数理解析研究所講究録 1317 巻 2003 年 157-161

自然数の開平とペル方程式(続き)

宮城県第一女子高等学校 伊藤朋幸, (Tomoyuki Ito)
Miyagi prefectural first girls senior high school,

東北大学名誉教授 土倉 保 (Tamotsu Tsuchikura)
Professor em., Tohoku University

會田安明(1747-1817)「算法零約術乾之巻」に次のことが述べられている．現代流に書き直して述べよう．(前稿註７参照)

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ $(n=-1,0,1,2,\cdots)$を，$a_{-1}=1$，$b_{-1}=0$，$a_0=4$，$b_0=3$，かつ

$$\begin{cases} a_{2n+1}=4a_{2n}+a_{2n-1} & (n=0,1,2,\cdots) \\ a_{2n}=8a_{2n-1}+a_{2n-2} & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{2n+1}=4b_{2n}+b_{2n-1} & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_{2n}=8b_{2n-1}+b_{2n-2} & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

と定義すると，$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{2}$となる．

會田はこれについて，「解義」のようなものは述べていない．ただ，あとで，$\sqrt{2}$の連分数展開の説明（註２参照）をして，その近似分数列の奇数番目の項を順に並べて，その相互関係を調べてみたということを述べているだけである．2 以外の数の平方根については，上のような漸化式までにはなっていないようである．

ここでは一般の自然数N（正の数という仮定だけでもよい）についての定理として述べよう．

定理３ Nを自然数，$a_0\geq b_0\geq 1$で$\sqrt{N}$は無理数とする．

$\alpha=\dfrac{-2a_0}{{a_0}^2-{b_0}^2N}$，$\beta$=2$a_0$として，$a_{-1}=1$，$b_{-1}=0$，かつ

$$\begin{cases} a_{2n+1}=\alpha\, a_{2n}+a_{2n-1} & (n=0,1,2,\cdots) & (17) \\ a_{2n}=\beta\, a_{2n-1}+a_{2n-2} & (n=1,2,\cdots) & (18) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{2n+1}=\alpha\, b_{2n}+b_{2n-1} & (n=0,1,2,\cdots) & (19) \\ b_{2n}=\beta\, b_{2n-1}+b_{2n-2} & (n=1,2,\cdots) & (20) \end{cases}$$

とすると，$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{N}$となる．

上記の會田の例は，N=2，a_0=4，b_0=3，$\alpha=\dfrac{-2\cdot 4}{4^2-3^2\cdot 2}=4$，$\beta=2\cdot 4=8$となっている場合である．

この定理３で注目すべきことの一つと思われるのは，定理２も同じであるが，隣接３項についての漸化式でありながら，初項にあたるa_{-1}，b_{-1}の値は，Nに拘らずそれぞれ 1，0 と定まって

いて，次の項である a_0，b_0 を適当に与えればよいことである．もちろん $\dfrac{a_0}{b_0}$ が $\sqrt{N}$ の近似値であるようにするのが収束性もよいわけである．

またこの定理で $n\equiv 1,2\pmod 4$ のとき $a_n'=-a_n$，$n\equiv 0,3\pmod 4$ のとき $a_n'=a_n$ と定義して新しい数列 $\{a_n'\}(n=-1,0,1,2,\cdots)$ を作り，$\{b_n'\}$ も同様とすると，仮定の漸化式は，

$$\begin{cases} a_{2n+1}'=-\alpha a_{2n}'-a_{2n-1}' & (n=0,1,2,\cdots) \\ a_{2n}'=\beta a_{2n-1}'-a_{2n-2}' & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

となることが確かめられる．$\{b_n'\}$ も同様となる．$a_0'=a_0$，$b_0'=b_0$ だから α，β は変わらない．従って a_0，b_0 が Pell 方程式 $a_0{}^2-b_0{}^2N=1$ をみたせば，$-\alpha=\beta=2a_0$ となって，漸化式は一つにまとめて，

$$a_n'=2a_0a_{n-1}'-a_{n-2}' \qquad (n=1,2,\cdots),$$

と書ける．$\{b_n'\}$ も同様である．そして $a_n'/b_n'=a_n/b_n\to\sqrt{N}\ (n\to\infty)$ も明らかである．すなわち，これは定理２である．

