数理解析研究所講究録 1319 巻 2003 年 66-74

EXPLICIT FORMULAS OF PRINCIPAL SERIES WHITTAKER FUNCTIONS ON $Sp(2,\mathbf{R})$

東大数理　石井 卓 (Taku Ishii / ishii@ms.u-tokyo.ac.jp)

§1. $SL(2,\mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数

(1.1) Maass form $\mathfrak{H}_1=\{z=x+\sqrt{-1}y \mid y>0\}$ を上半空間, $G=SL(2,\mathbf{R})$, $\Gamma=SL(2,\mathbf{Z})$ とする. G は $\mathfrak{H}_1$ に 1 次分数変換で作用する: $g\langle z\rangle:=(az+b)/(cz+d)$, $g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G$, $z\in\mathfrak{H}_1$.

Definition 1.1 以下の 3 条件を満たす $\mathfrak{H}_1$ 上の C^∞ 関数 F を重さ k $(\in 2\mathbf{Z}_{\geq 0})$ の Maass form という.

(i) $F(\gamma\langle z\rangle)=\Big(\dfrac{cz+d}{|cz+d|}\Big)^kF(z)\quad\forall\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma$,

(ii) F は $\mathfrak{H}_1$ 上の重さ k の Laplacian の固有関数, すなわちある $\lambda\in\mathbf{C}$ が存在して,

$$\Delta_kF=\lambda F\quad ただし\ \Delta_k=-y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)+\sqrt{-1}ky\frac{\partial}{\partial x},$$

(iii) ある $N>0$ が存在して, $|F(z)|=O(y^N)$ $(y\to\infty)$.

Remark 1 F が重さ k の正則保型形式 $\Rightarrow$ $y^{\frac{k}{2}}F$ は重さ k の Maass form.

Remark 2 (Maass 作用素 R_k,L_k)

$$R_k=\sqrt{-1}y\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+\frac{k}{2},\quad L_k=\sqrt{-1}y\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}+\frac{k}{2}$$

とおくと, R_k,L_k は重さ k の Maass form をそれぞれ重さ $k+2,k-2$ の Maass form にうつし, また, $\Delta_k=L_{k+2}\circ R_k-\frac{k}{2}(1+\frac{k}{2})=R_{k-2}\circ L_k+\frac{k}{2}(1-\frac{k}{2})$ が成り立つ.

(1.2) Maass form の Fourier 展開 F を重さ k の Maass form とする. Definition 1.1(i) より, $F(z+1)=F(z)$ を満たすから, $F(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_n(y)e^{2\pi\sqrt{-1}nx}$ という Fourier 展開を持つ. さらに (ii) より, $\lambda=(1-\nu^2)/4$ とおくと, $a_n(y)$ は以下の微分方程式を満たす.

(i) $n\neq 0$ のとき: $\Big[\dfrac{d^2}{dt^2}+\Big\{-\dfrac{1}{4}+\dfrac{k/2}{t}+\dfrac{(1-\nu^2)/4}{t^2}\Big\}\Big]a_n(t)=0\quad(t=4\pi|n|y)$,

(ii) $n=0$ のとき: $\Big[y^2\dfrac{d^2}{dy^2}+\dfrac{1-\nu^2}{4}\Big]a_0(y)=0$.

(i) の微分方程式は Whittaker の微分方程式と言われ, その 1 次独立な解は $\{M_{\frac{k}{2},\frac{\nu}{2}}(t),M_{\frac{k}{2},-\frac{\nu}{2}}(t)\}$ で与えられる. ここで $(a)_n=\Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ と書くと,

$$M_{\frac{k}{2},\frac{\nu}{2}}(t)=t^{(\nu+1)/2}e^{-t/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}(\nu-k+1))_n}{(\nu+1)_n}\frac{t^n}{n!}.$$

このうち, (iii) の増大条件に適合する解は $W_{\frac{k}{2},\frac{\nu}{2}}(t)(\sim t^{\frac{k}{2}}e^{-t}\ (t\to\infty))$ で与えられ,

$$W_{\frac{k}{2},\frac{\nu}{2}}(t)=\frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2}(1-k-\nu))}M_{\frac{k}{2},\frac{\nu}{2}}(t)+\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2}(1-k+\nu))}M_{\frac{k}{2},-\frac{\nu}{2}}(t)$$

が成り立つ (Whittaker 関数については [11] などを参照). 以上により,

Proposition 1.2 重さ k の Maass form F は次のような Fourier 展開を持つ.

$$F(z)=a_Fx^{(\nu+1)/2}+b_Fx^{(-\nu+1)/2}+\sum_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}a_{n,F}W_{\frac{k}{2},\frac{\nu}{2}}(4\pi|n|y).$$

(1.3) 群への持ち上げ Maass form F という $\mathfrak{H}_1$ 上の関数から G 上の関数 f_F を構成する. よく知られているように, Iwasawa 分解 $G=NAK$,

$$N=\left\{\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\middle|\,x\in\mathbf{R}\right\},\ A=\left\{\begin{pmatrix}a&\\&a^{-1}\end{pmatrix}\middle|\,a>0\right\},\ K=\left\{\kappa_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\right\}$$

が成り立つので $g\in G$ は

$$g=\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{y}&\\&1/\sqrt{y}\end{pmatrix}\kappa_\theta$$

と書ける. $g\mapsto g\langle\sqrt{-1}\rangle=x+\sqrt{-1}y$ により, $G/K\cong\mathfrak{H}_1$ を得る.

