数理解析研究所講究録 1317 巻 2003 年 31-38

合成関数の微分公式の証明について

小柴 洋一 (鹿児島大 (理))

2002 年 7 月 30 日 (火)

1 はじめに

$$関数\ z=f(y), 関数\ y=g(x)$$

の合成関数 $z=f(g(x))$ についての微分公式

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

の 証明 の歴史について考えて見たいと思います。

まず現代で高校教科書（日本）を見ます。どれでもいいのですが、ある本を引用します。
(引用始め)

⋮

x の増分 Δx に対する関数 $y=g(x)$ の増分を Δy
y の増分 Δy に対する関数 $z=f(y)$ の増分を Δz とする。このとき、

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

ところで、$f(x)$ は x について微分可能であるから連続である。
したがって、

$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \to 0$ である。よって、

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y}.^{1}$$

したがって、

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \underline{\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

⋮

(引用終わり)

となっています。
（よく知られていることですが）この論理は間違いです。
このことがこれからの話の前提です。
大学初級年度の微分積分の教科書は正しく説明・証明しているのが殆んどです（説明していないのもありますが）。現代の証明がどのようなものかはよく知られているので再録はしません。

2 Cauchy の講義録を見る

合成関数公式の証明は昔はどのように考えられてきたのでしょうか？Cauchy[1] によると次のような記述を残しています。

(引用始め)

⋮

Soit maintenant z une seconde fonction de x,liée à la première y=f(x) par la formule

$$z = f(y).$$

z ou $F[f(x)]$ sera ce qu'on appelle une *fonction de fonction* de la variable x;et,si l'on designe par $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ les accroissements infiniment petits et simultanes des trois variables x,y,x,

[1] 下線は筆者、以下も同じ。$\Delta y = 0$ のときの考察がない。

on trouvera

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y) - f(y)}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y) - f(y)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

puis,en passant aux limites,

$$z' = y'F'(y) = f'(x)F'[f(x)]$$

$$\vdots$$

(引用終わり)

このCauchy文章は小堀憲先生の翻訳がありますので、該当部分を載せておきます。

(引用始め)

$$\vdots$$

zを、xのもう1つの函数とし、はじめの$y = f(x)$とは、公式

$$z = f(y).$$

によって関係づけられているとする。zすなわち$F[f(x)]$は、変数xの函数の函数と呼ばれているものであるが、xの無限小増分をΔxとしたときに、それに応じるy, zの増分をそれぞれ$\Delta y, \Delta z$とすると

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y) - f(y)}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y) - f(y)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

と書けるので、極限においては

$$z' = y'F'(y) = f'(x)F'[f(x)]$$

となる。

$$\vdots$$

(引用終わり)

ご覧のように現代の高校教科書と同じレベルの認識を示しています。

3　最初に誰が正しい論証を示したのだろうか？

Cauchy,A.L. 以来誰かが気がついて正しい証明に行き着いたはずです。
まずは　高木貞治著　解析概論　岩波　を見ます。
最初は岩波講座　数学I　一般項目1として
高木貞治著、解析概論　1933年(昭和8年)4月1日に出版されています。
1938年単行本の形で現在見られる形であります。
1933年版と1938年版を該当するする場所を見てみましょう。
少し違う個所が見られます。
1933年版（講座本）の場合：56ページ後半
(引用始め)

⋮

$\Delta t \to 0$ ノトキ、$\varepsilon' \to 0$、又ソノトキ $\Delta x \to 0$、従テ $\varepsilon \to 0$.
由テ

$$\begin{aligned}\Delta y &= (f'(x)+\varepsilon)(\varphi'(t)+\varepsilon')\Delta t \\ &= f'(x)\varphi'(t)+(\varepsilon\varphi'(t)+\varepsilon' f'(x)+\varepsilon\varepsilon')\Delta t\end{aligned}$$

右辺ノ第二項ノ括弧ノナカヲ ε'' トスレバ、$\Delta t \to 0$ ノトキ $\varepsilon'' \to 0$ 故ニ

$$dy = f'(x)\varphi'(t)dt$$

⋮

(引用終わり)

1938年版（ということは現行本と同じということ）40ページのやはり後半
(引用始め)

⋮

$\Delta t \to 0$ のとき、$\varepsilon' \to 0$、またそのとき $\Delta x \to 0$、ただしこの場合、$\Delta t \neq 0$ でも $\Delta x = 0$ でありうるが３７頁［注意］のよ

うに、$\Delta x = 0$ のとき $\varepsilon = 0$ と定義するのだから、$\Delta \to 0$ のとき $\varepsilon \to 0$. よって

$$\begin{aligned} \Delta y &= (f'(x)+\varepsilon)(\varphi'(t)+\varepsilon')\Delta t \\ &= f'(x)\varphi'(t) + (\varepsilon\varphi'(t) + \varepsilon' f'(x) + \varepsilon\varepsilon')\Delta t \end{aligned}$$

において、右辺の第二項の括弧 [ ] の中を ε'' と書けば、

$$\Delta y = f'(x)\varphi'(t)\Delta t + \varepsilon''\Delta t, \varepsilon'' = \varepsilon\varphi'(t) + \varepsilon' f'(x) + \varepsilon\varepsilon'$$