會田安明は，実は，この定理３を $\sqrt{2}$ の連分数展開の近似分数列から試行錯誤して見出し，それから定理２を得たものと推察される．

定理３の証明　(17)から，$a_{2n}=\dfrac{1}{\alpha}(a_{2n+1}-a_{2n-1})\quad(n=0,1,2,\cdots)$，$n$ を $n-1$ として，

$a_{2n-2}=\dfrac{1}{\alpha}(a_{2n-1}-a_{2n-3})\quad(n=1,2,\cdots)$，これらを(18)に代入して，

$$\frac{1}{\alpha}(a_{2n+1}-a_{2n-1})=\beta a_{2n-1}+\frac{1}{\alpha}(a_{2n-1}-a_{2n-3})$$

ゆえに，$a_{2n+1}=(\alpha\beta+2)a_{2n-1}-a_{2n-3}\quad(n=1,2,\cdots)$．

これは $\{a_n\}$ の奇数番目の項だけについての漸化式である．便宜のため，$A_n=a_{2n+1}$ とおくと，

$$A_n=(\alpha\beta+2)A_{n-1}-A_{n-2} \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{21}$$

ここで，この漸化式の特性方程式

$$\lambda^2-(\alpha\beta+2)\lambda+1=0$$

の２根(解)を p，q としよう．判別式は

$$(\alpha\beta+2)^2-4=\alpha\beta(\alpha\beta+4)=\left(\frac{-4a_0{}^2}{a_0{}^2-b_0{}^2N}\right)\left(\frac{-4a_0{}^2}{a_0{}^2-b_0{}^2N}+4\right)=\frac{16a_0{}^2b_0{}^2N}{(a_0{}^2-b_0{}^2N)^2}>0,$$

ゆえに p，q は実数で，$p\neq q$ である．そして

$$2\text{根}\ p,q=\frac{1}{2}\left[(\alpha\beta+2)\pm\sqrt{(\alpha\beta+2)^2-4}\right]=\frac{1}{2}\left(-\frac{4a_0{}^2}{a_0{}^2-b_0{}^2N}+2\pm\frac{4a_0b_0\sqrt{N}}{a_0{}^2-b_0{}^2N}\right)$$

$$= -\frac{-(a_0 \pm b_0\sqrt{N})^2}{(a_0 + b_0\sqrt{N})(a_0 - b_0\sqrt{N})} = \begin{cases} -\dfrac{a_0 + b_0\sqrt{N}}{a_0 - b_0\sqrt{N}}, \\ -\dfrac{a_0 - b_0\sqrt{N}}{a_0 + b_0\sqrt{N}}. \end{cases}$$

この２根の絶対値は，$a_0>0$，$b_0>0$ ならば前者の方が大きい．

よって，$p = -\dfrac{a_0 - b_0\sqrt{N}}{a_0 + b_0\sqrt{N}}$，$q = -\dfrac{a_0 + b_0\sqrt{N}}{a_0 - b_0\sqrt{N}}$ とおくと $|q| > |p|$ で，$|pq| = 1$ だから $0 < |p| < 1$，$|q| > 1$

である．さて，(5)は，定理２の証明と同様に次の二通りに変形できる．

$$A_n - pA_{n-1} = q(A_{n-1} - pA_{n-2}) = \cdots = q^n(A_0 - pA_{-1}),$$

$$A_n - qA_{n-1} = p(A_{n-1} - qA_{n-2}) = \cdots = p^n(A_0 - qA_{-1}).$$

この２式から A_{n-1} を消去して，$(q-p)A_n = (q^{n+1} - p^{n+1})A_0 - (q^n - p^n)A_{-1}$，

$\{b_n\}$についても同様で，$B_n = b_{2n+1}$ とおくと，

$$(q-p)B_n = (q^{n+1} - p^{n+1})B_0 - (q^n - p^n)B_{-1} \tag{22}$$

ゆえに，
$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{(q^{n+1} - p^{n+1})A_0 - (q^n - p^n)A_{-1}}{(q^{n+1} - p^{n+1})B_0 - (q^n - p^n)B_{-1}}.$$

ここで，$A_0 = a_1 = \alpha a_0 + 1$，$A_{-1} = a_{-1} = 1$，$B_0 = b_1 = \alpha b_0$，$B_{-1} = b_{-1} = 0$ を代入して，

$$\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}} = \frac{(q^{n+1} - p^{n+1})(\alpha a_0 + 1) - (q^n - p^n)}{(q^{n+1} - p^{n+1})\alpha b_0}.$$

