数理解析研究所講究録 1317 巻 2003 年 162-166

和算における積分概念について

東大寺学園　小寺　裕 (Hiroshi Kotera/Todaijigakuen Highschool)

Abstract

長谷川弘閲, 内田久命編『算法求積通考』(1844) は和算における円理 (和算解析学) を集大成した著と言える. その巻之一で区分求積法による定積分の計算方法を述べている. 定積分の値を表にしたものを畳数表と言い,「天表」「甲表」「乙表」などと名付け, 後の問題解法に利用している. 本稿の目的は畳数表の作り方を紹介し, 現代数学と比較考察することである.

1　天表起原

天表とは

$$\int_0^1 x^p dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p = \frac{1}{p+1} \quad (p=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

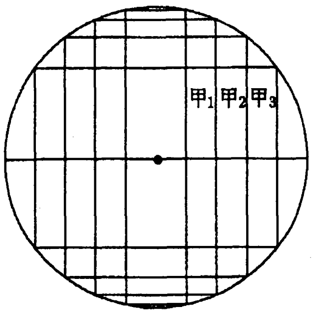
の値を表にしたものである. 和田寧の「畳元表」にあたる. このことを

$$「\left(\frac{k}{n}\right)^p \text{を天表により畳むと} \frac{1}{p+1} \text{になる}」$$

という言い方をする[1].

2　甲表起原

「偶乗甲表」については [1] でものべたが, さらに詳しく現代数学と比較しながら考察する.



直径1の円を $2n$ 等分し、直径に垂直な弦の長さを図のように 甲$_1$, 甲$_2$, $\cdots$, $\dfrac{1}{n}=$ 子, $\dfrac{k}{n}=$ 天 とする.

$$甲_k = \sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \sqrt{1-天^2}$$

これを平方綴術により開き (Taylor 展開)

$$甲_k = 1 - \frac{1}{2}天^2 - \frac{1}{2\cdot4}天^4 - \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}天^6 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}天^8 - \cdots - \frac{(2i-3)!!}{(2i)!!}天^{2i} - \cdots$$

[1] 天表の作り方は 小寺[2]

$$積_k = 子 \cdot 甲_k = \frac{1}{n}\left\{1 - \frac{1}{2}天^2 - \frac{1}{2\cdot 4}天^4 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}天^6 - \cdots\right\}$$

とすると

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}積_k = 円の面積 = \frac{\pi}{4}$$

になることから，天表によりこれを畳むと

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 4\cdot 5} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9} - \cdots \qquad ①$$

和算家はこの級数を円積率と名付けている．

2.1 隅乗甲表

隅乗甲表とは和田寧の「龍商陽表」にあたるもので，定積分

$$A(p,\ q) = \int_0^1 x^{2p}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2q+1}dx$$

の値を表にしたものである．

(1) $A(1,\ 0)$

$\sqrt{1-x}$ を平方綴術により無限級数に展開し、$x=1$ とおくと

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \cdots = 0 \qquad ②$$

故に

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \cdots - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots = 0$$

$$1 - \left(\frac{1}{2}+1\right) + \left(-\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 4}\right) + \cdots = 0$$

すなわち

$$1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2\cdot 4} + \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \frac{3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \cdots = 0 \qquad ③$$

① − ③ より

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 4\cdot 5} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9} - \cdots \\ &\quad -1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2\cdot 4} - \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \frac{3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} - \cdots\end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{3} - \frac{4}{2\cdot 5} - \frac{4}{2\cdot 4\cdot 7} - \frac{4\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9} - \frac{4\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 11} - \cdots$$

ところで

$$天^2\sqrt{1-天^2} = 天^2 - \frac{1}{2}天^4 - \frac{1}{2\cdot 4}天^6 - \frac{3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}天^8 - \cdots - \frac{(2i-3)!!}{(2i)!!}天^{2i+2} - \cdots$$

これを天表により畳むと

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{3}-\frac{1}{2\cdot 5}-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 7}-\frac{3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9}-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 11}-\cdots \quad ④$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}$$

この $\frac{1}{4}$ が偶乗甲表の二行初級欄に書かれているものである.

(2) $A(2,\ 0)$

$$天^4\sqrt{1-天^2} = 天^4-\frac{1}{2}天^6-\frac{1}{2\cdot 4}天^8-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}天^{10}-\cdots$$

これを天表により畳むと

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{5}-\frac{1}{2\cdot 7}-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 9}-\frac{3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 11}-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 13}-\cdots$$

④ × 3 − ③ より

$$3\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = 3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2\cdot 5}-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 7}-\frac{3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9}-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 11}-\cdots\right)$$
$$-1+\frac{3}{2}-\frac{3}{2\cdot 4}-\frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}-\frac{9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}-\cdots$$
$$= \frac{6}{5}-\frac{6}{2\cdot 7}-\frac{6}{2\cdot 4\cdot 9}-\frac{6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 11}-\cdots$$
$$= 6\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx \quad ⑤$$

従って

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{3}{4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{4}$$

この $\frac{3}{4\cdot 6}$ が偶乗甲表の二行二級欄に書かれているものである.

