数理解析研究所講究録 1319 巻 2003 年 75-84

On mean values of error terms related with lattice points in hyperbolic domains

名古屋大学多元数理　古屋 淳 (Jun Furuya)
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1　序

$d(n)$ を約数関数とし, $\Delta(x)$ を次で定義される誤差項とする:

$$\Delta(x)=\sum_{n\leq x}d(n)-x(\log x+2\gamma-1). \tag{1.1}$$

ここで γ は Euler 定数である. Dirichlet の約数問題とは, この誤差項 $\Delta(x)$ の最良評価を求める問題である. 歴史的には, Dirichlet 自身により $\Delta(x)=O(x^{1/2})$ がまず最初に得られ, その後いくつもの改良を重ね, 例えば評価

$$\Delta(x)=O\bigl(x^{23/73}(\log x)^{461/146}\bigr) \tag{1.2}$$

が知られている. この評価は Huxley [2] によって得られたものである. また, $\Delta(x)$ の平均値定理については, 例えば以下のような漸近公式が知られている:

$$\int_{1}^{x}\Delta(u)du=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^{2}}x^{3/4}\sum_{n=1}^{\infty}d(n)n^{-5/4}\cos\left(4\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{1/4}), \tag{1.3}$$

$$\int_{1}^{x}\Delta(u)^{2}du=\Bigl(\frac{1}{6\pi^{2}}\sum_{n=1}^{\infty}d(n)^{2}n^{-3/2}\Bigr)x^{3/2}+O(x\log^{4}x). \tag{1.4}$$

これらの平均値の研究には「予想 $\Delta(x)=O(x^{1/4+\varepsilon})$ (ε は十分小さい任意の正の実数) の根拠を与える」ということと共に「振動関数 $\Delta(x)$ の挙動を平均的に考察する」という意味も含まれている.

ここでは $\Delta(x)$ の平均値定理として上で取り扱ったものとは違う種類のものとして

$$\sum_{n\leq x}\Delta(n)^{k}$$

のタイプの平均値定理を考えていくことにする. ここで x は $x>0$ である実数, k は (固定された) 任意の自然数とする. $k=1$ について, Voronoï は

$$\sum_{n\leq x}\Delta(n)=\frac{1}{2}x\log x+(\gamma-\frac{1}{2})x+O(x^{3/4})$$

を証明した．この式を見ると，$\Delta(n)$ の average order は (1.3) 式というよりはむしろ (1.1) 式に似ているといえる．すなわち「$\sum_{n\le x}\Delta(n)$ と $\int_1^x \Delta(u)du$ がほぼ同じである」とは言えないことになる．$k=2$ の場合についてはHardy [1] は，$\sum_{n\le x}\Delta(n)^2$ と $\int_1^x \Delta(u)^2 du$ の間の関係として次の式を証明した:

$$\sum_{n\le x}\Delta(n)^2=\int_1^x \Delta(u)^2du+O(x^{1+\varepsilon}). \tag{1.5}$$

この式と (1.4) 式より，$\sum_{n\le x}\Delta(n)^2$ と $\int_1^x \Delta(x)^2dx$ は同じ order $(=x^{3/2})$ を持っていることが分かる．すなわち $k=2$ の場合は，$k=1$ の場合とは異なり離散型平均と連続型平均の挙動は「同じものである」と言っても良いことになる．

ここで，まず (1.5) 式の誤差項の挙動についてさらに詳しく見ることにする．すると以下の theorem を証明することができる:

Theorem 1. $\Delta(x)$ を (1.1) 式で定義される誤差項とする．このとき $x\ge 2$ に対して

$$\sum_{n\le x}\Delta(n)^2=\int_1^x \Delta(u)^2du+\frac{1}{6}x\log^2 x+c_1x\log x+c_2x+\left\{\begin{array}{c}O\\ \Omega_\pm\end{array}\right\}(x^{3/4}\log x)$$

