

## 代数的マルチグリッド法と電磁界解析

京都大学大学院工学研究科 島崎 眞昭 (Masaaki Shimasaki)  
Graduate School of Engineering,  
Kyoto University

京都大学学術情報メディアセンター 岩下 武史 (Takeshi Iwashita)  
Academic Center for Computing and Media Studies,  
Kyoto University

京都大学大学院工学研究科 美船 健 (Takeshi Mifune)  
Graduate School of Engineering,  
Kyoto University

### 1 はじめに

電磁界解析など工学上の問題に関連した偏微分方程式の差分法や有限要素法による解析から派生する大規模疎係数行列の連立一次方程式の反復型解法として、マルチグリッド法、さらに代数的マルチグリッド法が注目され、研究が活発化している [1]。ガウスザイデル法等の定常反復法においては、誤差の空間的高周波成分の収束が速い一方、低周波成分の収束が遅い。そこでマルチグリッド法では、細かいグリッドと粗いグリッドとを用い、細かいグリッドでの誤差の低周波成分が粗いグリッドでは、相対的に高周波成分として表現され、収束が速くなることを利用する。従来からの幾何マルチグリッド法は疎グリッド生成に問題領域固有の幾何情報を用いるが、ソフトウェアのライブラリー化、すなわちブラックボックス化の点で難点がある。もっとも細かいグリッドに関する情報だけで、疎グリッド生成を自動的に行う手法である代数的マルチグリッド法 (AMG 法) はソフトウェアのライブラリー化という点で有用性が高く、研究が盛んに行われている [2],[3]。マルチグリッド法の収束性の点に関しては、対称正定値で  $M$  行列である場合には、AMG 法は確立されているが、実際の有限要素解析ではこの制約に当てはまらない場合も多い。実際係数行列が  $M$  行列である場合、係数行列の非対角要素はすべて 0 または負でなければならない。一方有限要素法から導かれる連立一次方程式の係数行列は正の非対角要素をもち得るので、有限要素法から導かれる連立一次方程式を考える場合には、係数行列として  $M$  行列以外をも対象とする必要がある。Huang[4]、Chang, Wong, Fu[5]等は正の非対角成分を扱うための補間演算子を提案している。美船、岩下、島崎 [6]は対角成分が正の  $H$  行列を係数行列とする場合の補間演算子と AMG 法を提案している。また電磁界解析では通常の節点に未知変数を持たせる節点有限要素法の他、メッシュの辺に未知変数を持たせる辺要素有限要素法が使われ、ベクトルポテンシャルを未知変数にとって係数行列が半正定値行列となる場合、そのままでは、従来の

AMG 法は適用できない。Reitzinger 等 [7] は辺要素有限要素法における AMG 法のために、仮想グリッドの概念を導入し、疎グリッド生成法を与えた。また現れる方程式が半正定値であるため、微少な摂動を与え、正定値問題に変えて解く方法を与えている。我々は AMG を前処理として用い、元の方程式を変更せずに解く方法 [8] を示すほか、AMG 法の適用範囲拡大を試みている [9]。本稿では、1) 対角成分が正の H 行列を係数行列とする連立一次方程式に対する AMG 法、2) 電磁界解析で生じる半正定値係数行列に対する AMG 法の試みについて報告する。

## 2 電磁界解析の基礎方程式

渦電流解析は電気工学における電磁界解析の中で基礎的かつ重要な問題の一つである。

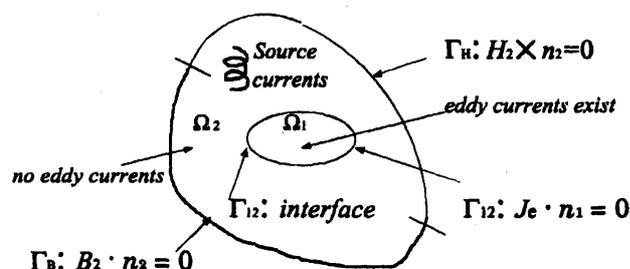


図 2.1: 典型的な渦電流問題における領域および境界

図 2.1 に示すように、解析対象の領域  $\Omega$  は未知の渦電流の存在する領域  $\Omega_1$  と既知の印加電流は存在するかもしれないが、渦電流が存在しない領域  $\Omega_2$  とに分けることができる。領域  $\Omega_1$  と領域  $\Omega_2$  との境界を  $\Gamma_{12}$  とする。領域  $\Omega_i (i = 1, 2)$  における未知磁気ベクトルポテンシャルを  $A_i$  で表し、領域  $\Omega_1$  におけるスカラーポテンシャルを  $\phi$  で表すとする。  $A - \phi$  法と呼ばれる定式化では次の式を基礎とする。

