

# 電磁界の有限要素解析における特異行列について

北海道大学 大学院工学研究科 五十嵐 一 (Hajime Igarashi)

北海道大学 大学院工学研究科 本間 利久 (Toshihisa Honma)

Graduate School of Engineering, Hokkaido University

## 1 緒言

電磁界の有限要素解析では微分形式に立脚するホイットニー要素族が広く用いられており、スカラーポテンシャル  $V$  などの 0 形式は節点要素、ベクトルポテンシャル  $A$  のような 1 形式は辺要素で近似表現される [1], [2]. ホイットニー要素を用いた場合、 $A$  を未知変数とする静磁界の有限要素行列は特異となる。また準定常電磁界 (渦電流場) や高周波電磁界を  $V$  と  $A$  を未知変数として解析する場合にも、有限要素行列は方程式の従属性から特異となる。これら特異行列からなる連立方程式は前処理付き共役勾配法 (CG 法) によって解かれることが多い<sup>1</sup>。

このような有限要素解析において、連立方程式を解くための時間が解析時間の大部分を占めるため、線形計算の効率化が強く望まれている。上で述べた電磁界解析の場合には、前処理付き CG 法の収束性が重要となる。このとき CG 法の収束性はベクトルポテンシャルのゲージ固定の有無や未知数 (定式化) の選択によって大きく異なることが知られている。最近、このような依存性は電磁界の有限要素行列の特異性に起因することがわかってきた [3]-[5]。

本報告では特に準定常電磁界を考え、定式化によって前処理付き CG 法の収束性が異なる理由を論じる。

## 2 定式化

変位電流を無視した準定常電磁界を考える。材料特性はすべて線形であるとし、電磁界は正弦的に角周波数  $\omega$  で時間変化しているとする。このとき場の支配方程式はアンペアの法則とファラデーの法則

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_e \quad (1)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (2)$$

で与えられる。ここで  $\mathbf{J}_0$ ,  $\mathbf{J}_e$  はそれぞれ強制電流および渦電流を表す。 $\mathbf{J}_0$  は無発散であるとする。さらに (1), (2) より

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_e = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

が要請される。一方、構成関係式

$$\mathbf{H} = \nu \mathbf{B} \quad (5)$$

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E} \quad (6)$$

<sup>1</sup>この際、右辺の非同次項が有限要素行列の値域に入るように定式化される。

が成立すると仮定する。ここで $\nu$ は磁気抵抗率(透磁率の逆数),  $\sigma$ は導電率である。

(4) および(2)より $\mathbf{B}$ と $\mathbf{E}$ はベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ とスカラーポテンシャル $V$ によって

$$\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A} \quad (7)$$

$$\mathbf{E} = -j\omega(\mathbf{A} + \text{grad } V) \quad (8)$$

と表現することができる<sup>2</sup>。このとき(1), (3)は

$$\text{curl}(\nu \text{curl } \mathbf{A}) + j\omega\sigma(\mathbf{A} + \text{grad } V) = \mathbf{J}_0 \quad (9)$$

$$j\omega \text{div}[\sigma(\mathbf{A} + \text{grad } V)] = 0 \quad (10)$$

と書ける。これらを解くことで電磁界を決定することができる。ここで式(10)は(9)の発散をとることで得られるが、方程式を閉じるために必要である。

いま解析領域 $\Omega$ を有限要素で分割したとする(節点, 辺および面の数をそれぞれ $N, E, F$ とする)。 $\mathbf{A}$ には辺要素基底 $\mathbf{N}_e$ ,  $V$ には節点要素基底 $N_n$ を用いて

$$\mathbf{A} = \sum_e^E a_e \mathbf{N}_e \quad (11)$$

$$V = \sum_n^N V_n N_n \quad (12)$$

のように近似する。ここで $a_e$ は $\mathbf{A}$ の辺 $e$ 上の循環 $\int_e \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$ ( $\boldsymbol{\tau}$ は辺 $e$ の単位接線ベクトル),  $V_n$ は節点 $n$ における $V$ の値を表す。(9)に $\mathbf{N}_e$ , (10)に $N_n$ を乗じ, 部分積分を行うと対応する有限要素方程式が得られる。たとえば(9)の左辺第1項からは

$$K_{ee'} = \int_{\Omega} \nu \text{curl } \mathbf{N}_e \cdot \text{curl } \mathbf{N}_{e'} dv \quad (13)$$