$J:G\times\mathfrak{H}_1\to GL(1,\mathbf{C})=\mathbf{C}^\times$ を $J(g,z)=cz+d$, $g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ によって定義すると J は保型因子になる, つまり $J(g_1g_2,z)=J(g_1,g_2\langle z\rangle)J(g_2,z)$ が成り立つ. $GL(1,\mathbf{C})$ の 1 次元表現 ρ を $\rho(x)=\left(\frac{x}{|x|}\right)^k$ によって定め, $\kappa_\theta\mapsto e^{-\sqrt{-1}\theta}$ によって K を $GL(1,\mathbf{C})$ の部分群とみなしたとき, ρ の K への制限も ρ と書く. さらに $J_\rho(g,z):=\rho(J(g,z))$ とおくと, J_ρ も保型因子になる.

Proposition 1.3 $F\in C^\infty(\mathfrak{H}_1,\mathbf{C})$ (=$\mathfrak{H}_1$ 上の $\mathbf{C}$ 値 C^∞ 関数の空間) に対して, G 上の関数 f_F を

$$f_F(g):=J_\rho(g,\sqrt{-1})^{-1}F(g\langle\sqrt{-1}\rangle)$$

によって定める. $F\mapsto f_F$ は $\{F\in C^\infty(\mathfrak{H}_1,\mathbf{C})\mid F(\gamma\langle z\rangle)=J_\rho(\gamma,z)F(z)\quad\forall\gamma\in\Gamma,\forall z\in\mathfrak{H}_1\}$ と $\{f\in C^\infty(G,\mathbf{C})\mid f(\gamma gk)=\rho(k^{-1})f(g)\quad\forall\gamma\in\Gamma,\forall g\in G,\forall k\in K\}$ の間の同型を引き起こす.

次に, 群へ持ち上げたときに Definition 1.1(ii) の条件がどうなるか考える. $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})=\{X\in M(2,\mathbf{R})\mid\mathrm{tr}(X)=0\}$ を G の Lie 環とする. $\mathfrak{g}$ は $C^\infty(G)$ に $(Xf)(g):=\frac{d}{dt}|_{t=0}f(g\exp tX)$ $(X\in\mathfrak{g},\ f\in C^\infty(G))$ で作用し, この作用は $\mathfrak{g}_\mathbf{C}=\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ の作用に自然に伸びる. $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ を $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ の universal enveloping algebra とすると, 上の作用はさらに $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ の作用まで伸び, $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ は G 上の左不変微分作用素全体とみなせる. $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ の $\mathbf{C}$ 上の基底は,

$$H=-\sqrt{-1}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}&-1\end{pmatrix},\quad \bar{X}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{-1}\\-\sqrt{-1}&-1\end{pmatrix}$$

で与えられる. $Z(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ を $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ の中心とする. $C=H^2+2(X\bar{X}+\bar{X}X)$ とおくと, $Z(\mathfrak{g}_\mathbf{C})=\mathbf{C}[C]$ となる. C を Casimir 元という. G の座標を上に述べたように入れておくと, C の $C^\infty(G)$ への作用は

$$Cf=4\Big[y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)-y\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}\Big]f\quad(f\in C^\infty(G))$$

と書ける. さらに $f(g\kappa_\theta) = e^{\sqrt{-1}k\theta}f(g)$ から $\frac{\partial f}{\partial\theta} = \sqrt{-1}kf$ となるから, 結局 $Cf = -4\Delta_k f$ を得る.

固有値について述べるために, まず G の主系列表現 (principal series representation) について思い出す. $M = \{\pm 1_2\}$ とすると, $B = MAN$ は G の標準的な極小放物部分群. $\sigma : M \to \{\pm 1\}$ を M の指標, $\nu \in \mathbf{C}$ に対して $e^\nu : A \to \mathbf{C}$ を $e^\nu(a) = \exp\nu(\log a)$ によって定める. このとき誘導表現

$$\pi_{\sigma,\nu} := L^2\text{-}\mathrm{Ind}_B^G(\sigma \otimes e^{\nu+1} \otimes 1_N)$$

を G の主系列表現という. $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ はこの空間にスカラー倍で作用する (Schur の補題) ので, $\chi_{\sigma,\nu} : Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}) \to \mathbf{C}$ という algebra homomorphism を得る. これを $\pi_{\sigma,\nu}$ の無限小指標 (infinitesimal character) という. $\chi_{\sigma,\nu}(C) = \nu^2 - 1$ となることがわかるので, $\Delta_k F = \frac{1-\nu^2}{4}F \Leftrightarrow Cf_F = \chi_{\sigma,\nu}(C)f_F$ となる. 以上のことを踏まえて, G 上の Maass form を次のように定義する.

