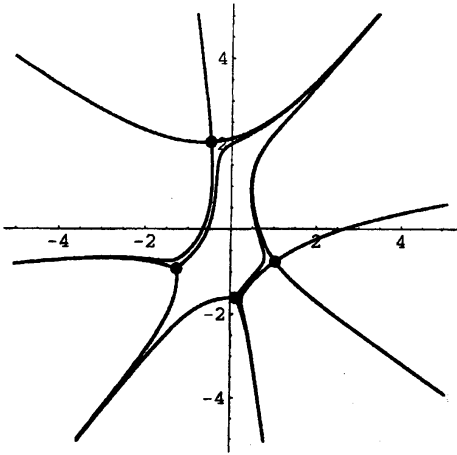


图 74:  $t = \tilde{\sigma}_3 - 0.1 + 0.1i$

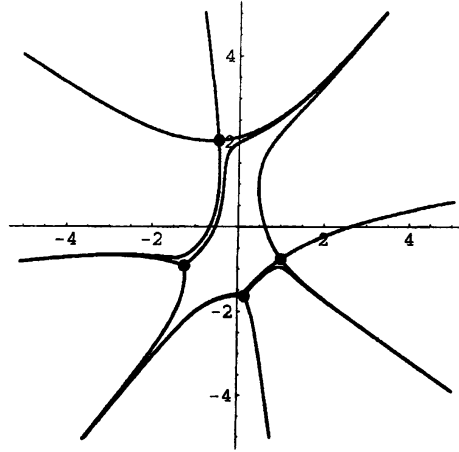


图 75:  $t = \tilde{\sigma}_3 - 0.1 + 0i$

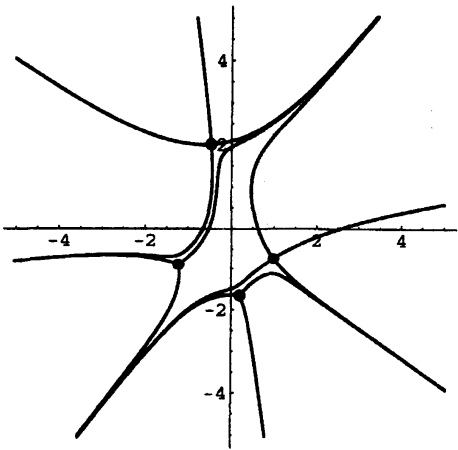


图 76:  $t = \tilde{\sigma}_3 - 0.1 - 0.1i$

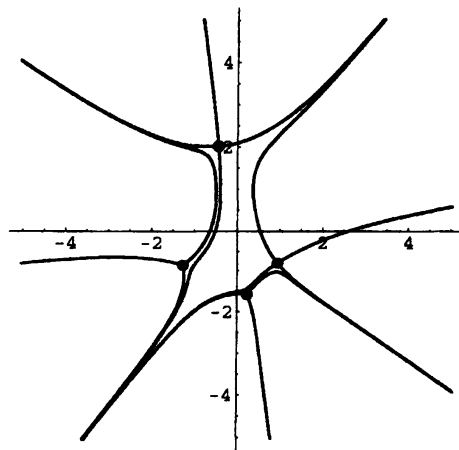


图 77:  $t = \tilde{\sigma}_3 + 0.1 - 0.1i$

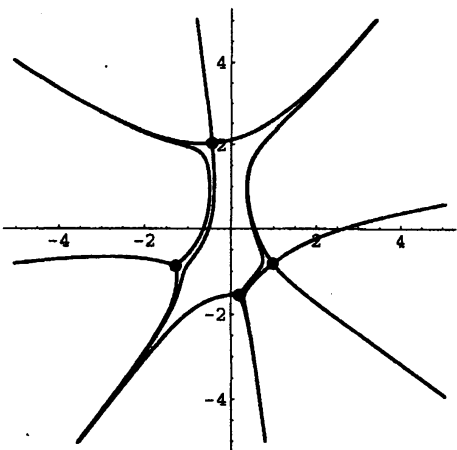


图 78:  $t = \tilde{\sigma}_3 + 0.1 + 0i$

このように type I の turning point から出てくる Stokes 曲線同士の交点で、その近傍において定理 3.2 に従った現象以外は見られないという点として

$$\tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$$

がある。

#### 6.4.5 新しい曲線

以上で見たように、Stokes 曲線の交点の近傍において  $t$  が非線形方程式の Stokes 曲線以外の場所にあるときでも線形方程式の turning point 同士を結ぶ曲線が存在することがある。次の図は図 2 から図 7 にこれらの点を集めて結んだ曲線を書き込んだものである。ここで、この新しい曲線を濃く書き込んだ。