の成分を持つ有限要素行列が得られる。

さて各辺の循環 $a_e$ を並べた列を $\{a\}$ とし, 面 $f$ を通過する磁束を $b_f$ ,  $b_f$ を並べた列を $\{b\}$ とする。このとき(7)の離散化形を

$$\{b\} = [C]\{a\} \quad (14)$$

と書くことができる。ここで $[C]$ は $F \times E$ の $\pm 1$ と $0$ からなる成分を持ち,  $\text{curl}$ に対応する行列である。

同様に(8)の離散形は

$$\{e\} = -j\omega(\{a\} + [G]\{V\}) \quad (15)$$

と書くことができる。ここで $[G]$ は $E \times N$ の $\pm 1$ と $0$ からなる成分を持ち,  $\text{grad}$ に対応する行列である。 $[C], [G]$ は $\text{curl grad} = 0$ に対応する関係 $[C][G] = 0$ を満足する。

さらに $\text{curl } \mathbf{N}_e$ を並べた列を $\{\text{curl } \mathbf{N}\}$ と書くと, 面要素の基底 $\mathbf{M}_f$ の列 $\{M\}$ を用いて

$$\{\text{curl } \mathbf{N}\} = [C]^t \{M\} \quad (16)$$

<sup>2</sup>後で得られる有限要素行列を対称とするために, 電磁気学のテキストで通常用いられるスカラーポテンシャルを時間で積分して $V$ を定義している。

と書くことができる。また同様に

$$\{\text{grad } N\} = [G]^t \{N\} \quad (17)$$

と書ける。

性質 (16), (17) を用いると (9), (10) に対する有限要素方程式は

$$\begin{bmatrix} [C]^t[\nu][C] + j\omega[\sigma] & j\omega[\sigma][G] \\ j\omega[G]^t[\sigma] & j\omega[G]^t[\sigma][G] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

と書くことが示せる [1], [4]。ここで行列  $[\nu]$  と  $[\sigma]$  はそれぞれ  $F \times F$  の正定値,  $E \times E$  の半正定値行列であり, その成分は

$$\nu_{ff'} = \int_{\Omega} \nu \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{M}_{f'} dv \quad (19)$$

$$\sigma_{ee'} = \int_{\Omega} \sigma \mathbf{N}_e \cdot \mathbf{N}_{e'} dv \quad (20)$$

で与えられる。さらに (18) のソース項の成分は

$$J_e = \int_{\Omega} \mathbf{J}_0 \cdot \text{curl } \mathbf{N}_e dv, \quad (21)$$

で与えられる。(18) を解く方法を A-V 法と呼ぶ。また以後 (18) の左辺の行列を  $[K_{av}]$  と記す ( $\dim(K_{av}) = E + N$ )。  $[G]^t[C]^t = 0$  より  $[K_{av}]$  の下  $N$  行は上  $E$  行に線形従属であり,  $\text{rank}[K_{av}] \leq E$  が成立する (等号は  $\sigma > 0$  の場合)。このように A-V 法は冗長性を有している。

A-V 法において節点要素の基底が張る空間を  $W^0$ , 辺要素の基底が張る空間を  $W^1$  とすると, (17) より  $\text{grad } W^0 \subset W^1$  が成立する。よって辺要素による変数  $\{A\}$  のみで電磁界を表現することが可能である。したがって (18) を

$$[[C]^t[\nu][C] + j\omega[\sigma]] \{A\} = \{J\}. \quad (22)$$

のように簡単化することができる。(22) を解く方法を A 法と呼ぶ。以後 (22) の左辺の行列を  $[K_a]$  と記す。空気領域では  $\sigma = 0$  となるため,  $[K_a]$  は特異であり, 零固有値を有する。これら零固有値は CG 法の収束性には影響を及ぼさない。一方,  $[C]^t[\nu][C]$  は  $N - 1$  個の零固有値を有するので,  $\sigma$  または  $\omega$  が小さいとき,  $[K_a]$  は  $N - 1$  個の零に近い固有値を持つ。したがってこのような場合,  $[K_a]$  の条件は悪く, CG 法の収束性が悪くなると考えられる。以下では A-V 法と A 法を用いた場合の CG 法の収束性を数値実験によって評価する。