Definition 1.4 $f \in C^\infty(G, \mathbf{C})$ が, 重さ $\rho \in \widehat{K}$ の Maass form であるとは次を満たすこと.

(i) $f(\gamma gk) = \rho(k^{-1})f(g) \quad \forall\gamma \in \Gamma, \forall g \in G, \forall k \in K$,

(ii) $Cf = \chi_{\sigma,\nu}(C)f$,

(iii) f は緩増加, すなわちある $c > 0$ と $N \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ が存在して $|f(g)| \leq c|\mathrm{tr}({}^t gg)|^N$, $g \in G$.

(1.4) $SL(2,\mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数 再び Maass form f の Fourier 展開を考える. η を G の極大ベキ単部分群 N の既約ユニタリ表現とする. 今の場合 N はアーベル群だから η は指標になり, ある定数 $c \in \mathbf{R}$ を用いて

$$\eta(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \exp(2\pi\sqrt{-1}cx)$$

と書ける.

$$a_\eta^f(g) := \int_{\Gamma\cap N\backslash N} f(ng)\eta(n)^{-1}dn$$

(η に対する Fourier 係数) とおくと, Fourier 展開

$$f(ng) = \sum_{\eta\in\widehat{N},\, \eta|_\Gamma\equiv 1} a_\eta^f(g)\eta(n)$$

を得る. Fourier 係数 a_η^f は次の性質を満たす.

(i) $a_\eta^f(ng) = \eta(n)a_\eta^f(g) \quad \forall n \in N, \forall g \in G$,

(ii) $a_\eta^f(g\kappa_\theta) = \rho(\kappa_\theta)^{-1}a_\eta^f(g)(= e^{\sqrt{-1}k\theta}a_\eta^f(g)) \quad \forall\kappa_\theta \in K, \forall g \in G$,

(iii) $Ca_\eta^f = \chi_{\sigma,\nu}(C)a_\eta^f$,

(iv) 緩増加.

(i), (ii) および Iwasawa 分解 $G = NAK$ から a_η^f は A への制限で決まり, (iii) から (1.2) で述べたものと同様の微分方程式を満たし,

$$a_\eta^f(g) = a_\eta^f \cdot e^{2\pi\sqrt{-1}cx}e^{\sqrt{-1}k\theta}W_{\frac{k}{2},\frac{\nu}{2}}(4\pi|c|y)$$

となり, Fourier 展開を得る. 上の (i)-(iv) を満たす G 上の C^∞ 関数を G 上の (主系列)Whittaker 関数という.

§2. $Sp(2, \mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数

(2.1) $Sp(2, \mathbf{R})$ の構造 以下 G を実２次シンプレクティック群とする:

$$G = Sp(2, \mathbf{R}) = \left\{ g \in SL(4, \mathbf{R}) \,\middle|\, {}^t g J_2 g = J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

G の極大コンパクト部分群は

$$K = \left\{ k(A, B) = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in G \,\middle|\, A, B \in M(2, \mathbf{R}) \right\}$$

で与えられ, $K \ni k(A, B) \mapsto A + \sqrt{-1}B \in U(2)$ によって, ユニタリ群 $U(2)$ に同型になる. $GL(2, \mathbf{C})$ の有限次元既約表現 $\tau_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ を $\tau_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \mathrm{Sym}^{\lambda_1 - \lambda_2} \otimes \det^{\lambda_2}$ によって定義し $(\dim \tau_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \lambda_1 - \lambda_2 + 1)$, $K \cong U(2) \hookrightarrow GL(2, \mathbf{C})$ によって対応する K の表現も $\tau_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ と書くと,

$$\widehat{K} = \{ \tau_{(\lambda_1, \lambda_2)} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{Z},\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \}.$$

G の極大ベキ単部分群は

$$N = \left\{ n(n_0, n_1, n_2, n_3) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & n_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -n_0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & n_1 & n_2 \\ & 1 & n_2 & n_3 \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array} \right) \,\middle|\, n_i \in \mathbf{R} \right\}.$$

であって, N のユニタリ指標 η(１次元でない既約表現も存在するが, ここでは指標の場合のみを考える) は, 実数 c_0, c_3 を用いて

$$\eta(n(n_0, n_1, n_2, n_3)) = \exp\{2\pi\sqrt{-1}(c_0 n_0 + c_3 n_3)\}$$

と書かれる. 本稿では η が非退化である, すなわち $c_0 c_3 \neq 0$ と仮定する. G の極大トーラスは

$$A = \{ a(a_1, a_2) = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}) \mid a_i > 0 \}.$$

であって, $SL(2, \mathbf{R})$ のときと同様に Iwasawa 分解 $G = NAK$ を得る.