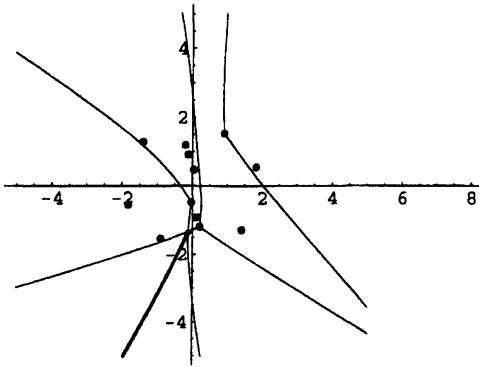


図 79: sheet 1

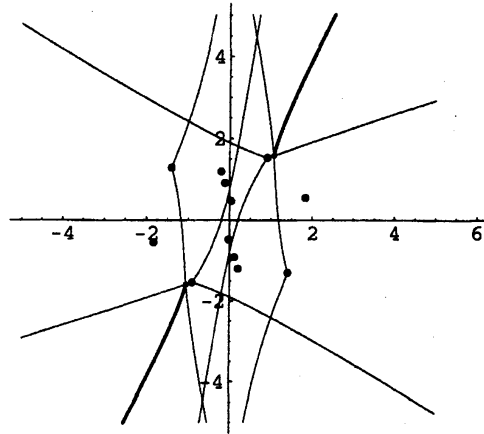


図 80: sheet 2

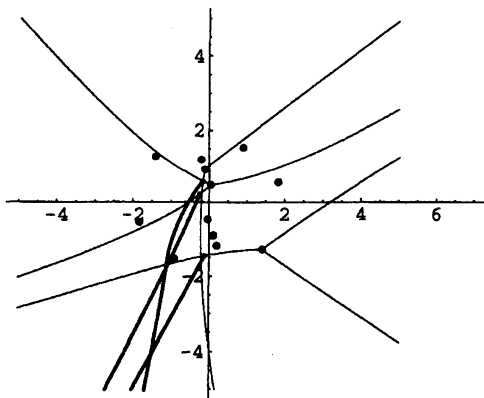


図 81: sheet 3

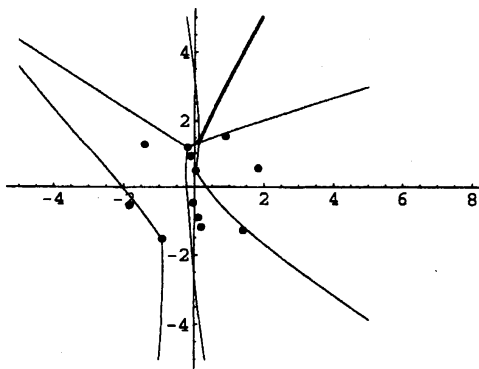


図 82: sheet 4

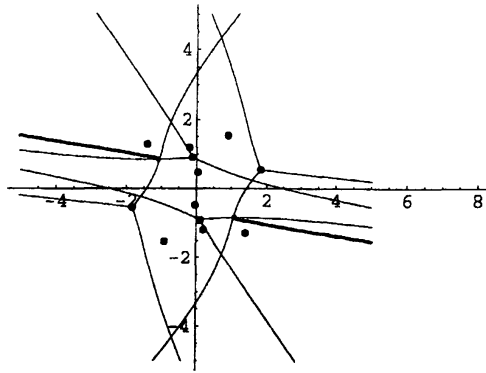


図 83: sheet 5

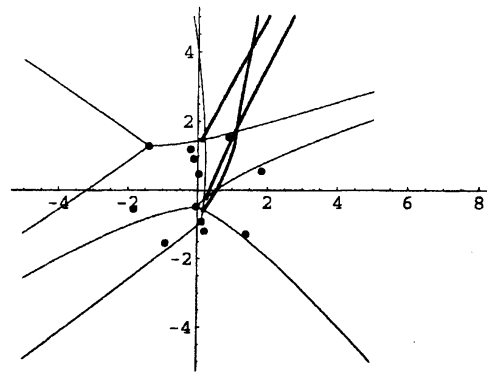


図 84: sheet 6

この図より, この新しい曲線のすべてが交点から片側だけに伸びており, 交点から見て turning point とは逆側にある 2 本の Stokes 曲線に挟まれた領域に存在していることに注意する.

#### 6.4.6 新しい曲線と Stokes 曲線の交点のまわりでの線形方程式の Stokes 曲線の変化

最後に, この新しい曲線と Stokes 曲線に交点が存在すればその点の近傍においても上述の現象が確認されるのかどうか気になるが, これについても調べたので以下で示しておく.

先ほどの 6 枚の図において書き込まれた新しい曲線を追跡して行くと, その新しい曲線と元々存在した Stokes 曲線との交点が 4 つ生じる. そのうち, type I の turning point から出た Stokes 曲線同士の交点 (先ほど  $\tilde{\sigma}$  で表していたもの) から出る新しい曲線と type I の turning point から出た Stokes 曲線の交点が 2 個で, その場所は

$$\hat{\tau}_1: \text{sheet 1 の } 1.05867 + 1.32156i \quad \hat{\tau}_2: \text{sheet 4 の } -1.05867 - 1.32156i ,$$

type I の turning point から出た Stokes 曲線と type II の turning point から出た Stokes 曲線との交点 (先ほど  $\tilde{\tau}$  で表していたもの) から出る新しい曲線と type I の turning point から出た Stokes 曲線の交点が 2 個で, その場所は

$$\hat{\sigma}_1: \text{sheet 3 の } -1.071068 - 1.692427i \quad \hat{\sigma}_2: \text{sheet 6 の } 1.09107 + 1.69243i$$

である. 以下では, この交点のまわりをまわったときの線形方程式 (81) の Stokes 曲線の変化を調べたもののうち代表的なものを図示する.

まずは, sheet 1 にある type I の turning point  $\tau_7$  から出た Stokes 曲線と sheet 6 の交点  $\tilde{\sigma}_6$  から伸びた新しい曲線との交点が sheet 1 の  $\hat{\tau}_1$  に存在する. そこでの線形方程式 (81) の Stokes 曲線は

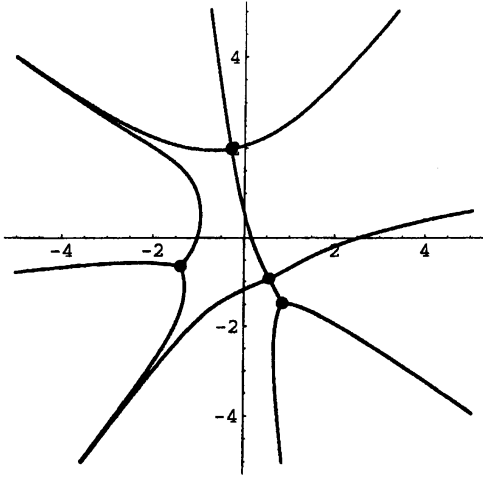


図 85:  $t = \hat{\tau}_1$  での線形方程式 (81) の Stokes 曲線

となる. さらに, この交点  $t = \hat{\tau}_1$  のまわりをまわった時の線形方程式 (81) の Stokes 曲線の変化を調べてみる. まずは sheet 1 (図 2) の  $\hat{\tau}_1$  のまわりの拡大図を示しておく.