### 3 数値実験

図 1 は数値実験で用いるモデル [6] を示している。このモデルでは対称性から実際の系の  $1/8$  のみを考えている。図のような角周波数  $\omega$  の線状電流によって変動磁界がつくられ, 平板導体内に渦電流が誘導される。この渦電流がさらに磁界を生じ, 元の磁界に変化

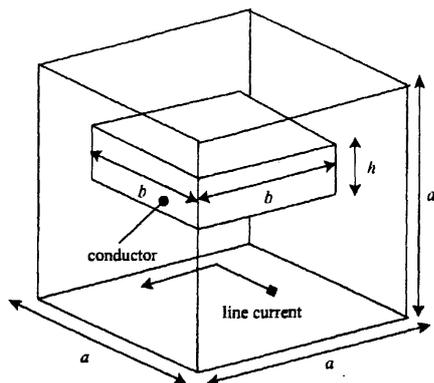


図1 解析モデル

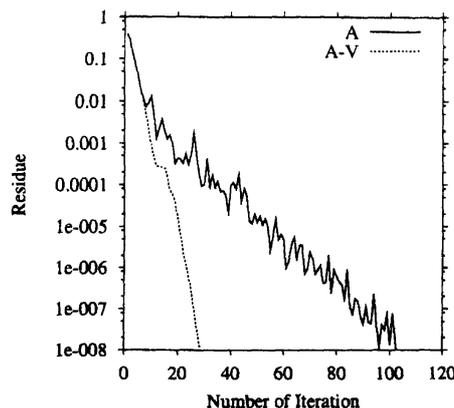


図2 前処理付きCG法の収束過程

を生じる。(18)または(22)を解くことによって、このような渦電流と磁界の分布を求めることができる。解析では各物理パラメータを $\sigma = 5.8 \times 10^7 [\text{S/m}]$ ,  $b = 3a/4$ ,  $h = a/4$ ,  $a = 20[\text{mm}]$ と設定した。

図2は $f = 50[\text{Hz}]$ の場合の前処理付きCG法の収束過程を示している。また図3はCG法が収束するまでの反復回数の周波数依存性を示している。これらの解析において前処理として不完全コレスキー分解を用いた。図2, 3より明らかにA-V法の収束性はA法よりもよいことがわかる。またA法の収束性は前処理によって改善されているが、前処理を行っても周波数が小さくなると収束性が悪化している。これに対して、A-V法では前処理を行うと、ほとんど周波数に依存しない良好な収束性が得られている。

以上のように不完全コレスキー分解による前処理を用いると、A法とA-V法でCG法の収束性に大きな違いが生じることがわかった。不完全コレスキー分解は実際の電磁界解析で広く使用されている前処理法であるが、その効果を解析することは簡単ではない。そこでつぎに、より単純な前処理である対角スケーリングを考える。対角スケーリングでは

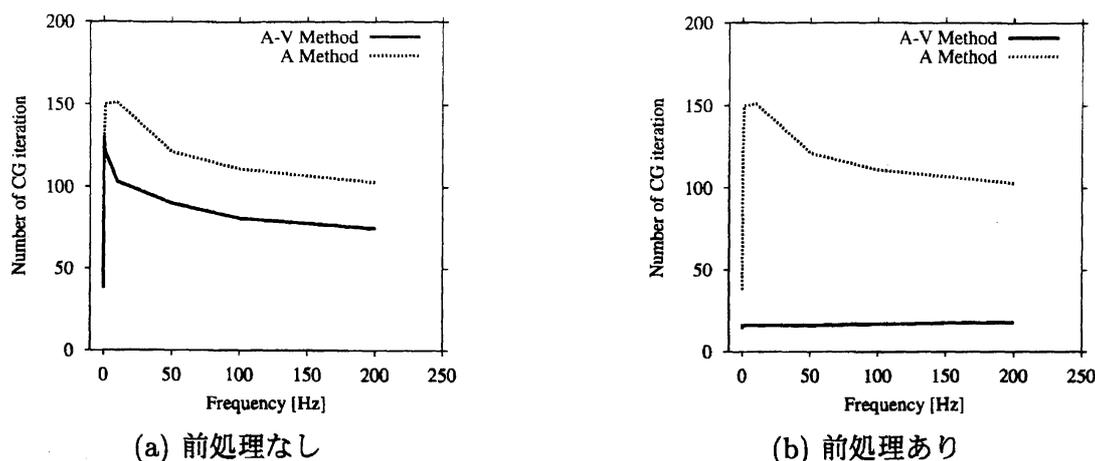
$$k_{ij} \leftarrow k_{ij} / \sqrt{|k_{ii}k_{jj}|} \quad (23)$$