(2.2) 主系列表現 $P_0 = MAN$ を G の標準的極小放物部分群の Langlands 分解とする. ただし $M = \{ \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid \varepsilon_i \in \{\pm 1\} \}$. $\sigma : M \to \{\pm 1\}$ を M の指標とする. $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathfrak{a}^* \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong \mathbf{C}^2$ $(\mathfrak{a} = \mathrm{Lie}(A))$ に対して, $e^\nu : A \to \mathbf{C}^{(1)}$ を $e^\nu(a(a_1, a_2)) = \exp(\nu_1(\log a_1) + \nu_2(\log a_2))$ で定める. $\rho = (2, 1)$ を制限正ルートの半分和とする. このとき誘導表現

$$\pi_{\sigma, \nu} := L^2\text{-}\mathrm{Ind}_{P_0}^G (\sigma \otimes e^{\nu + \rho} \otimes 1_N)$$

を G の主系列表現という. $\pi_{\sigma, \nu}$ の K-type ($\pi_{\sigma, \nu}|_K$ に現れる K の既約表現) は σ で決まる:

Lemma 2.1 ([8, Proposition 3.2]) $\gamma_1 = \mathrm{diag}(-1, 1, -1, 1)$, $\gamma_2 = \mathrm{diag}(1, -1, 1, -1)$ とする.

(a) (i) $\sigma(\gamma_1) = \sigma(\gamma_2) = 1$ のとき $\tau_{(\lambda, \lambda)}$ (λ は偶数) は $\pi_{\sigma, \nu}$ に重複度 1 で現れる.

(ii) $\sigma(\gamma_1) = \sigma(\gamma_2) = -1$ のとき $\tau_{(\lambda, \lambda)}$ (λ は奇数) は $\pi_{\sigma, \nu}$ に重複度 1 で現れる.

(b) $\sigma(\gamma_1) = -\sigma(\gamma_2)$ のとき $\tau_{(\lambda+1, \lambda)}$ は $\pi_{\sigma, \nu}$ に重複度 1 で現れる.

Remark $\pi_{\sigma,\nu}$ の極小 K-type は, (a)(i) : $\tau_{(0,0)}$, (a)(ii) : $\tau_{(\pm1,\pm1)}$, (b) : $\tau_{(1,0)}$, $\tau_{(0,-1)}$.

(2.3) Whittaker 関数の定義

Definition 2.2 $(\tau^*, V_{\tau^*}) \in \widehat{K}$ を G の主系列表現 $\pi_{\sigma,\nu}$ の K-type とする (τ^* は τ の反傾表現, V_{τ^*} はその表現空間). G 上の C^∞ 関数 $w = w_{\eta,\tau} : G \to V_\tau$ が K-type τ^* に付随する主系列 Whittaker 関数であるとは以下を満たすこと.

(i) $w(ngk) = \eta(n)\tau(k)^{-1}w(g) \quad \forall(n,g,k) \in N \times G \times K$,

(ii) $Zw = \chi_\nu(Z)w \quad \forall Z \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$.

$\mathrm{Wh}(\pi_{\sigma,\nu};\eta,\tau)$ を K-type τ^* に付随する主系列 Whittaker 関数の空間とし, さらにその中で緩増加となるもの全体を $\mathrm{Wh}(\pi_{\sigma,\nu};\eta,\tau)^{\mathrm{mod}}$ と書く.

Remark $G = SL(2,\mathbf{R})$ のときと同様に, (i) と Iwasawa 分解から $w \in \mathrm{Wh}(\pi_{\sigma,\nu};\eta,\tau)$ は A への制限 $w|_A$ で決まり, これを w の radial part と呼ぶ.

Theorem 2.3 ([3], [2]) $\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Wh}(\pi_{\sigma,\nu};\eta,\tau) = |W|(=8)$ (W は Weyl 群), さらに

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Wh}(\pi_{\sigma,\nu};\eta,\tau)^{\mathrm{mod}} \le 1,$$

で, その唯一の元は (定数倍を除いて)Jacquet 積分で書かれる:

$$W^\tau_{\eta,\sigma,\nu}(g) = \int_N a(s_0^{-1}ng)^{\nu+\rho}\eta(n)^{-1}\tau(k(s_0^{-1}ng))dn.$$

ここで, $s_0 \in W$ は最長元 (今の場合 J_2), $g = n(g)a(g)k(g)$ は g の Iwasawa 分解.

(2.4) Whittaker 関数の満たす偏微分方程式系 $G = Sp(2,\mathbf{R})$ の場合, $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}) \cong \mathbf{C}[C_2, C_4]$ で, その生成元 C_2, C_4 はそれぞれ 2 次 (Casimir 元), 4 次の元である. C_2, C_4 は共に Shift 作用素と言われる微分作用素の合成で記述される. これは Whittaker 関数の K-type のパラメータを動かすもので, 1 変数の場合の Maass 作用素の拡張とみなせる. Miyazaki-Oda([8]) はこの Shift 作用素を具体的に計算して Whittaker 関数の満たすべき偏微分方程式系を得た. 以下簡単のために, $c_0 = c_3 = 1$ とする (この仮定は一般性を失わない).