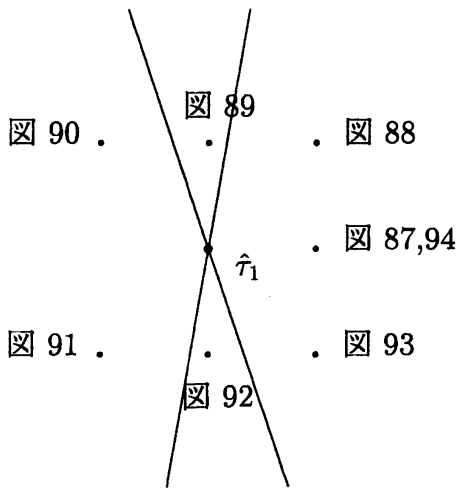


図 86:  $\hat{\tau}_1$  の近傍 (sheet 1) の拡大図

そして sheet 1 の  $\hat{\tau}_1$  のまわりをまわった時の線形方程式 (81) の Stokes 曲線は以下のよ



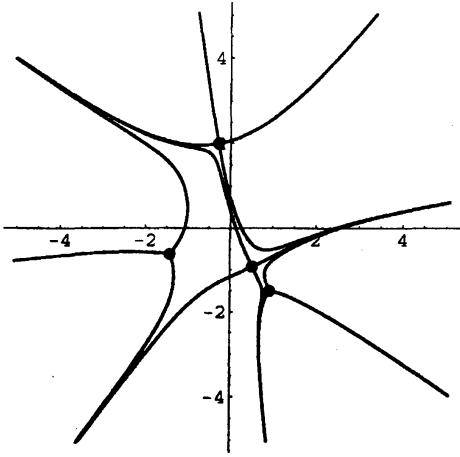


图 87:  $t = \hat{\tau}_1 + 0.1 + 0i$

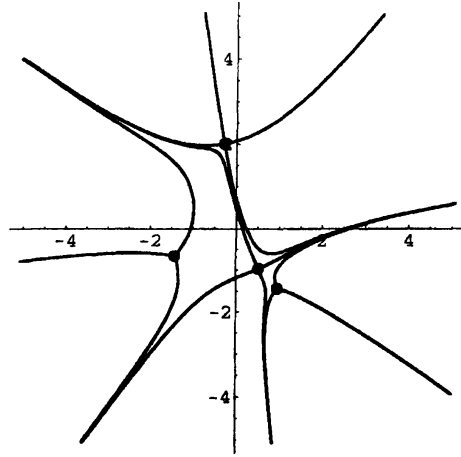


图 88:  $t = \hat{\tau}_1 + 0.1 + 0.1i$

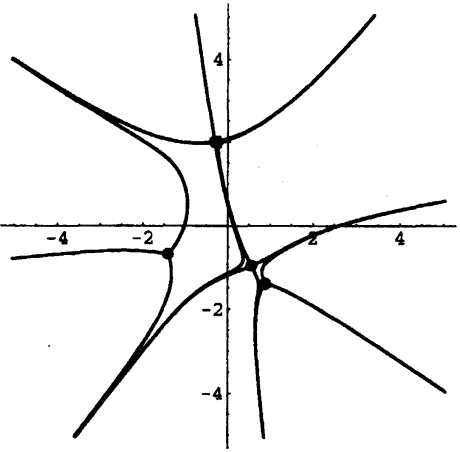


图 89:  $t = \hat{\tau}_1 + 0 + 0.1i$

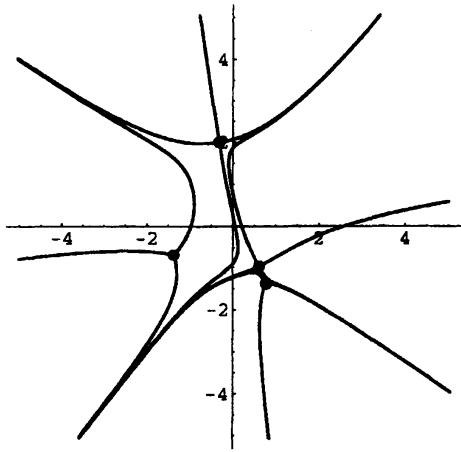


图 90:  $t = \hat{\tau}_1 - 0.1 + 0.1i$

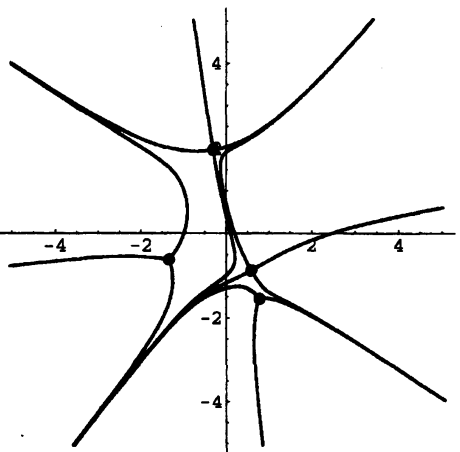


图 91:  $t = \hat{\tau}_1 - 0.1 - 0.1i$

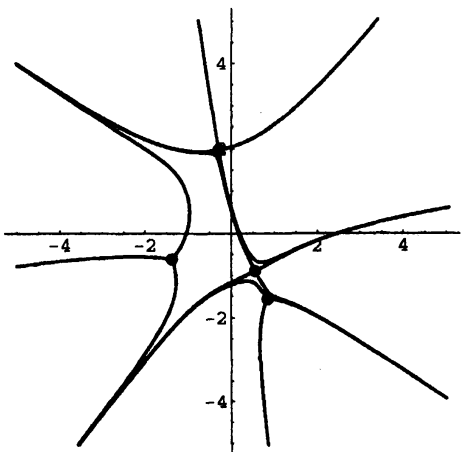


图 92:  $t = \hat{\tau}_1 + 0 - 0.1i$

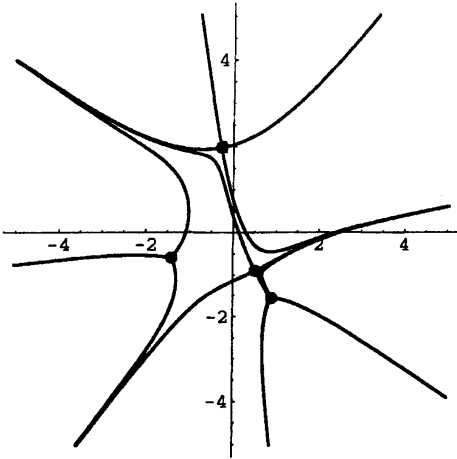