が成立する．ここで係数 c_j は $c_1=(8\gamma-1)/12$, $c_2=(8\gamma^2-2\gamma+1)/12$ とする．

次に，$\Delta(x)^k$ $(k\ge 3)$ の離散型平均と連続型平均の差について考えていく．例えば，

$$\sum_{n\le x}\Delta(n)^k=\int_1^x \Delta(u)^kdu+O(x^{(k+3)/4+\varepsilon})\qquad (3\le k\le 9)$$

となることが容易に分かるが，$k=3$ については上式の誤差項は更に精密なものに置き換えることができる．すなわち:

Theorem 2. $x\ge 2$ に対して

$$\sum_{n\le x}\Delta(n)^3=\int_1^x \Delta(u)^3du+c_3x^{3/2}\log x+O(x^{3/2})$$

となる．ここで c_3 はある定数である．

約数問題では，(1.1) 式の代わりに，次の式で定義される誤差項 $\widetilde{\Delta}(x)$ を $\Delta(x)$ の定義として用いることがある:

$$\widetilde{\Delta}(x)={\sum_{n\le x}}' d(n)-x(\log x+2\gamma-1)-\frac{1}{4}. \tag{1.6}$$

ここで記号 $\sum'_{n\le x}$ は x が整数のときは $d(x)$ を $d(x)/2$ にすることを示す記号である．$\widetilde{\Delta}(x)$ が (1.2) 式のような評価を持つことは $d(n)\ll n^\varepsilon$ より明らかである．また平均値定理に関しては

$$\int_1^x \widetilde{\Delta}(u)du=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}x^{3/4}\sum_{n=1}^{\infty}d(n)n^{-5/4}\cos\left(4\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{1/4})$$

がわかる. $\int_1^x \widetilde{\Delta}(u)^2du$ については (1.4) 式と同じ漸近公式が成立することもわかる.

ここで, $\widetilde{\Delta}(n)^k$ の average order を $k=1,2$ の場合について考えてみると, 以下の theorem を得ることができる.

Theorem 1′. $x \geq 2$ に対して

$$\sum_{n\leq x}\widetilde{\Delta}(n) = \left\{\begin{array}{c} O \\ \Omega_{\pm} \end{array}\right\}(x^{3/4}),$$

$$\sum_{n\leq x}\widetilde{\Delta}(n)^2 = \int_1^x \Delta(u)^2du - \frac{1}{4\pi^2}x\log^3 x + c_4 x\log^2 x + c_5 x\log x + c_6 x$$
$$+ \left\{\begin{array}{c} O \\ \Omega_{\pm} \end{array}\right\}(x^{3/4}\log x)$$

が成立する.

従って, この theorem より, $\sum_{n\leq x}\Delta(n)$ と $\sum_{n\leq x}\widetilde{\Delta}(n)$ の間の関係は $\int_1^x \Delta(u)du$ と $\int_1^x \widetilde{\Delta}(u)du$ のそれと非常に似ていることがわかる. また, $\sum_{n\leq x}\widetilde{\Delta}(n)^2$ と $\sum_{n\leq x}\Delta(n)^2$ の挙動は同じものであるがこれらの average order のそれぞれと $\int_1^x \Delta(u)^2du$ との差は全く違うものであるという事が見て取れる.

2 証明の準備

以下, ε は十分小さい任意の正の実数, k は (固定された) 任意の自然数とし, 記号 $O(\ )$, $\Omega_{\pm}$ に含まれる定数は ε, k にのみ依存するものとする. 実数 x に対し, $\psi(x)$ を $\psi(x) = x - [x] - 1/2$ で定義する ($[x]$ は x を越えない最大の整数を表す).