$$\operatorname{curl}\left(\frac{1}{\mu_1} \operatorname{curl} A_1\right) + \sigma\left(\frac{\partial A_1}{\partial t} + \operatorname{grad} \phi\right) = 0, \quad \text{in } \Omega_1 \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div}\left(\sigma \frac{\partial A_1}{\partial t} + \sigma \operatorname{grad} \phi\right) = 0, \quad \text{in } \Omega_1 \quad (2.2)$$

$$\operatorname{curl}\left(\frac{1}{\mu_2} \operatorname{curl} A_2\right) = J_S, \quad \text{in } \Omega_2 \quad (2.3)$$

境界条件は次式で与えられる。

$$\mathbf{n}_2 \cdot \text{curl} \mathbf{A}_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_B \quad (2.4)$$

$$\mathbf{n}_2 \times \frac{1}{\mu_2} \text{curl} \mathbf{A}_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_{H_1}, \quad (2.5)$$

境界  $\Gamma_{12}$  では次式が成立する。

$$\mathbf{n}_1 \cdot \text{curl} \mathbf{A}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \text{curl} \mathbf{A}_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_{12} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{n}_1 \times \frac{1}{\mu_1} \text{curl} \mathbf{A}_1 + \mathbf{n}_2 \times \frac{1}{\mu_2} \text{curl} \mathbf{A}_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_{12} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{J}_e = 0 \quad \text{on } \Gamma_{12} \quad (2.8)$$

ここで  $\mathbf{J}_e$  は渦電流を表し、次式で与えられる。

$$\mathbf{J}_e = -\sigma \left( \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} + \text{grad } \phi \right), \quad (2.9)$$

また領域  $\Omega_2$ ,  $\mathbf{J}_S$  は印加電流で、定数  $\mu_i$  は領域  $\Omega_i$  での透磁率を表し、 $\sigma$  は領域  $\Omega_1$  の導電率を表す。ベクトル  $\mathbf{n}_i$  は領域  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ) の境界における外向き法線ベクトルを表す。実際的には、磁束密度  $B$  の値が重要で、 $B_i = \text{curl} \mathbf{A}_i$  である。また磁界の強さは  $H_i = \frac{1}{\mu_i} B_i$  で与えられる。数値例で扱うように多くの事例でスカラーポテンシャル  $\phi$  についてこれを省略することが出来る。この場合の定式化は  $A$  法と呼ばれる。式 (2.1) における  $A$  と  $\phi$  には「ゲージ」の不定性がある。すなわちポテンシャルを一意的に定めるためには適当なゲージ条件を指定する必要がある。式 (2.1) において、有限要素法および時間領域での陰的な差分近似を用いると連立一次方程式が導かれる。ゲージ条件を指定しない限り、係数行列は特異となる。クーロンゲージ  $\text{div} \mathbf{A} = 0$  は伝統的に用いられるゲージ条件の一つである。クーロンゲージは偏微分方程式の弱形式において拘束条件として用いることができる。別のゲージ条件はメッシュの 'co-tree' の概念に基づき解の唯一性のため変数を消去するように導入されたものである。しかしながら、近年ゲージ条件なしで特異な方程式を解くほうがゲージ条件を付して正則な方程式を解くよりも反復法の収束の速いことが明確になってきた。もっともよく用いられる反復法の一つは ICCG 法である。この場合係数行列が特異であるため、ICCG 法は不完全コレスキー分解の過程で破綻する可能性がある。ICCG 法の破綻を回避する手法は次のとおりである：係数行列の対角要素からなる対角行列を  $D$  とするとき対角成分を  $(1+\alpha)D$  と変更した行列に不完全コレスキー分解を施すものとする。ここで  $\alpha$  は正の微小なパラメータである。ここで注意すべきことは、変更は前処理に限定され、解くべき方程式は元のままで、特異な係数行列の方程式ままであることである。対角要素に微小な摂動を与える考えは、MICCG 法や shifted ICCG 法 [11] からきている。