図 93:  $t = \hat{\tau}_1 + 0.1 - 0.1i$

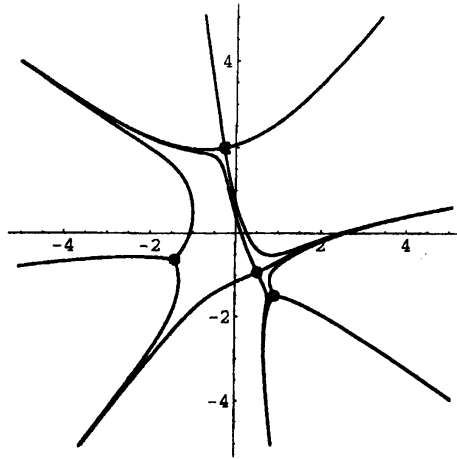


図 94:  $t = \hat{\tau}_1 + 0.1 - 0i$

この点のまわりでは、 $t$  が元々の Stokes 曲線上にある場合か新しい曲線上にある場合にしか、線形方程式の turning point を繋ぐ Stokes 曲線は存在しない。  $\hat{\tau}_2$  においても同様の現象が観察される。

次に、sheet 3 の type I の turning point  $\tau_8$  からでる Stokes 曲線と sheet 3 にある交点  $\hat{\tau}_2$  から出ている新しい曲線とが sheet 3 の  $\hat{\sigma}_1$  に交点を持っているが、そこでの線形方程式 (81) の Stokes 曲線は

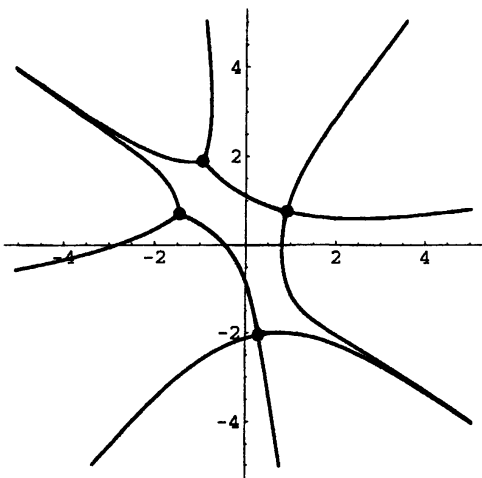


図 95:  $t = \hat{\sigma}_1$  での線形方程式 (81) の Stokes 曲線

となる。さらに、この交点  $t = \hat{\sigma}_1$  のまわりをまわった時の線形方程式 (81) の Stokes 曲線の変化を調べてみる。まずは sheet 3 (図 4) の  $\hat{\sigma}_1$  の拡大図を示しておく。