漸化式

$$A(p,\ 0) = \frac{2p-1}{2p+2}A(p-1,\ 0)$$

を利用して二行の各級欄を求めていく. また

$$x^{2p}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2q+1} = x^{2p}(1-x^2)\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2q-1}$$

より

$$A(p,\ q) = A(p,\ q-1) - A(p+1,\ q-1)$$

を利用して各行各級欄を求めていくのである.

2.2　不定積分との関係

上記の計算を現代的に解釈すると次のようになる.

$$\sqrt{1-x^2} = 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot 4}x^4-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^6-\cdots\cdots-\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^{2k}-\cdots$$

$$x\sqrt{1-x^2} = x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2\cdot4}x^5 - \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^7 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^9 - \cdots$$

$$x^3\sqrt{1-x^3} = x^3 - \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2\cdot4}x^7 - \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^9 - \cdots$$

だから

$$(x-x^3)\sqrt{1-x^2} = x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2\cdot4}x^5 + \frac{3}{2\cdot4\cdot6}x^7 + \frac{9}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^9 + \cdots\cdots$$

これに $x=1$ を代入したものが ③ である．また

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

であから④ は不定積分

$$4\int x^2\sqrt{1-x^2}dx = \int\sqrt{1-x^2}dx - x(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$$

で $x=1$ とした係数のみを表示したことになる．さらに⑤ は

$$6\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx = 3\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx - \left[x^3(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right]_0^1$$

を利用し，一般に

$$(2p+2)\int_0^1 x^{2p}\sqrt{1-x^2}dx = (2p-1)\int_0^1 x^{2p-2}\sqrt{1-x^2}dx - \left[x^{2p-1}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right]_0^1$$

を利用している．

2.3 奇乗甲表

奇乗甲表とは和田寧の「龍商陰表」にあたるもので，定積分

$$B(p,\ q) = \int_0^1 x^{2p+1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2q+1}dx$$

の値を表にしたものである．

(1) $B(0,\ 0)$

$$天甲_k = 天\sqrt{1-天^2} = 天 - \frac{1}{2}天^3 - \frac{1}{4\cdot2}天^5 - \frac{3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}天^7 - \cdots$$

天表によりこれを畳むと

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\cdot2} - \frac{1}{6\cdot4\cdot2} - \frac{3\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2} - \cdots$$

③ より

$$\frac{1}{4\cdot2} + \frac{1}{6\cdot4\cdot2} + \frac{3\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2} + \cdots = \frac{1}{6}$$

だから

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

これは不定積分

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$$

を利用したのと同じことである．

3　天商表起原

差＝1－天 とおく．

$$\begin{aligned}\sqrt{天} &= \sqrt{1-差}\\ &= 1-\frac{1}{2}差-\frac{1}{4\cdot 2}差^2-\frac{3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}差^3-\frac{5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}差^4-\cdots-\frac{(2i-3)!!}{(2i)!!}差^i-\cdots\end{aligned}$$

これを天表により畳むと

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{x}dx &= 1-\frac{1}{2\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 2}-\frac{3\cdot 1}{4\cdot 6\cdot 4\cdot 2}-\frac{5\cdot 3\cdot 1}{5\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2\cdot 1}-\cdots\\ &= 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\cdot 2}-\frac{1}{6\cdot 4\cdot 2}-\frac{3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}-\cdots\right)\\ &= 2\times\frac{1}{3}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

これは

$$\int_0^1\sqrt{x}dx=2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$$

を利用したのと同じことである．

4　まとめ

和算では級数展開した係数を眺めてこのようなアイデアに至ったと思われるが，積分区間が0から1であるため不定積分の係数だけを書き並べたことと同じ結果になる．特に② は「前空数」，③ は「後空数」などと呼び，この0の級数展開を巧みに使っている．しかし，$\int_0^1\sqrt{x}dx$ を求めるのに奇乗甲表を使っていることから見てもわかるように，微分法の逆演算としての積分法ではない．区分求積法や級数展開を巧みに利用した円理と呼ばれる和算独自の方法である．

参考文献

[1] 小寺　裕：和算における穿去問題　東大寺学園中・高等学校研究紀要第7号　1996

[2] 小寺　裕：今昔微分積分花紅彩色画　『和算』第78号　近畿数学史学会編　1995

[3] 小寺　裕：『算法求積通考』における「甲表起源」について　数学教育学会冬季研究会発表論文集 2001

[4] 加藤平左ェ門：和算の研究 行列式及圓理　東京開成館　1944

[5] 加藤平左ェ門：和田寧の業績　名城大学理工学部数学教室　1967

[6] 長谷川弘閲，内田久命編：算法求積通考　1844　小寺　裕蔵