Theorem 2.4 ([8, Theorem 10.1]) $\sigma(\gamma_1) = \sigma(\gamma_2)$ とする. $\phi(a)$ を 1 次元 K-type $\tau_{(\lambda,\lambda)}$ に付随する主系列 Whittaker 関数の radial part とする. $y = (y_1, y_2) = (a_1/a_2, a_2^2)$, $\phi(y) = y_1^2 y_2^{3/2}\psi(y)$ とおき, $\partial_i = y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ $(i = 1,2)$ という記号を用いると

(i) $[\partial_1^2 + 2\partial_2^2 - 2\partial_1\partial_2 - (2\pi y_1)^2 - 2(2\pi y_2)^2 + 2\lambda(2\pi y_2)]\psi(y) = \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2)\psi(y)$,

(ii)
$$\begin{aligned}&[(\partial_1 + \lambda - 1)(\partial_1 - \lambda + 1)(\partial_1 - 2\partial_2 + \lambda - 1)(\partial_1 - 2\partial_2 - \lambda + 1)\\ &+(2\pi y_1)^4 - 2(2\pi y_1)^2\{(\partial_1 + 1)(\partial_1 - 2\partial_2 + 1) - \lambda(\lambda - 2)\}\\ &-4\lambda(2\pi y_1)^2(2\pi y_2) - 4(2\pi y_2)(2\pi y_2 - \lambda)(\partial_1 + \lambda - 1)(\partial_1 - \lambda + 1)]\psi(y)\\ &= \{\nu_1^2 - (\lambda - 1)^2\}\{\nu_2^2 - (\lambda - 1)^2\}]\psi(y).\end{aligned}$$

Remark $\sigma(\gamma_1) = -\sigma(\gamma_2)$ の場合の微分方程式は, [8, Theorem 11.3] を参照.

§3. Whittaker 関数の明示公式

§2 に続き $\sigma(\gamma_1) = \sigma(\gamma_2)$ の場合のみを扱う. この場合 Shift 作用素によって, Whittaker 関数の K-type のパラメータを $(\lambda,\lambda) \mapsto (\lambda \pm 2, \lambda \pm 2)$ と動かすことができるので $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \pm1$ の場合, すなわち極小 K-type の場合のみを考えれば十分であることがわかる.

(3.1) M**-Whittaker 関数** Theorem 2.4 の微分方程式系の確定特異点 $y_1 = y_2 = 0$ の周りでの解を考える.

$$\psi(y) = \sum_{m,n\geq 0} a_{m,n}(2\pi y_1)^{m+\tau_1}(2\pi y_2)^{n+\tau_2}$$

とおくと, 特性根は

$$\begin{aligned}(\tau_1, \tau_2) &= \{w(\nu_1, \tfrac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)) \mid w \in W \cong \mathfrak{S}_2 \ltimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2\} \\ &= \{(\varepsilon_1\nu_1, \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1\nu_1+\varepsilon_2\nu_2)), (\varepsilon_2\nu_2, \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1\nu_1+\varepsilon_2\nu_2)) \mid \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}\}.\end{aligned}$$

となる. $\lambda = 0, \pm 1$ のときに微分方程式系から決まる $a_{m,n}$ の間の差分方程式を解いて, 次を得る. まず一般超幾何級数を次のように書く:

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q\end{matrix} \,\middle|\, z\right) := \sum_{n\geq 0} \frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n}\frac{z^n}{n!}$$

Theorem 3.1 ($\lambda = 0$) $\nu_1, \nu_2, \nu_1 \pm \nu_2 \notin \mathbf{Z}$ とする.

$$\psi_\nu^0(y) = y_1^{\nu_1} y_2^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} \sum_{m,n\geq 0} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n,\ -m-\frac{\nu_1}{2},\ m+\frac{\nu_1}{2}+1 \\ \frac{\nu_1}{2}+1,\ \frac{\nu_2}{2}+1\end{matrix} \,\middle|\, 1\right) \frac{(\pi y_1)^{2m}(\pi y_2)^{2n}}{m!\,n!\,(\frac{\nu_1-\nu_2}{2}+1)_m(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}+1)_n}$$

とおくと, $\{\psi_{w(\nu)}^0(y) \mid w \in W\}$ は Theorem 2.4 ($\lambda = 0$) の解空間の基底をなす.