電磁界解析では、時間領域での解析のほか、定常状態の解析として、周波数領域での解析も重要である。各周波数  $\omega$  の交番的な定常解析を行う場合式 (2.1) のかわりに

$$\text{curl} \left( \frac{1}{\mu_1} \text{curl} \mathbf{A}_1 \right) + \sigma (i\omega \mathbf{A}_1 + \text{grad} \phi) = 0, \quad (2.10)$$

が用いられる。ここで  $i$  は虚数単位で  $i^2 = -1$ 。磁気ベクトルポテンシャル  $A_1$ 、スカラーポテンシャル  $\phi_1$  は複素変数で、有限要素法の弱形式から導かれる連立一次方程式の係数行列は複素対称行列であってエルミート行列ではない。この方程式については ICCG と形式的に同じ形で反復法を導くことができるので (複素) ICCG 法と呼ばれることもあり注意が必要である。

### 3 H 行列を係数行列とする連立一次方程式に対する AMG 法

解くべき連立一次方程式を

$$Ax = b \quad (3.11)$$

とする。ここで、 $A, x, b$  はそれぞれ、 $N \times N$  実係数行列、 $N$  次元解ベクトル、 $N$  次元右辺ベクトルである。行列  $A$  について、 $A = D + E$  とあらわす。ただし、 $D, E$  はそれぞれ、 $A$  の対角部分、および非対角部分である。このとき、 $A$  の比較行列  $\bar{A}$  を

$$\bar{A} = |D| - |E| \quad (3.12)$$

とする。

**定義 1:**  $H$  行列

行列  $A$  の比較行列  $\bar{A}$  が  $M$  行列のとき、 $A$  を  $H$  行列という。

**定理 1:**

対角成分が正である  $N$  次元  $H$  行列を係数行列とする連立一次方程式の求解は、 $2N$  次元  $M$  行列を係数行列とする連立一次方程式の求解に帰着できる [6]。

実際行列  $A$  を対角成分が正である  $H$  行列とする。連立一次方程式

$$Ax = b \quad (3.13)$$

を考える。行列  $A$  を次のように表す。

$$A = D + E_1 + E_2 \quad (3.14)$$

ここで、行列  $E_1, E_2$  はそれぞれ行列  $A$  の非対角成分で負の要素を持つ行列および行列  $A$  の非対角成分で正の要素を持つ行列であり、 $E_1 \leq 0$ 、 $E_2 \geq 0$  とする。また、 $D > 0$  である。

次に、 $c = (b^T, -b^T)^T$  として、次の  $2N$  元の連立一次方程式を考える。

$$Gy = c \quad (3.15)$$

ここで、 $G$  は  $2N$  次元行列で

$$G = \begin{pmatrix} D + E_1 & -E_2 \\ -E_2 & D + E_1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$y = (x^T, -x^T)^T$  は連立一次方程式 (3.15) を満たす。

対角要素が正で、非対角要素がすべて非正である行列を  $L$  行列というが、行列  $G$  はその要素の決め方から  $L$  行列であることが分かる。

容易に示すことができるように、行列  $A$  が  $L$  行列である場合には、「行列  $A$  が  $M$  行列であること」と「 $Ax > 0$  となる  $x > 0$  が存在すること」とは同値である。[6]

今の場合行列  $A$  の比較行列は

$$\bar{A} = D + E_1 - E_2 \quad (3.17)$$

となる。行列  $\bar{A}$  の対角成分は正、非対角成分はすべて非正で、行列  $A$  は  $L$  行列であることが分かり、かつ行列  $A$  が  $H$  行列であることから行列  $\bar{A}$  は  $L$  行列かつ  $M$  行列であることが分かる。したがって  $\bar{A}x > 0$  となる  $x > 0$  が存在する。この  $x$  について、

$$G \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D + E_1 - E_2)x \\ (D + E_1 - E_2)x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}x \\ \bar{A}x \end{pmatrix} > 0 \quad (3.18)$$