主結果の証明の準備として, まずは, 誤差項の average order に対する恒等式を一般的な設定のもとで考えてみる. $f(n)$ を (任意の) 数論的関数とし, $E(x)$ を

$$E(x) = \sum_{n\leq x} f(n) - g(x), \tag{2.1}$$

で定義する. ここで, $g(x)$ はある関数とする[1]. この関数 $E(x)$ の average order に関する漸近公式は [7, Lemma], [3, Lemma 1] などにおいて, $g(x)$ の微分に関する種々の仮定の下で得られている. ここでは, 一般の k に関する $E(n)^k$ の average order についての恒等式を考えることにする:

Lemma 1. $E(x)$, $g(x)$ を (2.1) 式で定義される関数とし, また $g(x)$ は 1 回連続微分可能であると仮定する. このとき任意の自然数 k に対して

$$\sum_{n\leq x} E(n)^k = (\frac{1}{2} - \psi(x))E^k(x) + \int_1^x E(u)^k du + k\int_1^x (\frac{1}{2} - \psi(u))g'(u)E(u)^{k-1}du$$

が成り立つ.

[1]特に本稿では, $g(x)$ は 1 回連続微分可能としておく.

この lemma は帰納法を用いることで証明することができる.

次に $\Delta(x)$ を ψ-関数の和で書き表すことを考える. 良く知られているように

$$\Delta(x) = -2 \sum_{n \le x^{1/2}} \psi(\frac{x}{n}) + O(1)$$

が成り立つが, この式の誤差項 $O(1)$ は我々の目標に対しては大きすぎる. さらに, Theorem 2 の証明に対してはこの部分の微分に対する漸近公式も用いる必要がある. そこで, 以下の lemma を用いることにする:

Lemma 2. $R(x)$ を

$$\Delta(x) = -2 \sum_{n \le x^{1/2}} \psi(\frac{x}{n}) + R(x)$$

で定義する. このとき

$$R(x) = -4\psi_1(x^{1/2}) + \frac{1}{4} + O(x^{-1/2}), \tag{2.2}$$

$$R'(x) = -2x^{-1/2}\psi(x^{1/2}) + \frac{1}{4}x^{-1} + O(x^{-3/2}) \tag{2.3}$$

となる. ここで $\psi_1(x)$ は $\psi_1(u) = \int_1^u \psi(t)dt$ とする.

この lemma は Euler-Maclaurin の和公式, Dirichlet の "hyperbola method", 及び, 公式 $\psi(u)^2 = 2\psi_1(u) + 1/4$ と

$$\int_1^y \psi_1(u)du = \frac{1}{12}y + O(1) \tag{2.4}$$

を用いることにより容易に証明することができる.

さらなる準備として, ψ-関数を含むいくつかの積分に対する積分公式を考える.

Lemma 3. $y \ge 1$ なる実数 y と自然数 n に対して

$$\int_1^y \psi(u)\psi(\frac{u}{n})du = \frac{1}{12n}y - \frac{1}{6n}\psi(y)^3 + \frac{1}{2}\psi(y)^2\psi(\frac{y}{n}) - \frac{1}{8}\psi(\frac{y}{n}) + \frac{1}{24n}\psi(y) - \frac{1}{12n}$$

が成立する. [2]

[2]実際は, Theorem 1 の証明に対しては Lemma 3 のような明示公式でなく漸近公式

$$\int_1^y \psi(u)\psi(\frac{u}{n})du = \frac{1}{12n}y + O(1) \tag{2.5}$$

を用いれば十分である. しかしながら, Theorem 2 の証明に対して, 特に次の lemma を証明するのに対して, Lemma 3 の明示公式を用いることが必要になる.