Theorem 3.2 ($\lambda = \pm 1$) $\nu_1, \nu_2, \nu_1 \pm \nu_2 \notin \mathbf{Z}$ とする.

$$\psi_\nu^\varepsilon(y) = y_1^{\nu_1} y_2^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} \sum_{m,n\geq 0} (p_{m,n} + \varepsilon q_{m,n}(\pi y_2)) \frac{(\pi y_1)^{2m}(\pi y_2)^{2n}}{m!\,n!\,(\frac{\nu_1-\nu_2}{2}+1)_m(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}+1)_n}$$

とおく. ここで,

$$\begin{aligned} p_{m,n} &= {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n,\ m+\frac{\nu_1+1}{2},\ -m-\frac{\nu_1+1}{2} \\ \frac{\nu_1+1}{2},\ \frac{\nu_2+1}{2}\end{matrix} \,\middle|\, 1\right), \\ q_{m,n} &= -\frac{2(2m+\nu_1+1)}{(\nu_1+1)(\nu_2+1)}\, {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n,\ m+\frac{\nu_1+3}{2},\ -m-\frac{\nu_1-1}{2} \\ \frac{\nu_1+3}{2},\ \frac{\nu_2+3}{2}\end{matrix} \,\middle|\, 1\right).\end{aligned}$$

すると $\{\psi_{w(\nu)}^\varepsilon(y) \mid w \in W\}$ は, Theorem 2.4 ($\lambda = \varepsilon \in \{\pm 1\}$) の解空間の基底をなす.

Remark ここに出てくる一般超幾何級数 ${}_3F_2(1)$ はいずれも terminating であるが, Γ 関数の商にはならない. 同じ階数が 2 の群でも $SL(3, \mathbf{R})$ の場合には, もっと簡単で Γ 関数の商になる ([1], [10], [6]).

(3.2) W**-Whittaker 関数** $\lambda = 0, \pm 1$ の場合に Jacquet 積分の radial part $W_\nu^\lambda(a) = W_{\eta,\sigma,\nu}^{\tau(\lambda,\lambda)}(a)$ を具体的に書き下すと以下のようになる:

$$\begin{aligned} W_\nu^0(a) &= (a_1a_2)^{\nu_1+2}\int_{\mathbf{R}^4} \Delta_1^{-\nu_1+\nu_2-1}\Delta_2^{-\nu_2-1}\exp(-2\pi\sqrt{-1}(c_0n_0+c_3n_3))dn_0dn_1dn_2dn_3, \\ W_\nu^1(a) + W_\nu^{-1}(a) &= 2(a_1a_2)^{\nu_1+2}\int_{\mathbf{R}^4} \Delta_1^{-\nu_1+\nu_2-1}\Delta_2^{-\nu_2-2}(n_1n_3 - n_2^2 - a_1^2a_2^2) \\ &\qquad \cdot\exp(-2\pi\sqrt{-1}(c_0n_0+c_3n_3))dn_0dn_1dn_2dn_3, \\ W_\nu^1(a) - W_\nu^{-1}(a) &= -2\sqrt{-1}(a_1a_2)^{\nu_1+2}\int_{\mathbf{R}^4} \Delta_1^{-\nu_1+\nu_2-1}\Delta_2^{-\nu_2-2}(a_1^2n_3 + a_2^2n_1)\end{aligned}$$

$$\cdot \exp(-2\pi\sqrt{-1}(c_0 n_0 + c_3 n_3)) dn_0 dn_1 dn_2 dn_3.$$

ここで,

$$\Delta_1 = \{a_1^4 a_2^2 + a_1^2 a_2^4 n_0^2 + a_1^2(n_2 + n_0 n_3)^2 + a_2^2(n_1 + n_0 n_2)^2\}^{1/2},$$
$$\Delta_2 = \{a_1^4 a_2^4 + a_1^4 n_3^2 + 2a_1^2 a_2^2 n_2^2 + a_2^4 n_1^2 + (n_2^2 - n_1 n_3)^2\}^{1/2}.$$

$G = Sp(2, \mathbf{C})$ の場合に Proskurin ([9, pp.162-166]) はクラス 1 Whittaker 関数 (σ が trivial な場合の極小 K-type に付随する Whittaker 関数で, 上の W_ν^0 に相当) の Jacquet 積分を変形し, その積分表示を得ている. 今の場合もそれとほぼ同様の計算をすることで以下の明示形を得ることができる.

Theorem 3.3 $c_0 = c_3 = 1$ とする.

$$W_\nu^0(y) = \frac{4\pi^{\frac{3\nu_1}{2}+\frac{\nu_2}{2}+2}}{\Gamma(\frac{\nu_1+1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2+1}{2})\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2+1}{2})\Gamma(\frac{\nu_1-\nu_2+1}{2})} y_1^{2+\nu_1/2} y_2^{(3-\nu_1)/2}$$
$$\cdot \int_0^\infty\int_0^\infty K_{\nu_1/2}(2\pi y_1\sqrt{1+x+y}) K_{\nu_2/2}(2\pi y_2\sqrt{(1+1/x)(1+1/y)})$$
$$\cdot \Big(\frac{x^2y^2}{1+x+y}\Big)^{\nu_1/4}\Big(\frac{x(1+x)}{y(1+y)}\Big)^{\nu_2/4}\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}$$

Theorem 3.4 $c_0 = c_3 = 1$ とする.