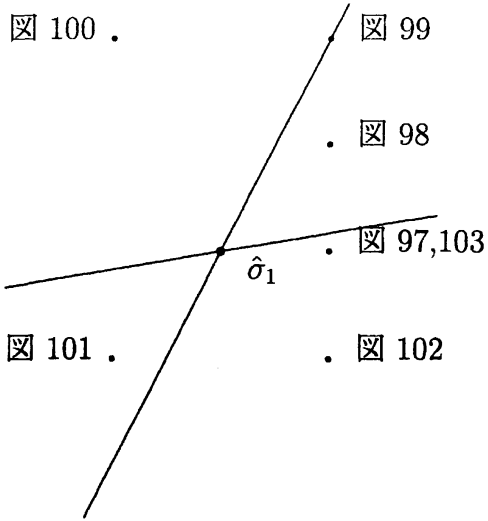


図 96:  $\hat{\sigma}_1$  の近傍 (sheet 3) の拡大図

そして sheet 3 の  $\hat{\sigma}_1$  のまわりをまわった時の線形方程式 (81) の Stokes 曲線は以下のようになる。

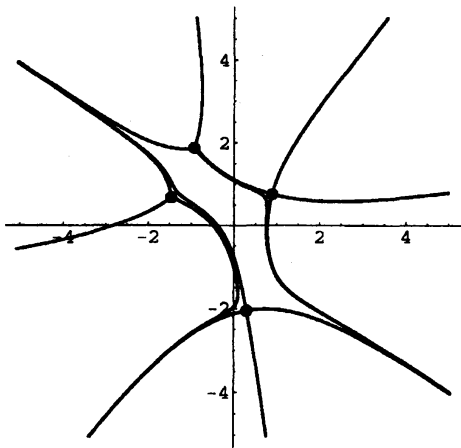


図 97:  $t = \hat{\sigma}_1 + 0.1 + 0i$

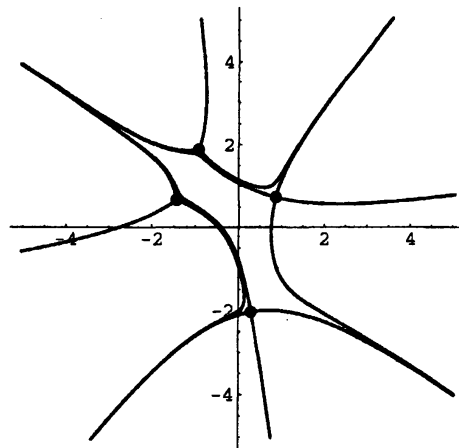
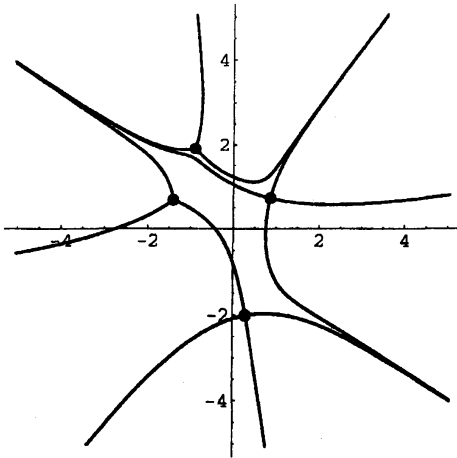
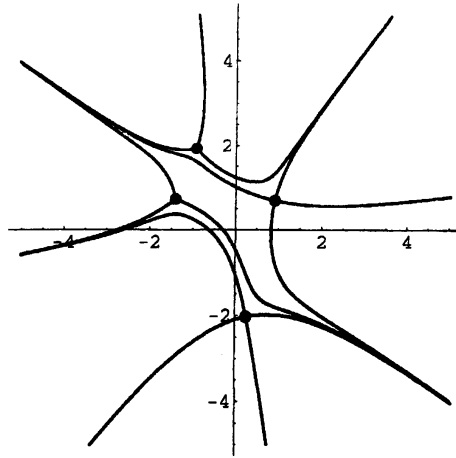


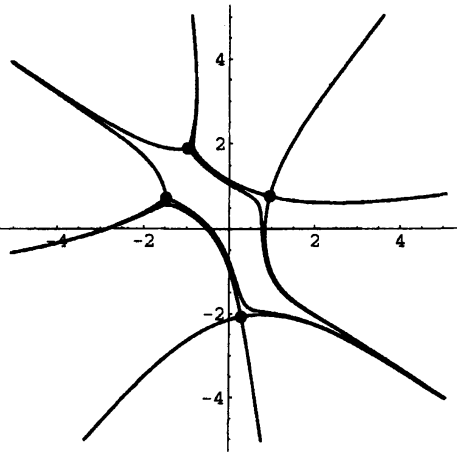
図 98:  $t = \hat{\sigma}_1 + 0.1 + 0.1i$



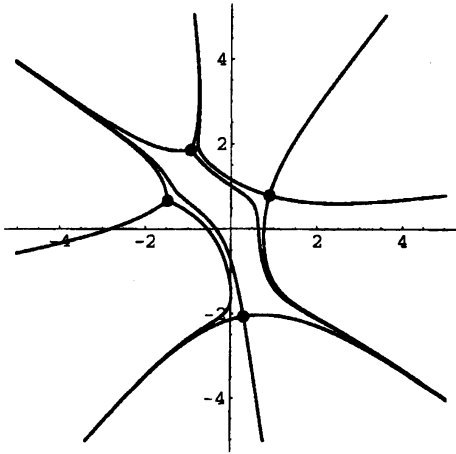
☒ 99:  $t = \hat{\sigma}_1 + 0.1 + 0.2i$



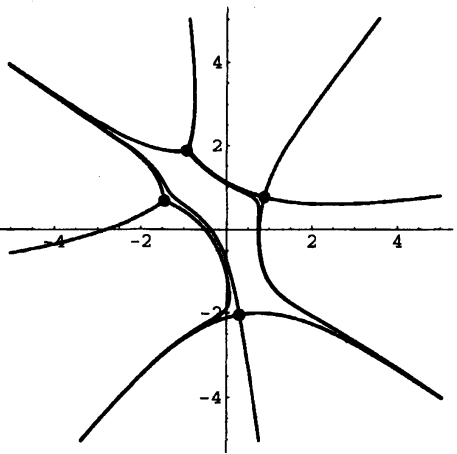
☒ 100:  $t = \hat{\sigma}_1 - 0.1 + 0.2i$



☒ 101:  $t = \hat{\sigma}_1 - 0.1 - 0.1i$



☒ 102:  $t = \hat{\sigma}_1 + 0.1 - 0.1i$



☒ 103:  $t = \hat{\sigma}_1 + 0.1 - 0.1i$

この点のまわりでも,  $t$  が元々の Stokes 曲線上にある場合か新しい曲線上にある場合にしか, 線形方程式の turning point を繋ぐ Stokes 曲線は存在しない.  $\hat{\sigma}_2$  においても同じ現象が観察される.

このように, この例においては新しい曲線と Stokes 曲線の交点のまわりにおいては上述のような現象は見られないことが確認された.

## A 付録

### A.1 $\mathcal{K}_{i+1}, \mathcal{L}_{i+1}$ の定義について

命題 A.1

$$\partial_t \mathbf{K}_{i+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_t u - \partial_t^2 & 2\partial_t \\ 2v\partial_t + v_t & u\partial_t + \partial_t^2 \end{pmatrix} \mathbf{K}_i, \quad \mathbf{K}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_i \\ \mathcal{L}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたす  $u, v$  の微分多項式  $\mathcal{K}_{i+1}, \mathcal{L}_{i+1}$  ( $i \geq 0$ ) を帰納的に定義することができる.

(証明)

$i = 0$  のときは

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_t u - \partial_t^2 & 2\partial_t \\ 2v\partial_t + v_t & u\partial_t + \partial_t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$$

より

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

ととればよい. あとは,  $1 \leq m \leq i$  においてこのような  $\mathbf{K}_m$  が存在したとして

$$\begin{aligned} \partial_t \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{i+1} \\ \mathcal{L}_{i+1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_t u - \partial_t^2 & 2\partial_t \\ 2v\partial_t + v_t & u\partial_t + \partial_t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{K}_i \\ \mathcal{L}_i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_t (u\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i,t} + 2\mathcal{L}_i) \\ 2v\mathcal{K}_{i,t} + v_t\mathcal{K}_i + u\mathcal{L}_{i,t} + \mathcal{L}_{i,tt} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (89)$$