Lemma 4. $y \geq 1$ なる実数 y, $n_1 \leq n_2$ なる自然数 n_1, n_2 に対して

$$\int_1^y \psi(u)\psi(\frac{u}{n_1})\psi(\frac{u}{n_2})du = \frac{n_2}{24n_1}\psi(\frac{y}{n_2})^2 - \frac{n_2}{96n_1} + O(1).$$

Lemma 3 は ψ-関数の定義と部分積分により, また Lemma 4 は Lemma 3 と公式

$$\int_1^y u\psi(u)\psi(\frac{u}{n})du = \frac{1}{24n}y^2 - \frac{1}{6n}y\psi(y)^3 + \frac{1}{2}y\psi(y)^2\psi(\frac{y}{n}) - \frac{1}{8}y\psi(\frac{y}{n}) + \frac{1}{24n}y\psi(y)$$
$$+ \frac{1}{12n}\psi(y)^4 - \frac{1}{48}n\psi(\frac{y}{n})^2 + \frac{1}{192}n - \frac{7}{192} - \frac{1}{6}\psi(y)^3\psi(\frac{y}{n})$$
$$+ \frac{1}{24}\psi(y)\psi(\frac{y}{n}) + \frac{1}{16}\psi(\frac{y}{n})^2 - \frac{1}{16n^2} - \frac{1}{24n}\psi(y)^2 + \frac{3}{64n}$$

を用いて証明される.

3 Theorem 1 と Theorem 2 の証明の概略

この章で, Theorem 1 と 2 の証明の概略を述べる. まず Theorem 1 について考える. Lemma 1 において $k=2$, $E(x)=\Delta(x)$ (よって $g(u)=u(\log u + 2\gamma - 1)$ となる) とおく. このとき, 評価 $\Delta(x)=O(x^{1/3})$ を用いると

$$\sum_{n\leq x}\Delta(n)^2 = \int_1^x \Delta(u)^2du - 2\int_1^x \psi(u)(\log u + 2\gamma)\Delta(u)du$$
$$+ \int_1^x (\log u + 2\gamma)\Delta(u)du + O(x^{2/3})$$
$$= \int_1^x \Delta(u)^2du + T_1 + T_2 + O(x^{2/3}),$$

を得る. T_1, T_2 の漸近公式を考える. T_2 については, (1.3) 式と部分積分により

$$T_2 = \frac{1}{4}x(\log x + 2\gamma - 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}x^{3/4}\log x \sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-5/4}\cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$+ O(x^{3/4})$$

を得る. T_1 について, Lemma 2 の式を代入すると

$$T_1 = 4\sum_{n\leq x^{1/2}}\int_{n^2}^x \psi(u)\psi(\frac{u}{n})(\log u + 2\gamma)du + O(x^{1/2}\log x)$$

となる. ここで, 部分積分及び Lemma 3 (正確には, 注 2 の (2.5) 式) より

$$\int_{n^2}^x \psi(u)\psi(\frac{u}{n})(\log u + 2\gamma)du = \frac{1}{12n}x\log x + \frac{1}{12n}(2\gamma - 1)x - \frac{1}{6}n\log n$$
$$- \frac{1}{12}(2\gamma - 1)n + O(\log x)$$

となるので, この式を T_1 の積分部分に代入し, Euler-Maclaurin の和公式を適用すると

$$T_1 = \frac{1}{6}x\log^2 x + \frac{1}{3}(2\gamma-1)x\log x + \frac{1}{3}(2\gamma^2-2\gamma+1)x + O(x^{1/2}\log x)$$

を得る. 従って

$$\sum_{n\le x}\Delta(n)^2 = \int_1^x \Delta(u)^2du + \frac{1}{6}x\log^2 x + c_1 x\log x + c_0 x$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}x^{3/4}\log x\sum_{n=1}^{\infty}d(n)n^{-5/4}\cos\left(4\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right) + O(x^{3/4}),$$

を得る. ここで定数 c_1, c_2 は Theorem 1 中で定義されているものである. この式より Theorem 1 の 誤差項の O-評価は直ちに従う. また, Ω-評価は [4, (1.7) 式] から直ちに導かれる. すなわち, Theorem 1 は証明された.