$$W_\nu^\varepsilon(y) = \frac{4\pi^{\frac{3\nu_1}{2}+\frac{\nu_2}{2}+3}}{\Gamma(\frac{\nu_1+2}{2})\Gamma(\frac{\nu_2+2}{2})\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2+1}{2})\Gamma(\frac{\nu_1-\nu_2+1}{2})} y_1^{(5+\nu_1)/2} y_2^{2-\nu_1/2}$$
$$\cdot \Big[\int_0^\infty\int_0^\infty K_{(\nu_1-1)/2}(2\pi y_1\sqrt{1+x+y}) K_{(\nu_2+1)/2}(2\pi y_2\sqrt{(1+1/x)(1+1/y)})$$
$$\cdot \Big(\frac{x^2y^2}{1+x+y}\Big)^{\nu_1/4}\Big(\frac{x(1+x)}{y(1+y)}\Big)^{\nu_2/4}\Big(\frac{y(1+x)}{x(1+y)}(1+x+y)\Big)^{1/4}\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}$$
$$+\varepsilon\int_0^\infty\int_0^\infty K_{(\nu_1-1)/2}(2\pi y_1\sqrt{1+x+y}) K_{(\nu_2-1)/2}(2\pi y_2\sqrt{(1+1/x)(1+1/y)})$$
$$\cdot \Big(\frac{x^2y^2}{1+x+y}\Big)^{\nu_1/4}\Big(\frac{x(1+x)}{y(1+y)}\Big)^{\nu_2/4}\Big(\frac{x(1+y)}{y(1+x)}(1+x+y)\Big)^{1/4}\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}\Big]$$

Remark Niwa ([7]) では Weil 表現を用いて, $SO(2,2)$ の Whittaker 関数から $Sp(2,\mathbf{R})$ の Whittaker 関数を構成し, Theorem 3.3 と同様の式を得ている (cf. [5]).

(3.3) M-Whittaker 関数と W-Whittaker 関数の関係式 W-Whittaker 関数を M-Whittaker 関数の線形結合で表す式は [3], [2] によって与えられているが, ここでは (3.1), (3.2) で得た明示公式を用いより初等的な方法で求める (cf. [10]). まず $W_\nu^*(y)$ の Mellin 変換を計算し, その Mellin-Barnes 型積分表示を求める.

Proposition 3.5

$$W_\nu^0(y) = \frac{4\pi^{\frac{3\nu_1}{2}+\frac{\nu_2}{2}+2}}{\Gamma(\frac{\nu_1+1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2+1}{2})\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2+1}{2})\Gamma(\frac{\nu_1-\nu_2+1}{2})}$$
$$\cdot\frac{y_1^2 y_2^{3/2}}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{\sigma_1-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma_1+\sqrt{-1}\infty}\int_{\sigma_2-\sqrt{-1}\infty}^{\sigma_2+\sqrt{-1}\infty} V_\nu^0(s)(\pi y_1)^{-s_1}(\pi y_2)^{-s_2} ds_1 ds_2.$$

$$\begin{aligned}
V_\nu^0(s) &= 2^{-4}\Gamma(\frac{s_1}{2})\Gamma(\frac{s_1+\nu_1}{2})\Gamma(\frac{s_1+\nu_2}{2})\Gamma(\frac{s_1-\nu_2}{2})\\
&\quad\cdot\Gamma(\frac{s_2}{2}+\frac{\nu_1+\nu_2}{4})\Gamma(\frac{s_2}{2}-\frac{\nu_1+\nu_2}{4})\Gamma(\frac{s_2}{2}+\frac{\nu_1-\nu_2}{4})\Gamma(\frac{s_2}{2}-\frac{\nu_1-\nu_2}{4})\\
&\quad\cdot\Big(\Gamma(\frac{s_1+s_2}{2}+\frac{\nu_1+\nu_2}{4})\Gamma(\frac{s_1+s_2}{2}+\frac{\nu_1-\nu_2}{4})\Big)^{-1}\\
&\quad\cdot{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{s_1+\nu_1}{2},\ \frac{s_2}{2}+\frac{\nu_1+\nu_2}{4},\ \frac{s_2}{2}+\frac{\nu_1-\nu_2}{4}\\ \frac{s_1+s_2}{2}+\frac{\nu_1+\nu_2}{4},\ \frac{s_1+s_2}{2}+\frac{\nu_1-\nu_2}{4}\end{matrix}\,\middle|\,1\right)\\
&= 2^{-4}\Gamma(\frac{s_1+\nu_1}{2})\Gamma(\frac{s_1-\nu_1}{2})\Gamma(\frac{s_1+\nu_2}{2})\Gamma(\frac{s_1-\nu_2}{2})\\
&\quad\cdot\Gamma(\frac{s_2}{2}+\frac{\nu_1+\nu_2}{4})\Gamma(\frac{s_2}{2}-\frac{\nu_1+\nu_2}{4})\Gamma(\frac{s_2}{2}+\frac{\nu_1-\nu_2}{4})\Gamma(\frac{s_2}{2}-\frac{\nu_1-\nu_2}{4})\\
&\quad\cdot\Big(\Gamma(\frac{s_1+s_2}{2}+\frac{\nu_1+\nu_2}{4})\Gamma(\frac{s_1+s_2}{2}-\frac{\nu_1+\nu_2}{4})\Big)^{-1}\\
&\quad\cdot{}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{s_1}{2},\ \frac{s_2}{2}+\frac{\nu_1-\nu_2}{4},\ \frac{s_2}{2}-\frac{\nu_1-\nu_2}{4}\\ \frac{s_1+s_2}{2}+\frac{\nu_1+\nu_2}{4},\ \frac{s_1+s_2}{2}-\frac{\nu_1+\nu_2}{4}\end{matrix}\,\middle|\,1\right).
\end{aligned}$$