$p^n \to 0$，$|q^n| \to \infty\ (n \to \infty)$ だから，分母子を q^n で割って $n \to \infty$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}} = \frac{q(\alpha a_0 + 1) - 1}{q\alpha b_0} = \frac{\alpha a_0 + 1 - p}{\alpha b_0} \tag{23}$$

(分母子に p を掛けた．$pq=1$ だから)．そして，α，p の式から，

$$\alpha a_0 + 1 - p = \frac{-2a_0^2}{a_0^2 - b_0^2 N} + 1 + \frac{a_0 - b_0\sqrt{N}}{a_0 + b_0\sqrt{N}} = \frac{-2a_0 b_0\sqrt{N}}{a_0^2 - b_0^2 N} = \alpha b_0\sqrt{N}$$

従って(23)の値は $\sqrt{N}$ である．

次に $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{2n}}{b_{2n}} = \sqrt{N}$ を示せば証明が終わるわけで，それには$\{a_n\}$，$\{b_n\}$のそれぞれ偶数番目の

項から作った数列を導いて今と同様の議論をしてやればよいわけであるが，もう少し簡便にしよう．(17)，(19)から，

$$\frac{a_{2n}}{b_{2n}}=\frac{\alpha\, a_{2n}}{\alpha\, b_{2n}}=\frac{a_{2n+1}-a_{2n-1}}{b_{2n+1}-b_{2n-1}}=\frac{\dfrac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}-\dfrac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}\dfrac{b_{2n-1}}{b_{2n+1}}}{1-\dfrac{b_{2n-1}}{b_{2n+1}}} \tag{24}$$

と書ける．そして(22)から（$B_0=\alpha\, b_0$，$B_{-1}=0$ も用いて）

$$\frac{b_{2n-1}}{b_{2n+1}}=\frac{B_{n-1}}{B_n}=\frac{(q^n-p^n)\alpha\, b_0}{(q^{n+1}-p^{n+1})\alpha\, b_0}=\frac{q^n-p^n}{q^{n+1}-p^{n+1}}.$$

ここで，$|q|^n\to\infty$，$p^n\to 0$（$n\to\infty$）に注意すれば

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n-1}}{b_{2n+1}}=\frac{1}{q}=p \qquad (\because pq=1) \tag{25}$$

ゆえに，(23)と(25)を(24)に用いれば

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{b_{2n}}=\frac{\sqrt{N}-\sqrt{N}\cdot p}{1-p}=\sqrt{N} \qquad \text{(証明終)}.$$

N=2 として数値をいくつかみよう．$\alpha_1, \alpha_2,$ …は例６のあとで書いてあるように，$\sqrt{2}$ の連分数展開の近似分数列とする．

例９　會田の上記の著書では，冒頭に挙げた漸化式を用いて，次の値が示されている．

$$\frac{a_0}{b_0}=\frac{4}{3}=\frac{2}{\alpha_1},\quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{4\cdot 4+1}{4\cdot 3}=\frac{17}{12}=\alpha_3,\quad \frac{a_2}{b_2}=\frac{8\cdot 17+4}{8\cdot 12+3}=\frac{140}{99}=\frac{2}{\alpha_5},$$

$$\frac{a_3}{b_3}=\frac{4\cdot 140+17}{4\cdot 99+12}=\frac{577}{408}=\alpha_7,\quad \frac{a_4}{b_4}=\frac{8\cdot 577+140}{8\cdot 408+99}=\frac{4756}{3363}=\frac{2}{\alpha_9},\quad \frac{a_5}{b_5}=\frac{4\cdot 4756+577}{4\cdot 3363+408}=\frac{19601}{13860}=\alpha_{11}$$

ここで得られた $\dfrac{2}{\alpha_1}$，α_3，$\dfrac{2}{\alpha_5}$，α_7，$\dfrac{2}{\alpha_9}$，α_{11}，…も $\sqrt{2}$ の面白い近似数列である．

例 10　a_0=3，b_0=2とすると，$\alpha=-6$，$\beta=6$ となるから，

$$\begin{cases} a_{2n+1}=-6a_{2n}+a_{2n-1} \\ a_{2n}=6a_{2n-1}+a_{2n-2} \end{cases},\qquad \begin{cases} b_{2n+1}=-6b_{2n}+b_{2n-1} \\ b_{2n}=6b_{2n-1}+b_{2n-2} \end{cases}.$$