次に, Theorem 2 の証明について考える. Lemma 1 において, $k=3, E(u)=\Delta(u)$ とおく. このとき, (1.4) 式を利用すると

$$\sum_{n\le x}\Delta(n)^3 = \int_1^x \Delta(u)^3du + U + \frac{3}{2}Cx^{3/2}\log x + O(x^{3/2})$$

が得られる. ここで C は (1.4) 式の主要項の係数であり, また

$$U = -3\int_1^x \psi(u)(\log u + 2\gamma)\Delta(u)^2du$$

である. 以下, この関数の変形を考えていく. Lemma 2 より

$$U = -12\int_1^x \psi(u)(\log u+2\gamma)\sum\sum_{m_1,m_2\le u^{1/2}}\psi(\frac{u}{m_1})\psi(\frac{u}{m_2})du$$
$$+12\sum_{m\le x^{1/2}}\int_{m^2}^x R(u)(\log u+2\gamma)\psi(u)\psi(\frac{u}{m})du + O(x^{1/2}\log x)$$
$$= U_{21} + U_{22} + O(x^{1/2}\log x).$$

関数 U_{22} に対しては, (2.2), (2.3), (2.5) 式と評価 $R(x)=O(1)$ より $U_{22}=O(x\log^2 x)$ が得られる. U_{21} については

$$U_{21} = -\log x\sum_{m\le x^{1/2}}\psi(\frac{x}{m})^2 m\log m + O(x\log^2 x)$$

が Lemma 3, Lemma 4, 公式 $\psi(u)^2 = 2\psi_1(u) + 1/4$ などにより得られる. また

$$\int_1^{x^{1/2}} u^{-2}\psi(\frac{x}{u})\sum_{m\le u} m\log m du = O(\log^2 x)$$

より $U_{21} = O(x\log^3 x)$ となるので Theorem 2 を得ることができる.

4 Theorem $1'$ の証明

まずは (1.6) 式において $x = m \in \mathbb{N}$ とすると

$$\widetilde{\Delta}(m) = \Delta(m) - \frac{1}{2}d(m) - \frac{1}{4} \tag{4.1}$$

がわかる. この式を利用すると

$$\sum_{n\le x}\widetilde{\Delta}(n) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}x^{3/4}\sum_{n=1}^{\infty}d(n)n^{-5/4}\cos\left(4\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right) + O(x^{1/3})$$

を得る. 従ってこの式より $k = 1$ のときの Theorem $1'$ を証明することができる.

$k = 2$ については, まず (4.1) 式より

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\widetilde{\Delta}(n)^2 = &\sum_{n\le x}\Delta(n)^2 + \frac{1}{4}\sum_{n\le x}d(n)^2 - \sum_{n\le x}d(n)\Delta(n) - \frac{1}{2}\sum_{n\le x}\Delta(n)\\ &- \frac{1}{4}x\log x + \frac{1}{16}(5-8\gamma)x + O(x^{1/3})\end{aligned}$$

となることがわかる. この式の右辺第 1, 4 項は Lemma 1 より漸近公式が分かり, 右辺第 2 項は良く知られているように漸近公式として書き下すことができる. 右辺第 3 項について考えると

$$\sum_{n\le x}d(n)\Delta(n) = \frac{1}{2}\sum_{n\le x}d(n)^2 + \int_1^x(\log u + 2\gamma)\Delta(u)du + O(x^{3/2})$$

となり, やはり漸近公式として書き下すことが可能である. (右辺の積分に関しては 3 章で扱っている.) よって $k = 2$ についても Theorem $1'$ の主張は証明することができる. [3]

5 双曲型領域へのある種の応用

Dirichlet の約数問題は双曲領域 $\xi\eta \le x$ における格子点問題に対応している. ここでは, 上述の種々の結果の, 双曲型領域へのある種の応用として 2 種類の応用を考えていくことにする.