で、$\Delta t \to 0$ のとき、$\varepsilon'' \to 0$、故に

$$dy = f'(x)\varphi'(t)dt$$

⋮

(引用終わり)

このように現行の「解析概論」はその前の講座本での $\Delta x = 0$ の場合を意識して説明が書き足されています。

4 Pierpont,J 1905

19 世紀後半から 20 世紀前半にかけて解析学の書は沢山出版されていますが、意外にこの部分に焦点をあてた書は少ない。大衆向けの本 (Kiepart 等) の場合致し方ないのですが当時の研究レベルの書の場合 (Serret,Sturm) でもそのまま Cauchy 流に間違ったままになっているのも多くあります。また、それに触れていないのもあります。
その中で Landau[4] は明解です。調べていくなかで Pierpont,J 1905 年出版に出会った。
ここで Pierpont の書 [3] の該当ページ２３４ページを見てみましょう。文章が長過ぎて全部引用が出来ないのが残念です。
(引用始め)

⋮

case 2. $\Delta x = 0$ for some point inevery $V^*(t)$.
Let V_0 be the poits of $V^*(t)$,for which $\Delta x = 0$

Let V_1 be the remaining points of $V^*(t)$
If we show

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta t}, \text{and} \quad \lim \frac{dy}{dx} \lim \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

$$\vdots$$

(引用終わり)

これが最初の証明者と思った。ところが…

5 Tannery,J, 1886

Tannery の書 [2] があったのです。彼の証明は Pierpont とは違います。$\Delta x = 0$ になっている変数 t の点列を考えています。この証明は現今の教科書、解析学書にも時々見られるものです。Cauchy 全集には級数の和についての極限の考えは見られますが、点列の極限の考察は見当たりませんでした。この点で Tannery には進歩が見られます。1886 年ですが、これが本当に最初の証明なのかは講演時には調査中だったのですがほぼ間違いなく Tannery が最初と思われます。引用が長くなるので実際にはここには載せませんがこの書２２７ページにあります。古くからの数学教室の図書室にはありますのでご覧ください。

6 正しい論証なるものをもう１回見直す

多言を要する必要はないのですが、つぎの (1),(2) は $y = g(x)$ の $x = a$ における微分可能を示す式、同様に (3),(4) は $z = f(y)$ の $y = b$ における微分可能を示す式とします。

$$g(a+h) = g(a) + \alpha h + h\varepsilon_1(h)(h \neq 0) \tag{1}$$

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = 0 \tag{2}$$

$$f(b+k) = f(b) + \beta k + k\varepsilon_2(k)(k \neq 0) \tag{3}$$

$$\lim_{k \to 0} \varepsilon_2(k) = 0 \tag{4}$$

$x=a$ のある近傍 $U : 0<|x-a|<\delta$ で $\Delta y = g(a+\Delta)-g(a) \neq 0$ であれば冒頭の高校教科書の論理はそれなりに良い訳です。
以上の説明から解るように歴史的に見ると２つの証明があります。

- Tennery のやった証明　$x=a$ のある近傍で $\Delta y \neq 0$ を否定した場合を示す。
- Pierpont のやった証明　上の式で $\varepsilon_2(0)=0$ とする。

7　そもそも次の命題を正しいとするかどうかにあった。

合成関数の極限についての命題 (関数記号を改めて書くと $z = f(y), y=g(x)$) で

$$\lim_{x\to a} g(x) = b, \quad \lim_{y\to b} f(y) = c$$

のとき

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = c$$

が正しいかどうか？にあった訳です。Cauchy が正しいと思ったから公式証明が正しくなかったのです。これは $\varepsilon-\delta$ 論法 を実際に実行するかどうかにあります。

- $$0<|x-a|<\delta \text{ならば} \quad |g(x)-b|<\varepsilon_1$$
- $$0<|y-b|<\varepsilon_1 \text{ならば} \quad |f(x)-c|<\varepsilon_2$$

上の２つの式で右上から左下に行きたいところだが論理の落とし穴があります。すなわち $g(x)-b=y-b=0$ の場合です。
という訳でこの命題は正しくない。反例は容易に作れる[2]。

[2]念のため例を書いておきます。

$$y=f(x)=0$$

参考文献

[1] Cauchy,A[1823], Résumé des leçons données á l'École royale Polytechnique,sur le calcul infinitésimal, 1823 年 (小堀 憲訳 コーシー微分積分学要論、共立出版)
Cauchy 全集 (Oeuvres de Cauchy) deuxieme serie Tomes IV 25page にあります。

[2] Tannery,J[1886], Introduction a la Théorie des Fonctions d'une variable, Paris, 1886 年 133 節 (226,227page)

[3] Pierpont,J[1905] The Theory of Functions of Real Variables,Vol I,1905 年, 特に 378 節,379 節 (232page から 235page まで)

[4] Landau,E[1934], Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung,Noordhoff,1934 年 80page Satz 101

$$g(y) = \begin{cases} 1 & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$g(f(x)) = 0, \lim_{y\to 0} g(y) = 1$ となっている。