が成立するように,  $u, v$  の微分多項式  $\mathcal{K}_{i+1}, \mathcal{L}_{i+1}$  を構成してやればよい. ここで,  $\mathcal{K}_{i+1}$  については明らかで

$$\mathcal{K}_{i+1} = \frac{1}{2} (u\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i,t} + 2\mathcal{L}_i) \quad (90)$$

ととればよい. 一方,  $\mathcal{L}_{i+1}$  については (89) の右辺第 2 成分がある微分多項式の微分で書けることを示さなくてはならない. そのために, この部分を  $\Omega_{i+1}$  とおくと, 帰納法の仮

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{i-1} \mathcal{K}_{i-m} \partial_t \mathcal{L}_{m+1} + \mathcal{K}_0 \Omega_{i+1} \\
&= \sum_{m=0}^i \mathcal{K}_{i-m} \frac{1}{2} (2v\mathcal{K}_{m,t} + v_t \mathcal{K}_m + u\mathcal{L}_{m,t} + \mathcal{L}_{m,tt})
\end{aligned}$$

が成立する. よって, この式を変形していくと

$$\begin{aligned}
2\Omega_{i+1} &= - \sum_{m=0}^{i-1} \mathcal{K}_{i-m} \partial_t \mathcal{L}_{m+1} + \sum_{m=0}^i \mathcal{K}_{i-m} \frac{1}{2} (2v\mathcal{K}_{m,t} + v_t \mathcal{K}_m + u\mathcal{L}_{m,t} + \mathcal{L}_{m,tt}) \\
&= - \sum_{m=0}^{i-1} \frac{1}{2} (u\mathcal{K}_{i-m-1} - \mathcal{K}_{i-m-1,t} + 2\mathcal{L}_{i-m-1}) \mathcal{L}_{m+1,t} \\
&\quad + \sum_{m=0}^{i-1} \mathcal{K}_{i-m-1} \frac{1}{2} (2v\mathcal{K}_{m+1,t} + v_t \mathcal{K}_{m+1} + u\mathcal{L}_{m+1,t} + \mathcal{L}_{m+1,tt}) \\
&\quad + \mathcal{K}_i \frac{1}{2} (2v\mathcal{K}_{0,t} + v_t \mathcal{K}_0 + u\mathcal{L}_{0,t} + \mathcal{L}_{0,tt}) \\
&= \partial_t \left( \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{i-1} (\mathcal{L}_{m+1,t} \mathcal{K}_{i-m-1} - \mathcal{L}_{m+1} \mathcal{L}_{i-m-1} + \mathcal{K}_{i-m-1} v \mathcal{K}_{m+1}) + v \mathcal{K}_i \right)
\end{aligned}$$

となる. よって,  $\mathcal{L}_{i+1}$  は

$$\mathcal{L}_{i+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{i-1} (\mathcal{L}_{m+1,t} \mathcal{K}_{i-m-1} - \mathcal{L}_{m+1} \mathcal{L}_{i-m-1} + \mathcal{K}_{i-m-1} v \mathcal{K}_{m+1}) + v \mathcal{K}_i \right) \quad (91)$$

ととればよいことがわかる.

(証明終)

## A.2 $P_{II}$ hierarchy と $P_{IV}$ hierarchy における定数の消去について

小節 2.2 において  $P_{II}$  hierarchy を導く際に一般性を失わず  $c_{n-1} = 0$  とできること, 並びに, 小節 2.3 において  $P_{IV}$  hierarchy を導く際に一般性を失わず  $c_0 = g_{n+1} = 0$  とできることを述べたがこの小節ではその証明を与える.

### 補題 A.1

$\mathcal{K}_{i+1}, \mathcal{L}_{i+1}$  について次の関係式が成立する.

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{K}_{i+1} = \frac{i+1}{2} \mathcal{K}_i, \quad \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{L}_{i+1} = \frac{i+1}{2} \mathcal{L}_i \quad (i \geq 0). \quad (92)$$

$\mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  より,  $i = 0$  の時は成立.

$i - 1$  まで成立したとして, (92) を示す.

$\mathcal{K}_i, \mathcal{L}_i, \mathcal{K}_{i+1}, \mathcal{L}_{i+1}$  が  $t$  を陽に含んでいないことは (90), (91) より帰納的にわかる. したがって, これらの式に対して  $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$  という三つの微分の作用が互いに可換であることがわかる. これを用いて計算すると次が成立する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{K}_{i+1,t} &= \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{1}{2} (u\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i,t} + 2\mathcal{L}_i)_t \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \mathcal{K}_i + \frac{i}{2} u\mathcal{K}_{i-1} - \frac{i}{2} \mathcal{K}_{i-1,t} + 2\frac{i}{2} \mathcal{L}_{i-1} \right)_t \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{K}_i + i\mathcal{K}_i)_t \\ &= \frac{i+1}{2} \mathcal{K}_{i,t} \\ \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{L}_{i+1,t} &= \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{1}{2} (2v\mathcal{K}_{i,t} + v_t\mathcal{K}_i + u\mathcal{L}_{i,t} + \mathcal{L}_{i,tt}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( 2v\frac{i}{2}\mathcal{K}_{i-1,t} + v_t\frac{i}{2}\mathcal{K}_{i-1} + \mathcal{L}_{i,t} + u\frac{i}{2}\mathcal{L}_{i-1,t} + \frac{i}{2}\mathcal{L}_{i-1,tt} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{i,t} + i\mathcal{L}_{i,t}) \\ &= \frac{i+1}{2} \mathcal{L}_{i,t} \end{aligned}$$

(証明終)

これを用いて次の補題を証明する.