---

[3]一般の k について $\sum_{n\le x}\widetilde{\Delta}(n)^k$ を考える. 特に $k = 3$ について考えてみると $\sum_{n\le x}d(n)^2\Delta(n)$ の漸近公式を用いる必要が出てくる. しかしこの和は 2 章 (Lemma 1) のような方法では取り扱うことができないため, $\sum_{n\le x}\widetilde{\Delta}(n)^3$ の漸近公式を得ることができなかった. 同様に一般の k については

$$\sum_{n\le x}d(n)^b\Delta(n)^a$$

$(1\le a\le k-1, 1\le b\le k-a)$ の漸近公式を求めることが必要となる.

5.1 領域 $\xi^2 - \eta^2 \leq x$ への応用

$\rho(n)$ を自然数 n を $n_1^2 - n_2^2 = n$ (ただし, $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$) と書き表す方法の数を示す数論的関数とする. この関数に対して, Sierpiński [8] は

$$\rho(n) = d(n) - 2d(\frac{n}{2}) + 2d(\frac{n}{4})$$

を示した. ここで, $d(x)$ は x が整数のときには約数関数を表し, それ以外のときは 0 を表すものとする. さらに, $\theta(x)$ を $\sum_{n\leq x} \rho(n)$ から生じる誤差項とすると, Sierpiński の恒等式より

$$\theta(x) = \Delta(x) - 2\Delta(\frac{x}{2}) + 2\Delta(\frac{x}{4}) \tag{5.1}$$

となることが分かる. (5.1) 式は, $\theta(x)$ の挙動が $\Delta(x)$ のそれと密接な関係にあることを支持しているものである. 例えば, 上からの評価に関しては (1.2) 式から直ちに

$$\theta(x) = O\big(x^{23/73}(\log x)^{461/135}\big)$$

なるものが得られる事が分かる. また $\theta(x)$ の下からの評価, 特に Ω-結果に対しては Kühleitner [5] [6] により $\Delta(x)$ における結果の類似の結果が証明されている.

$\theta(x)$ の平均値に対しては, 例えば (1.3) 式および (5.1) 式より直ちに

$$\begin{aligned}\int_1^x \theta(u)du = \frac{1}{4}x + \frac{1}{\pi^2}x^{3/4}\sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-5/4}\Big\{\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\big(4\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\big) \\ - \frac{1}{2^{1/4}}\cos\big(2\pi\sqrt{2nx} - \frac{\pi}{4}\big) + \cos\big(2\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\big)\Big\} + O(x^{1/4})\end{aligned} \tag{5.2}$$

となることが見れる. また, Theorem 1 の結果の拡張として次の theorem を得ることができる.

Theorem 3. $x \geq 2$ に対して

$$\sum_{n\leq x} \theta(n)^2 = \int_1^x \theta(u)^2 du + \frac{1}{12}x\log^2 x + c_7 x\log x + c_8 x + O(x^{3/4}\log x)$$

ここで c_j は $c_7 = (20\gamma - 7)/12$, $c_8 = (4\gamma^2 + 2\gamma + 3)/12$ で定義する.

この theorem は Theorem 1 における O-評価と同様に証明することができる. 実際, Lemma 1 を利用すると

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \theta(n)^2 = \int_1^x \theta(u)^2 du + \int_1^x (\log u + 2\gamma)\theta(u)du \\ - 2\int_1^x \psi(u)(\log u + 2\gamma)\theta(u)du + O(x^{2/3})\end{aligned}$$

を得る. 右辺第 2 の積分は (5.2) 式を利用することによって漸近公式を導くことが可能である. また, 右辺第 3 の積分は

$$\int_1^x \psi(u)(\log u + 2\gamma)\Delta(\frac{u}{2^j})du \quad (j = 0, 1, 2)$$

のタイプの積分の計算に帰着されるが, これらの積分は 3 章の手法を適用することによって, やはり漸近公式を導くことができる. 結果,

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\theta(n)^2 = &\int_1^x \theta(u)^2 du + \frac{1}{12}x\log^2 x + \frac{1}{12}(20\gamma - 7)x\log x + \frac{1}{12}(4\gamma^2 + 2\gamma + 3)x \\ &+ \frac{1}{\pi^2}x^{3/4}\log x\sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-5/4}\{\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &- \frac{1}{2^{1/4}}\cos\left(2\pi\sqrt{2nx} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right)\} + O(x^{3/4}) \qquad (5.3)\end{aligned}$$