のような操作を行う。

図1のモデルについての数値実験の結果を図4に示す。ここで $\beta = 1/(a^2\omega\sigma\mu)$ は電磁界を特徴付ける無次元数である( $a$ は系の特徴長さ)。A法, A-V法の両結果において前処理を行わないと $\beta$ の増加によってCG法の収束性が悪化していることがわかる。またA法では対角スケーリングまたは不完全コレスキー分解による前処理の後でもこの傾向は変わらない。一方、A-V法ではこれらの前処理を行うと、収束性は $\beta$ に依存しないようになっている。このように対角スケーリングは不完全コレスキー分解とほぼ同じような効果を持つことがわかる。

有限要素行列の特異値を値が大きいものから順に並べた分布を図5に示す<sup>3</sup>。これらにおいて、最も下方にある平らな特異値のグループは零特異値に対応している(数値誤差のため零にはなっていない)。また $10^{10}$ 程度の特異値が平らに分布している。さらにA法, AV法ともに上の2つの平らな特異値のグループの間に特異値のグループが存在しており、

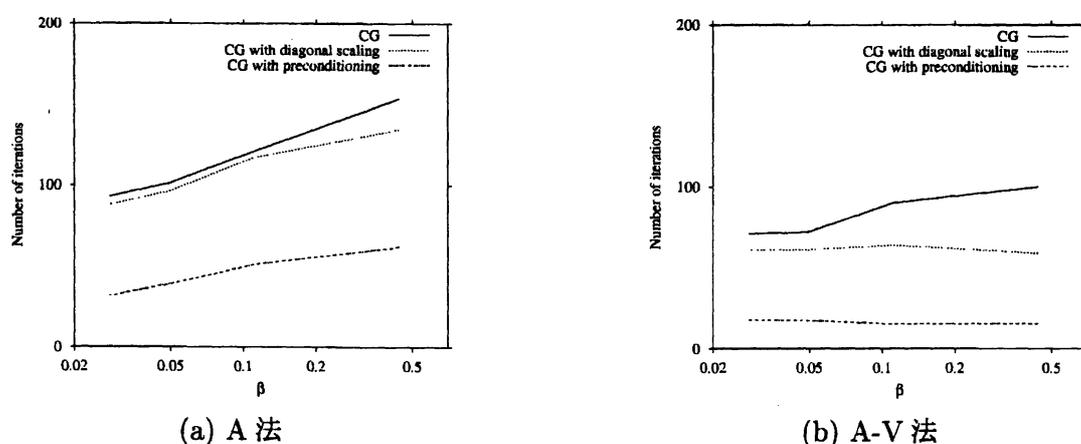
<sup>3</sup>たとえば $[K_a]$ を考えると、 $[K_a]^*$ を $[K_a]$ の共役転置として、 $[K_a][K_a]^*$ の固有値の正の平方根が $[K_a]$ の特異値である。



(a) 前処理なし

(b) 前処理あり

図3 CG法の収束の周波数依存性



(a) A法

(b) A-V法

図4 CG法の収束の $\beta$ 値依存性

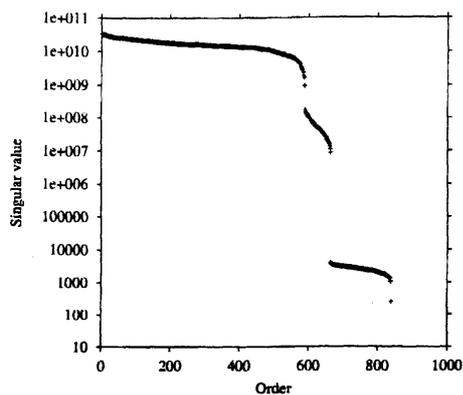
これらの値は $\beta$ に反比例して小さくなることが確認された。簡単のためこれらを浮動特異値と呼ぶ。