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{-6\cdot 3+1}{-6\cdot 2+0}=\frac{-17}{-12}=\alpha_3$$ （$a_1=-17$，$b_1=-12$ とみなす．以下同様），

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{6(-17)+3}{6(-12)+2}=\frac{-99}{-70}=\alpha_5,\qquad \frac{a_3}{b_3}=\frac{-6(-99)-17}{-6(-70)-12}=\frac{577}{408}=\alpha_7,\ \cdots$$

例 11　$\dfrac{a_0}{b_0}=\dfrac{6}{4}$ とする（約分せず a_0=6，b_0=4 の意味とする）と，$\alpha=-3$，$\beta=12$ となるから，

$$\begin{cases} a_{2n+1} = -3a_{2n} + a_{2n-1} \\ a_{2n} = 12a_{2n-1} + a_{2n-2} \end{cases}, \quad \{b_n\}\text{については略す.}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{-3\cdot 6+1}{-3\cdot 4} = \frac{-17}{-12} = \alpha_3, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{12(-17)+6}{12(-12)+4} = \frac{-198}{-140} = \alpha_5, \quad \frac{a_3}{b_3} = \frac{-3(-198)-17}{-3(-140)-12} = \frac{577}{408} = \alpha_7, \quad \cdots$$

この例 10，11 は実質的には同じであるが漸化式が異なることに注意したい.

例 12 一般に $a_0=3c$, $b_0=2c$（c は定数）とおいてみると漸化式は,

$$\begin{cases} a_{2n+1} = -\dfrac{6}{c}a_{2n} + a_{2n-1} \\ a_{2n} = 6ca_{2n-1} + a_{2n-2} \end{cases}, \quad \{b_n\}\text{も同様,}$$

となるから,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{-\dfrac{6}{c}a_0 + a_{-1}}{-\dfrac{6}{c}b_0 + b_{-1}} = \frac{-\dfrac{6}{c}\cdot 3c+1}{-\dfrac{6}{c}\cdot 2c+0} = \frac{-17}{-12} = \alpha_3, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{6c(-17)+3c}{6c(-12)+2c} = \frac{-99c}{-70c} = \alpha_5,$$

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{-\dfrac{6}{c}(-99c)-17}{-\dfrac{6}{c}(-70c)-12} = \frac{577}{408} = \alpha_7, \quad \cdots$$

となって，実質的には例 10 と同じである.

例 13 $a_0=b_0=1$ とすると，$\alpha=\beta=2$ となり，漸化式は，n の奇偶に拘らず,

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, \quad b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2} \quad (n=1,2,\cdots)$$

となる（実は連分数論の公式と一致しているのである）.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = \alpha_1, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{2\cdot 3+1}{2\cdot 2+1} = \frac{7}{5} = \alpha_2, \quad \frac{a_3}{b_3} = \frac{2\cdot 7+3}{2\cdot 5+2} = \frac{17}{12} = \alpha_3, \quad \frac{a_4}{b_4} = \frac{2\cdot 17+7}{2\cdot 12+5} = \frac{41}{29} = \alpha_4, \quad \cdots$$

例 14 $a_0=2$, $b_0=1$ とすると，$\alpha=-2$，$\beta=4$ で,

$$\begin{cases} a_{2n+1} = -2a_{2n} + a_{2n-1} \\ a_{2n} = 4a_{2n-1} + a_{2n-2} \end{cases}, \quad \{b_n\}\text{も同様}$$

このとき，$\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{-2\cdot 2+1}{-2\cdot 1+0} = \dfrac{-3}{-2} = \alpha_1$，$\dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{4(-3)+2}{4(-2)+1} = \dfrac{-10}{-7} = \dfrac{2}{\alpha_2}$，$\dfrac{a_3}{b_3} = \dfrac{-2(-10)+(-3)}{-2(-7)+(-2)} = \dfrac{17}{12} = \alpha_3$

$\dfrac{a_4}{b_4} = \dfrac{4\cdot 17+(-10)}{4\cdot 12+(-7)} = \dfrac{58}{41} = \dfrac{2}{\alpha_4}$，$\dfrac{a_5}{b_5} = \dfrac{-2\cdot 58+17}{-2\cdot 41+12} = \dfrac{-99}{-70} = \alpha_5$，$\cdots$ が得られる.