となり、行列  $G$  が  $M$  行列であることが分かる。したがって Ruge, Stüben のスカラーアルゴリズムを適用できる。かつ実際の計算においては、 $2N$  次元ベクトルを作成しないアルゴリズムを構成できる [6]。

ただし、補間演算子を修正した形で与えることになる。係数行列が  $M$  行列であるときは Ruge, Stüben のスカラーアルゴリズムに一致する補間演算子となる。渦電流解析、静磁界解析等の電磁界解析の問題に適用し、よい結果が得られている。

#### 4 辺要素を用いる電磁界解析で生じる半正定値係数行列に対する AMG 法

辺要素を用いる有限要素解析において現れる係数行列は一般には弱優対角性を満たさないため、スカラーアルゴリズムを適用することが困難である。Reitzinger 等 [7] は、辺要素を用いた静磁界解析において、最も細かいメッシュの節点と辺の接続情報を含む補助行列を利用し、適切な疎グリッドを生成する手法を与えた。この手法を用いるとともに、特異な係数行列問題を扱うために、我々はシフトされた係数行列に対して代数的マルチグリッド法を前処理に用いる手法を開発した。シフトされた係数行列とは、 $\alpha$  を微小パラメータとして、与えられた係数行列の対角要素に  $(1 + \alpha)$  を乗じたものを対角成分に持つ行列である。この手法は特異な係数行列を持つ問題に ICCG 法を適用する際に加速係数を導入する手法と類似している [10],[11]。Reitzinger 等 [7] 等は、静磁界問題での行列の特異性を回避するため基礎方程式に若干の変更を加えているが、我々の手法では基礎方程式の変更の必要はない。

### 5 AMG 法による電磁界解析の数値例

#### 5.1 2次元渦電流問題

無限長直方体の磁性体に軸方向に時刻  $t = 0$  で単位強制電流を与えたとき、磁気ベクトルポテンシャルについて有限要素解析を行う。2次元問題となるので基礎

方程式は次式で与えられる。

$$-\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad} A_z\right) = J_z - \sigma\frac{\partial A_z}{\partial t}, \quad -0.02 \leq x \leq 0, \quad -0.01 \leq y \leq 0 \quad (5.19)$$

ここで初期条件は次式で与えられ

$$A_z = 0, \quad t = 0 \quad (5.20)$$

$$J_z = J_0, \quad t > 0 \quad (5.21)$$

ただし、 $\frac{1}{\mu} = 2.65 \times 10^3 [m/H]$ ,  $\sigma = 8.33 \times 10^5 [S/m]$ ,  $J_0 = 1.00 \times 10^5 [A/m^2]$ .  
境界条件は次式で与えられる。

$$A_z = 0, \quad x = -0.02, \quad -0.01 \leq y \leq 0 \quad (5.22)$$

$$A_z = 0, \quad y = -0.01, \quad -0.02 \leq x \leq 0 \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad -0.01 \leq y \leq 0 \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad -0.02 \leq x \leq 0 \quad (5.25)$$

デローニー法により不規則三角形メッシュを生成し、一次三角形節点要素を用いて偏微分方程式の離散化を行った。係数行列は疎行列であり、AMG法の適用前に、Reverse Cuthill-McKee(RCM)アルゴリズムを適用して、行列の帯幅圧縮を行った。自由度は80,601で計算を行った。スムーザーとしてガウスザイデル法を用い、(1,1)V-cycle AMG法を適用した。反復法の収束判定基準は

$$\frac{\|r\|}{\|b\|} \leq 10^{-10} \quad (5.26)$$

計算は分散記憶型並列計算機SR2201(31PE+1PE (I/O), 0.5GB/PE)で行い、使用言語はFORTRAN, 並列化通信ライブラリにはMPIを用いた。