対角スケール後の有限要素行列の特異値分布を図5に示す。A法においては浮動特異値が存在しているが、AV法では存在しない。浮動固有値が零に近づくと、行列の条件数

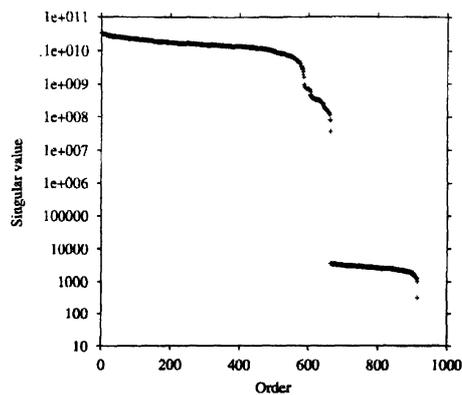
$$\kappa = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}^0} \quad (24)$$

が悪化してCG法の収束性が悪くなる。ここで $\sigma_{max}$ 、 $\sigma_{min}^0$ はそれぞれ最大特異値および非零最小特異値である。したがって図5, 6の特異値分布は図4の収束性と整合している。このようなA法とA-V法における特異値分布の違いは、前処理として不完全コレスキー分解を用いた場合でも同様であることが確認されている[4]。以上の数値実験結果から、A法ではCG法の収束性に悪影響を与える浮動特異値が前処理を行っても残留するが、AV法の前処理後の特異値には浮動特異値は存在せず、零特異値と規格化された1に近い特異値のみとなることがわかった。

上記のようなA法とA-V法の性質の違いはつぎのように説明することができる[5]。すなわち、いま簡単のため $\sigma > 0$ の場合を考えると、A法の行列 $[K_a]$ は正則となる。ここ

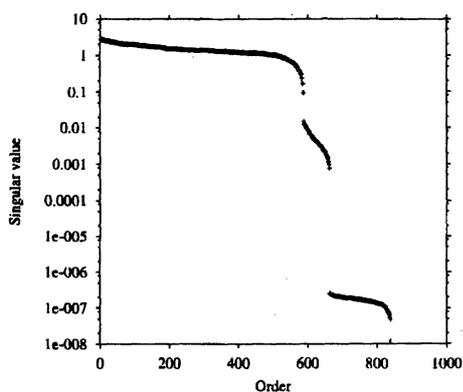


(a) A 法

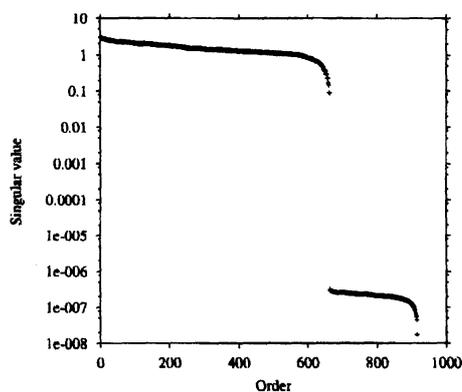


(b) A-V 法

図5 有限要素行列の特異値分布 (前処理なし)



(a) A 法



(b) A-V 法

図6 有限要素行列の特異値分布 (対角スケーリング)

で行列のランクは前処理および対角スケーリングによって変化しない。さて  $\beta$  が増加すると  $[K_a]$  は特異行列  $[C]^t \nu [C]$  に近づく。したがって  $[K_a]$  は零に近い特異値を持つようになり、行列の条件が悪化する。これは対角スケーリングなどを行っても変わらない。一方、A-V法の行列  $[K_{av}]$  の場合には、対角スケーリング後の行列  $[\tilde{K}_{av}]$  は、 $\beta$  が十分大きいとき

$$[\tilde{K}_{av}] \simeq \begin{bmatrix} [\tilde{K}_0] & [0] \\ [0]^t & [\tilde{K}_1] \end{bmatrix} \quad (25)$$

と書ける。ここで  $[\tilde{K}_0]$  と  $[\tilde{K}_1]$  はそれぞれ  $E - N + 1$  個および  $N - 1$  個の1に近い特異値を有する行列である<sup>4</sup>。さらに  $\text{rank}[\tilde{K}_{av}] = E$  であるので、 $[\tilde{K}_{av}]$  は厳密に  $N$  個の零特異値を有する。これらの特異値の個数の和は  $E + N$  であり、これは  $[\tilde{K}_{av}]$  の次元に等しい。よって  $[\tilde{K}_{av}]$  は浮動特異値を持たない<sup>5</sup>。

上の性質を簡単な数値例を用いて考える。A法の有限要素行列  $[K_a]$  と類似な性質をもつ

$$[k_a] = \begin{bmatrix} 1 + \epsilon & 2 \\ 2 & 4 + \epsilon \end{bmatrix} \quad (26)$$