#### 補題 A.2

$h$  を定数として,  $u \mapsto u + h$  という従属変数の変換を行なうと,  $\mathbf{K}_{i+1}$  は次のように変換される.

$$\mathbf{K}_{i+1} \mapsto \sum_{k=0}^{i+1} \left(\frac{h}{2}\right)^k \binom{i+1}{k} \mathbf{K}_{i+1-k}. \quad (93)$$

まず,  $\mathcal{K}_{i+1}$  にこの変換を行なうと (92) により

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{i+1} &\mapsto \mathcal{K}_{i+1} + h \frac{\partial \mathcal{K}_{i+1}}{\partial u} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 \mathcal{K}_{i+1}}{\partial u^2} + \cdots + \frac{1}{(i+1)!} h^{i+1} \frac{\partial^{i+1} \mathcal{K}_{i+1}}{\partial u^{i+1}} \\ &= \mathcal{K}_{i+1} + \frac{i+1}{2} h \mathcal{K}_i + \frac{(i+1)i}{2 \cdot 2^2} h^2 \mathcal{K}_{i-1} + \cdots + \frac{(i+1) \cdots 2 \cdot 1}{(i+1)! 2^{i+1}} h^{i+1} \mathcal{K}_0 \\ &= \sum_{k=0}^{i+1} \left(\frac{h}{2}\right)^k \binom{i+1}{k} \mathcal{K}_{i+1-k}\end{aligned}$$

となる.  $\mathcal{L}_{i+1}$  も同様に

$$\mathcal{L}_{i+1} \mapsto \sum_{k=0}^{i+1} \left(\frac{h}{2}\right)^k \binom{i+1}{k} \mathcal{L}_{i+1-k}$$

と変換される. ただし, ここで  $\mathcal{K}_{i+1}, \mathcal{L}_{i+1}$  が  $u$  について高々  $(i+1)$  次であることを使った.

(証明終)

この補題を使うと (5) に  $u \mapsto u+h$  という変換を施した式は

$$\begin{aligned}R^n \mathbf{u}_t + \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \left(\frac{h}{2}\right)^{n-i} \binom{n+1}{n-i} + \sum_{k=i}^{n-1} c_k \left(\frac{h}{2}\right)^{k-i} \binom{k+1}{k-i} \right] R^i \mathbf{u}_t \\ + g_n R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{g_n}{2} h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + g_{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (94)$$

となることがわかる.

よって,  $P_{II}$  hierarchy のときは  $h = \frac{-2}{n+1} c_{n-1}$  とおいて,  $c_i$  を改めて

$$\left(\frac{-c_{n-1}}{n+1}\right)^{n-i} \binom{n+1}{n-i} + \sum_{k=i}^{n-1} c_k \left(\frac{-c_{n-1}}{n+1}\right)^{k-i} \binom{k+1}{k-i}$$

でおき直すことにより,  $c_{n-1} = 0$  としてよいことがわかる. 一方,  $P_{IV}$  hierarchy のときは  $h = -\frac{2g_{n+1}}{g_n}$  とおいて,  $c_i$  を改めて

$$\left(-\frac{g_{n+1}}{g_n}\right)^{n-i} \binom{n+1}{n-i} + \sum_{k=i}^{n-1} c_k \left(-\frac{g_{n+1}}{g_n}\right)^{k-i} \binom{k+1}{k-i}$$

でおき直すことにより,  $g_{n+1} = 0$  としてよいことがわかる.

$P_{IV}$  hierarchy のときは, さらに独立変数  $t$  を  $t \mapsto t - 2\frac{c_0}{g_n}$  と平行移動させることにより  $c_0 = 0$  としてよいことがわかる.



### A.3 Lax pair の両立条件の計算についての補足

この小節では小節 2.2, 2.3, 2.4 で省略してきた Lax pair の両立条件の計算を補足する。まず始めに、次の補題を示す。

補題 A.3

$\mathcal{L}_{i+1}$  に対して、次の等式が成立する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{i+1,t} = & - \left[ -\frac{1}{2} ((2x-u) S_i + S_{i,t} + \mathcal{K}_{i+1})_t - v S_i \right] + v ((2x-u) S_i + S_{i,t}) \\ & + (2x-u) \left[ -\frac{1}{2} ((2x-u) S_i + S_{i,t} + \mathcal{K}_{i+1})_t - v S_i \right]. \end{aligned}$$

(証明)

$i=0$  のとき,

$$RHS = - \left[ \frac{1}{2} u_t - \frac{1}{2} u_t - v \right] + v(2x-u) + (2x-u) \left( \frac{1}{2} u_t - \frac{1}{2} u_t - v \right) = v_t,$$

$$LHS = v_t.$$

$i-1$  まで成立するとすると,

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{1}{2} \mathcal{K}_i + x S_{i-1} \\ \mathcal{K}_{i+1} &= \frac{1}{2} (u \mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i,t} + 2 \mathcal{L}_i) \\ \mathcal{L}_{i+1,t} &= \frac{1}{2} (2v \mathcal{K}_{i,t} + v_t \mathcal{K}_i + u \mathcal{L}_{i,t} + \mathcal{L}_{i,tt}) \end{aligned}$$

を使って計算して,

$$\begin{aligned} RHS &= x \mathcal{L}_{i+1,t} - \left[ -\frac{1}{4} ((2x-u) \mathcal{K}_i + \mathcal{K}_{i,t})_t - \frac{1}{2} \mathcal{K}_{i+1,t} + \frac{x}{2} \mathcal{K}_{i,t} - \frac{v}{2} \mathcal{K}_i \right]_t \\ &\quad + \frac{v}{2} ((2x-u) \mathcal{K}_i + \mathcal{K}_{i,t}) \\ &\quad + (2x-u) \left[ -\frac{1}{4} ((2x-u) \mathcal{K}_i + \mathcal{K}_{i,t})_t - \frac{1}{2} \mathcal{K}_{i+1,t} + \frac{x}{2} \mathcal{K}_{i,t} - \frac{v}{2} \mathcal{K}_i \right] \\ &= v \mathcal{K}_{i,t} + \frac{1}{2} v_t \mathcal{K}_i + u \mathcal{L}_{i,t} + \mathcal{L}_{i,tt} \\ &= \mathcal{L}_{i+1,t} \end{aligned}$$