計算結果を表5.1に示す。計算時間は秒単位で経過時間を示す。

表 5.1: 計算時間 (経過時間) と反復回数

$N_p$	AMG		ICCG ( $N_p = 1$ ), Block ICCG ( $N_p > 1$ )	
	経過時間 (秒)	反復回数	経過時間 (秒)	反復回数
1	513	12.5	5219	340
2	273	12.6	3163	397
4	153	12.7	1748	407
8	97.2	12.9	998	423
16	67.5	13.2	630	440

$N_p = 1$  については逐次計算用のプログラムによる。 $N_p > 1$  の場合は並列処理用プログラムによる。比較のために逐次計算用のICCG法およびブロック化によって並列化を行った並列ICCG法の結果も示す。 $N_p = 1$  ですでにAMG法はICCG法よりも高速であり、CPU数の増加とともに差が大きくなっている。

## 5.2 3次元渦電流解析

電気学会で検証用に作成された渦電流問題の解析を行った。問題領域を図 5.2に、計算結果および実験による測定結果を図 5.3に示す。鉄心の比透磁率  $\frac{\mu}{\mu_0} = 3,000$ 、ただし  $\mu_0 = \frac{4\pi}{10^7}$  は真空の透磁率で、導体板の導電率は  $\sigma = 3.215 \times 10^7 [S/m]$  とした。

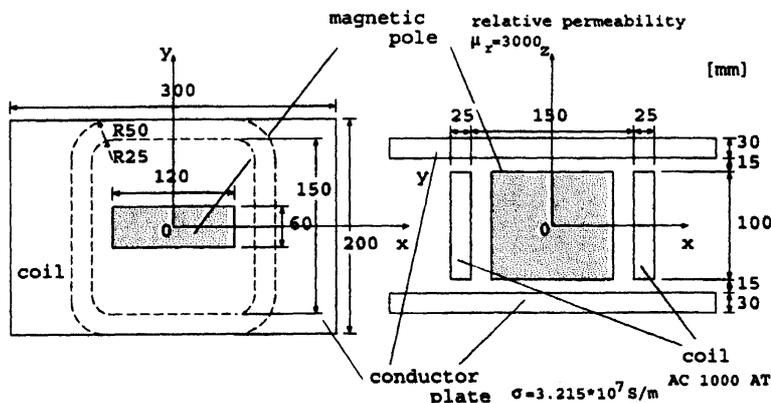


図 5.2: 電気学会渦電流問題

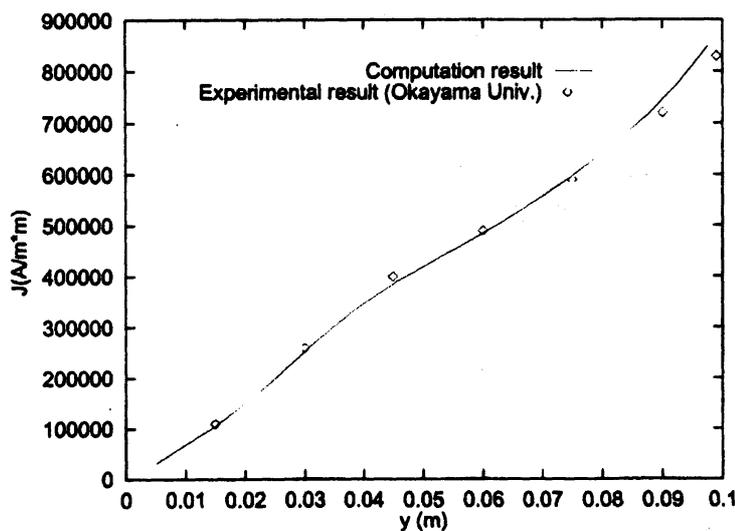


図 5.3: 電気学会渦電流問題結果

計算は記憶容量の関係もあり、京都大学学術情報メディアセンターの VPP800(1PE)を用いた。一次直方体要素を用いて解析し、モデルの対称性から、解析領域は全体の1/8の領域とした。表 5.2に示す3種類のメッシュ分割について計算した。境界条件としては、 $xy$  平面に平行な境界面には自然境界条件、それ以外の境界に対しては固定境界条件  $A = 0$  を与えた。反復法の収束判定基準は