<sup>4</sup> $\text{rank}[\tilde{K}_1] = N - 1$

<sup>5</sup>より厳密な証明を行うことができる [7]

を考える.  $\epsilon$  は  $\omega\sigma$  に対応する定数であり,  $[k_a]$  は  $\epsilon \neq 0$  のとき正定値行列,  $\epsilon = 0$  のとき特異となる.  $[k_a]$  に対角スケーリングを適用すると

$$[\tilde{k}_a] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{(1+\epsilon)(4+\epsilon)}} \\ \text{sym.} & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

を得る.  $\epsilon = 0$  のとき  $[\tilde{k}_a]$  は固有値は 0, 2 である. 2 は  $[C]^t[\nu][C]$  の非零固有値に対応する.  $\epsilon$  が正の値をとるとき  $[\tilde{k}_a]$  は正定値行列であるので, 正の固有値を持つ.  $\epsilon$  が零から正の小さな値に変化すると, 連続性より零固有値は零に近い正の小さな固有値となる. このような状況では行列の条件が悪い. たとえば  $\epsilon = 0.01$  のとき固有値は 0.0062 と 1.9938 である.

つぎに AV 法の有限要素行列  $[K_{av}]$  を考える. この場合  $[K_{av}]$  に対応する行列として

$$[k_{av}] = \begin{bmatrix} 1+\epsilon & 2 & 2\epsilon \\ 2 & 4+\epsilon & -\epsilon \\ 2\epsilon & -\epsilon & 5\epsilon \end{bmatrix} \quad (28)$$

を考える.  $[k_{av}]$  は  $[K_{av}]$  と同様に  $\epsilon$  の値にかかわらず特異であり, また  $\epsilon \rightarrow 0$  のとき  $[k_a]$  に近づく.  $[k_{av}]$  を対角スケーリングすると

$$[\tilde{k}_{av}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{(1+\epsilon)(4+\epsilon)}} & 2\sqrt{\frac{\epsilon}{5(1+\epsilon)}} \\ \text{sym.} & 1 & -\sqrt{\frac{\epsilon}{5(4+\epsilon)}} \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

を得る.  $\epsilon = 0$  のとき  $[\tilde{k}_{av}]$  の固有値は 0, 1, 2 である. 2 は  $[C]^t[\nu][C]$  の非零固有値に対応し, 1 は  $[G]^t[\sigma][G]$  のそれに対応する.  $\epsilon$  が小さい正の値をとっても零固有値は変化せず, また連続性より他の固有値は 1, 2 近傍の値をとる. よって行列の条件は悪化しない. たとえば  $\epsilon = 0.01$  のとき, 固有値は 0, 1.0040, 1.9960 である.

## 4 まとめ

本報告では準定常電磁界の有限要素行列の性質と CG 法の収束性, 特異値分布の関係について論じた. ベクトルポテンシャルを未知数とする A 法では, 前処理のあるなしにかかわらず, 周波数または導電率が低くなると CG 法の収束性が悪化する. 一方, AV 法では前処理を行わない場合には A 法と同様に周波数または導電率の低下とともに CG 法の収束性が悪化するが, 前処理を行うと周波数または導電率に依存しない良好な収束性が得られる. これは AV 法では有限要素行列の条件を悪化させる浮動固有値が前処理によって消去されるためである.

## 参考文献

- [1] A.Bossavit, *Computational electromagnetism*, (1998), Academic Press.
- [2] 本間, 五十嵐, 川口「数値電磁力学」, (2002), 森北出版
- [3] H.Igarashi, "On the property of the curl-curl matrix in finite element analysis with edge elements", *IEEE Trans. Magn.* **37**, (2001), 3129-3132.
- [4] H.Igarashi and T.Honma, "On the convergence of ICCG applied to finite element equation for quasi-static fields", *IEEE Trans. Magn.* **38**, (2002), 565-568.
- [5] H.Igarashi and T.Honma, "Convergence of Conjugate Gradient Method Applied to Driven Microwave Problems", Proc. CEFC-2002, *IEEE Trans. Magn.*, in press.
- [6] 羽野, "高次 Nedelec 要素による渦電流解析", 電気学会資料, SA00-10, RM-00-75, (2000), 55-60.
- [7] 電気通信大学 山本野人氏, 私信