が成立する。

この補題を用いると各場合の両立条件を示すことができる。

$P_{II}$  hierarchy のときは

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} - B, -A_{II}^{(i)} \right] &= \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{i+1} & \mathcal{K}_{i+1} \\ v\mathcal{K}_{i+1} + (2x-u)\mathcal{L}_{i+1} & -\mathcal{L}_{i+1} \end{pmatrix} \quad (0 \leq i \leq n) \\ \left[ \frac{\partial}{\partial t} - B, -A_{II}^{(-1)} \right] &= \begin{pmatrix} -\delta + g_{n+1} & g_{n+1}t \\ g_{n+1}tv - (\delta - \frac{1}{2}g_{n+1})(2x-u) & \delta - g_{n+1} \end{pmatrix} \\ \left[ \frac{\partial}{\partial t} - B, \frac{1}{2}g_{n+1}\frac{\partial}{\partial x} \right] &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}g_{n+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}g_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, (15) がわかる.  $P_{IV}$  hierarchy I のときは

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} - B, -A_{IV}^{(i)} \right] &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mathcal{K}_{i+1,t} & 0 \\ \mathcal{L}_{i+1,t} & \frac{1}{2}\mathcal{K}_{i+1,t} \end{pmatrix} \quad (1 \leq i \leq n) \\ \left[ \frac{\partial}{\partial t} - B, -A_{IV}^{(-1)} \right] &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(2x-u)g_n - \frac{u}{4}g_nt & 0 \\ g_nv + \frac{1}{2}g_ntv_t & -\frac{1}{4}(2x-u)g_n + \frac{u}{4}g_nt \end{pmatrix} \\ \left[ \frac{\partial}{\partial t} - B, -A_{IV}^{(-2)} \right] &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}F_t + \frac{1}{2}G_t + \frac{1}{2}VF + 2xG & \frac{1}{2}F \\ (2x-u)\left(\frac{1}{2}G_t + \frac{1}{2}VF + 2xG\right) - & -\frac{1}{4}F_t - \frac{1}{2}G_t - \\ -\left(\frac{1}{2}G_t + \frac{1}{2}VF + 2xG\right)_t + \frac{1}{2}vF & -\frac{1}{2}VF - 2xG \end{pmatrix} \\ \left[ \frac{\partial}{\partial t} - B, \frac{g_n}{2}x\frac{\partial}{\partial x} \right] &= \begin{pmatrix} -\frac{g_n}{2}x & 0 \\ 0 & \frac{g_n}{2}x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, (22) がわかる.  $P_{IV}$  hierarchy II のときは  $A_{IV'}^{(-2)}$  の (2,1) 成分を  $A_{21}^{(-2)}$  と書いて計算すると,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} - B, -A_{IV'}^{(i)} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}_{i+1} \\ \mathcal{L}_{i+1,t} + v\mathcal{K}_{i+1} & 0 \end{pmatrix} \\ \left[ \frac{\partial}{\partial t} - B, -A_{IV'}^{(-1)} \right] &= \begin{pmatrix} \frac{g_n}{2}x & \frac{\gamma}{2} + \frac{u}{2}g_nt \\ \frac{g_n}{2}v_t + g_nv + v\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{u}{2}g_nt\right) & -\frac{g_n}{2}x \end{pmatrix} \\ \left[ \frac{\partial}{\partial t} - B, -A_{IV'}^{(-2)} \right] &= \begin{pmatrix} A_{21}^{(-2)} & 0 \\ -(2x-u+\partial_t)A_{21}^{(-2)} & -A_{21}^{(-2)} \end{pmatrix} \\ \left[ \frac{\partial}{\partial t} - B, \frac{g_n}{2}x\frac{\partial}{\partial x} \right] &= \begin{pmatrix} -\frac{g_n}{2} & 0 \\ 0 & \frac{g_n}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, (26) がわかる.

又,  $P_{IV}$  hierarchy II においては

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}_{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathcal{K}_{i+1} + \frac{\gamma}{2} + \frac{u}{2} g_n t \\ &= \frac{1}{2} \left[ (u \mathcal{K}_n - \mathcal{K}_{n,t} + 2 \mathcal{L}_n) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i (u \mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i,t} + 2 \mathcal{L}_i) + \gamma + u g_n t \right] \\ &= \frac{1}{2} [u K_n - K_{n,t} + 2 L_n + \gamma + g_n] \end{aligned}$$

となることや

$$\mathcal{L}_{n+1,t} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathcal{L}_{i+1,t} + \frac{g_n}{2} v_t + g_n v$$

が(17)の第2成分になることにも注意する.

## 参考文献

- [AKT1] T.Aoki, T.Kawai and Y.Takei, WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter.II, -Multiple-scale analysis of Painlevé transcendents, Conf.Proc. "Structure of Solutions of Differential Equation", World Scientific, 1996, 1-49.
- [AKT2] T.Aoki, T.Kawai and Y.Takei, New turning points in the exact WKB analysis for higher-order ordinary differential equations, Analyse algébrique des perturbations singulières. I, Hermann, 1994, 69-84.
- [AKT3] T.Aoki, T.Kawai and Y.Takei, On the exact WKB analysis for the third order ordinary differential equations with a large parameter, Asian J. Math., 2, 1998, 625-640.
- [BNR] H.L.Berk, W.M.Nevins and K.V.Roberts, New Stokes' line in WKB theory, J. Math. Phys., 23, 1982, 988-1002.
- [GJP] P.R.Gordoa, N.Joshi and A. Pickering, On a Generalized 2+1 Dispersive Water Wave Hierarchy, Publ.RIMS Kyoto Univ.,37, 2001, 327-347.
- [K] B.A.Kupershmidt, Mathematics of Dispersive Water Waves, Comm. Math. Phys., 99, 1985, 51-73.
- [KT1] 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学, 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店, 1998.
- [KT2] T.Kawai and Y.Takei, WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter.I, Adv. in Math.,118, 1996, 1-33.

- [KT3] T. Kawai and Y. Takei, WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. III, *Adv. in Math.*, 134, 1998, 178-218.
- [T] Y. Takei, An explicit description of the connection formula for the first Painlevé equation, "Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear", Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 271-296.