が得られ, Theorem 3 の証明が終わる. [4]

5.2 双曲領域にわたる平均の取り方における average orders

4 章で $\sum_{n\le x} d(n)\Delta(n)$ に関する公式を用いたが, この式は「ある種の双曲領域をわたる和についての誤差項 $\Delta(x)$ の平均値」というものに, ある意味対応している. それは

$$\sum_{n\le x} d(n)\Delta(n) = \sum_{mn\le x}\Delta(mn)$$

なる関係式から言えることである. ここで, この式の一般化として $\sum_{mn\le x}\Delta(mn)^k$ に対する公式, すなわち $\sum_{n\le x} d(n)\Delta(n)^k$ について考える. しかしながら更に一般的な設定として

$$\sum_{n\le x} f(n)E(n)^k$$

型の和に関する明示公式を考える. これに関して, 以下の公式を導くことができる:

Lemma 5. $E(x), g(x)$ を (2.1) 式で定義される関数とし, また $g(x)$ は 1 回連続微分可能であると仮定する. このとき任意の自然数 k に対して

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} f(n)E(n)^k = &\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\sum_{n\le x} f(n)^{k+1} + \frac{1}{k+1}E(x)^{k+1} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}g(1)^{k+1} \\ &+ \int_1^x g'(u)E(u)^k du + F_k(x)\end{aligned}$$

[4] Theorem 1 の $\Omega_\pm$-評価の類似をこの場合について求めるためには (5.3) 式の無限級数が $\Omega_\pm(1)$ であることを示す必要がある. しかしながら現在のところ, $\Omega_\pm$-評価を与える x の取り方を求めることができていないため, Theorem 1 の $\Omega_\pm$-評価の類似をこの場合に求めることができていない.

が成り立つ．ここで，関数 $F_k(x)$ は $F_1(x)=0$, また $k\geq 2$ に対しては $c_k(2)=k/2$, $c_k(k)=(-1)^k$ $(k\geq 2)$,

$$c_k(a)=\frac{k}{k+1}\{c_{k-1}(a)-c_{k-1}(a-1)\}$$

$(3\leq a\leq k-1,\ k\geq 4)$ と定義した $c_k(a)$ を用いて

$$F_k(x)=\sum_{a=2}^{k}c_k(a)\sum_{n\leq x}f(n)^aE(n)^{k+1-a}$$

と定義されるものである．

この lemma も帰納法を用いることにより容易に証明される．

References

[1] G. H. Hardy, The average order of the function $P(x)$ and $\Delta(x)$, Proc. London Math. Soc. **15** (2) (1916), 192–213.

[2] M. N. Huxley, Exponential sums and lattice points II, Proc. London Math. Soc. **66** (3) (1993), 279–301.

[3] S. Kanemitsu and R. Sita Rama Chandra Rao, On a conjecture of S. Chowla and of S. Chowla and H. Walum, II, J. Number Th. **20** (1985), 103–120.

[4] I. Kiuchi, On the mean-square for the approximate functional equation of the Riemann zeta-function, Tokyo J. Math. **16** (1993), no. 2, 399–409.

[5] M. Kühleitner, An omega theorem on differences of two squares, Acta Math. Univ. Comenianae **61** (1) (1992), 117–123.

[6] M. Kühleitner, An omega theorem on differences of two squares, II, Acta Math. Univ. Comenianae **68** (1) (1999), 27–35.

[7] S. L. Segal, A note on the average order of number-theoretic error terms, Duke Math. J. **32** (1965), 279–284.

[8] W. Sierpiński, Über die Darstellungen ganzer Zahlen als Differenz von zwei Quadraten, Wiadom. Mat. **11** (1907), 89–110.