また σ_1, σ_2 は, 積分路が $V_\nu^0(s)$ のすべての極の右側になるようにとる.

Remark 上の V_ν^0 の形から, W_ν^0 の Weyl 群の作用による対称性がわかる, すなわち定数倍を除いて $W_{w(\nu)}^0(y) = W_\nu^0(y)$ $(\forall w \in W)$.

積分路を左に動かし, $V_\nu^0(s)$ の極での留数を足し合わせて次の定理を得る.

Theorem 3.6 $M_\nu^0(y) = y_1^2 y_2^{3/2}\psi_\nu^0(y)$ とおくと,

$$\begin{aligned}
W_\nu^0(y) &= \frac{\pi^{\frac{3\nu_1}{2}+\frac{\nu_2}{2}+2}}{4\Gamma(\frac{\nu_1+1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2+1}{2})\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2+1}{2})\Gamma(\frac{\nu_1-\nu_2+1}{2})}\\
&\quad\cdot\sum_{w\in W} w\Big(\Gamma(-\frac{\nu_1}{2})\Gamma(-\frac{\nu_2}{2})\Gamma(-\frac{\nu_1+\nu_2}{2})\Gamma(-\frac{\nu_1-\nu_2}{2})\Big)M_{w(\nu)}^0(y).
\end{aligned}$$

$\lambda = \pm 1$ の場合にも同様にして以下を得る.

Theorem 3.7 $M_\nu^\varepsilon(y) = y_1^2 y_2^{3/2}\psi_\nu^\varepsilon(y)$ とおくと,

$$\begin{aligned}
W_\nu^\varepsilon(y) &= \frac{\pi^{\frac{3\nu_1}{2}+\frac{\nu_2}{2}+3}}{4\Gamma(\frac{\nu_1+2}{2})\Gamma(\frac{\nu_2+2}{2})\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2+1}{2})\Gamma(\frac{\nu_1-\nu_2+1}{2})}\\
&\quad\cdot\sum_{w\in W} \varepsilon^{\rho(w)} w\Big(\Gamma(-\frac{\nu_1-1}{2})\Gamma(-\frac{\nu_2-1}{2})\Gamma(-\frac{\nu_1+\nu_2}{2})\Gamma(-\frac{\nu_1-\nu_2}{2})\Big)M_{w(\nu)}^\varepsilon(y).
\end{aligned}$$

ここで, $\rho(w) = w(\nu_1)w(\nu_2)/(\nu_1\nu_2) \in \{\pm 1\}$.

References

[1] D. Bump, Automorphic Forms on $GL(3,\mathbf{R})$, Lect. Notes in Math. **1083**, (1984).

[2] R. Goodman and N. R. Wallach, Whittaker vectors and canonical vectors, J. Funct. Anal. **39** (1980), 199-279.

[3] M. Hashizume, Whittaker functions on semisimple Lie groups, Hiroshima Math. J. **12** (1982), 259-293.

[4] T. Ishii, On principal series Whittaker functions on $Sp(2, \mathbf{R})$, (2002), preprint.

[5] ———, Symplectic-orthogonal theta lifts and Whittaker functions, in preparation.

[6] H. Manabe, T. Ishii and T. Oda, Principal series Whittaker functions on $SL(3, \mathbf{R})$, (2002), preprint.

[7] S. Niwa, Commutation relations of differential operators and Whittaker functions on $Sp_2(\mathbf{R})$, Proc. Japan Acad. **71** Ser A. (1995), 189-191.

[8] T. Miyazaki and T. Oda, Principal series Whittaker functions on $Sp(2, \mathbf{R})$, – Explicit formulae of differential equations–, Proc. of the 1993 Workshop, Automorphic Forms and Related Topics, The Pyungsan Institute for Math. Sci., 59-92.

[9] N. Proskurin, Cubic Metaplectic Forms and Theta Functions, Lect. Notes in Math. **1677** (1998).

[10] E. Stade, Poincaré Series For $GL(3, \mathbf{R})$-Whittaker Functions, Duke Math. J. **58**, No.3 (1989), 695-729.

[11] E.T. Whittaker and G.N. Watson, A course of modern analysis, the 4-th edition, Cambridge University Press, 1927.