$$\frac{\|r\|}{\|b\|} \leq 10^{-10} \quad (5.27)$$

前処理としての AMG 法において係数行列の特異性を回避するため、対角要素に乗ずる  $(1 + \alpha)$  について、 $\alpha = 1.0 \times 10^{-4}$  とした。ただし、 $\alpha$  については  $10^{-3}$  以下であれば、反復までの収束回数にほとんど影響がなく、最適の  $\alpha$  の探索を行う必要がないという利点があることを注意しておく。AMG 法では (1,1)V-cycle を用いた。ICCG 法の破綻を避けるための加速係数として 1.03 を用いた。

表 5.2: 解析メッシュ

メッシュ	$x$ 方向分割数	$y$ 方向分割数	$z$ 方向分割数	自由度
I	22	18	16	21,136
II	33	27	24	68,898
III	44	36	32	160,464

計算結果を表 5.3 に示す。

表 5.3: 電気学会渦電流問題の計算結果

	メッシュ I		メッシュ II		メッシュ III	
	AMGCG	ICCG	AMGCG	ICCG	AMGCG	ICCG
セットアップ時間 (秒)	2.552	4.988	9.321	15.73	22.13	42.68
合計時間 (秒)	25.72	28.21	120.2	127.1	336.3	421.8
反復回数	21	95	29	146	35	200

このプログラムでは並列化は行っていない。ICCG 法では VPP800 のベクトル機能が効果を出している。メッシュ III の様に自由度が大きくなるとやはり AMGCG が ICCG 法より速くなっている。

## 6 おわりに

AMG 法と電磁界解析に関する我々の試みについて簡単に述べた。電磁界解析における有限要素法で現れる連立一次方程式の解法としての AMG 法は研究の活発な分野であり、今後の一層の発展が望まれている。

## 参考文献

- [1] W.L. Briggs: A Multigrid Tutorial, SIAM, Philadelphia, 1987.
- [2] G. Hasse, U. Langer: Multigrid Methods: from geometrical to algebraic versions, in Proc. NATO Advanced Institute and Séminaire de Mathématiques,

Supérieures on Modern Methods in Scientific Computing and Applications, Kluwer Academic Pub. AH Dordrecht, 2002.

- [3] J. Ruge, K. Stüben: "Algebraic multigrid," in Multigrid Methods, S. McCormick Ed., Frontiers Appl. Math., Vol.3, SIAM, Philadelphia, 1987.
- [4] Huang, W. Z., Convergence of Algebraic Multigrid Methods for Symmetric Positive Definite Matrices with Weak Diagonal Dominance, Appl. Math. Comput., Vol. 46, no. 2, pp. 145-164, 1991.
- [5] Chang, Q., Wong, Y. S., and Fu. H., On the Algebraic Multigrid Method, J. Comput. Phys. vol. 125, no. 2, pp. 279-292, 1996.
- [6] 美船、岩下、島崎：実対称 H 行列を係数行列とする連立一次方程式に対する AMG 高速解法、日本応用数理学会論文誌 Vol.12, No. 2, pp.169-188, 2002.
- [7] S. Reitzinger, J. Schöberl: An algebraic multigrid method for finite element discretizations with edge elements, Numer. Linear Algebra with Applications, Vol.9, 223-238, 2002.
- [8] T. Mifune, T. Iwashita, M. Shimasaki: A Fast Solver for FEM Analyses Using Parallelized Algebraic Multigrid Method, IEEE Trans. Magnetcs, Vol.38, pp. 369-372, 2002.
- [9] T. Mifune, T. Iwashita, M. Shimasaki: Algebraic Multigrid Method for Non-Symmetric Matrices Arising in Electromagnetic Finite Element Analyses, IEEE CEFC2002, Perugia, 2002.
- [10] K. Fujiwara, T. Nakata: Acceleration of Convergence Characteristics of the ICCG Method, IEEE Trans. Magnetcs, Vol. 29, pp.1958-1961, 1993.
- [11] T. A. Manteuffel: An incomplete factorization technique for positive definite linear systems, Math. of Comp., vol. 34, pp. 473-497, 1980.