数理解析研究所講究録 1321 巻 2003 年 1-7

退化主系列表現について

京都大学大学院理学研究科　池田　保 (IKEDA, TAMOTSU)

Siegel Eisenstein の Fourier 係数にあらわれる Siegel series の研究は志村、北 岡、桂田ら ([9], [10], [6], [7]) によって研究されている。ここでは、表現論的な見地から p-進体上の古典群の退化主系列表現の degenerate Wittaker function と Siegel series (singular series) の関係について述べる。退化 Whittaker 関数の関数等式は Kudla, Sweet ([4], [8], [11]) による。これにより、Siegel series の桂田の関数等式 ([6]) の別証明が得ら れる。

1. Siegel series

k を代数体、$\mathbb{A}$ をその adele 環とする。$\mathbb{A}/k$ の自明でない additive character $\psi=\prod_v \psi_v$ を固定しておく。

k 上定義された代数群 $G=\mathrm{Sp}_n$ とその部分群を次のように定義する。

$$P=\left\{\begin{pmatrix}A & * \\ 0 & {}^tA^{-1}\end{pmatrix}\in \mathrm{Sp}_n \middle| A\in \mathrm{GL}_n\right\}$$

$$M=\left\{\begin{pmatrix}A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1}\end{pmatrix} \middle| A\in \mathrm{GL}_n\right\}\simeq \mathrm{GL}_n$$

$$N-\left\{\begin{pmatrix}1 & B \\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle| B-{}^tB\in \mathrm{M}_n(k)\right\}\simeq \mathrm{Sym}_n(k)$$

N は対称行列の空間 $\mathrm{Sym}_n(k)$ と同一視する。$\mathbf{K}\subset Sp_n(\mathbb{A})$ を standard maximal compact subgroup とすると、 Iwasawa decomposition $G(\mathbb{A})=P(\mathbb{A})\mathbf{K}$ が成り立つ。

Global な退化主系列表現

$$I(s)=\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}|*|^s$$

の $\mathbf{K}$ 上恒等的に 1 になる section $f_0^{(s)}$ を

$$f_0^{(s)}(g)=|\det A|^{s+(n+1)/2},$$

$$g=pk,\quad p=\begin{pmatrix}A & 0 \\ 0 & A^{-1}\end{pmatrix}\in P(\mathbb{A}), k\in \mathbf{K}$$

により定義する。この section $f_0^{(s)}$ から得られる Eisenstein 級数を

$$E(s,g)=\sum_{\gamma\in P\backslash G} f_0^{(s)}(\gamma g),\qquad \mathrm{Re}(s)\gg 0$$

$T = {}^tT \in \mathrm{Sym}_n(k)$, $\det T \neq 0$ を非退化対称行列とするとき、T に関する Fourier 係数を

$$W_T(s,g) = \int_{N(k)\backslash N(\mathbb{A})} E(s,yg)\overline{\psi_T(y)}dy,$$

$$\psi_T\left(\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \psi(\mathrm{tr}(Ty)).$$

により定義すると、$\mathrm{Re}(s) \gg 0$ のとき

$$W_T(s,g) = \int_{N(\mathbb{A})} f_0^{(s)}(wyg)\overline{\psi_T(y)}dy$$
$$= \prod_v W_{T,v}(s,g_v), \qquad g = (g_v)_v$$

が成り立つ。ここで $w - \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,

$$W_{T,v}(s,g_v) = \int_{N(k_v)} f_0^{(s)}(wyg_v)\overline{\psi_{T_v}(y)}dy,$$

$$\psi_{T,v}\left(\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \psi_v(\mathrm{tr}(Ty)).$$

古典的な意味での Fourier 係数は $W_T(s,g)$ の原点での値によって得られる。

W_T は g の関数と見た時、退化 Whittakaer vector の空間

$$\mathrm{Hom}_G(I(s), \mathrm{Ind}_N^G\psi_T)$$

の元を定義する。Karel により、この空間の次元は高々 1 であることが知られている。

このように Eisenstein 級数の Fourier 係数は退化 Whittaker 関数の原点における 値なので、次のように定義することができる。

F を non-archimedean local field、$\mathfrak{o}_F$, $\mathfrak{p}_F$ を F の整数環と その極大イデアル、q を F の剰余体の位数、ψ を F の order 0 の additive character とする。$f_0^{(s)}$, T, I(s) などを F 上に定義された局所的な対応物とする。このとき、Siegel series $b(T,s)$ を

$$b(T, s+\frac{n+1}{2}) = \int_N f_0^{(s)}(wy)\overline{\psi_T(y)}dy$$

によって定義する。T が half-integral ということを $2T$ が integral で T の対角成分が integral であることと定義すれば、T が half-integral でないとき $b(T,s)$ は恒等的に 0 となる。

退化主系列表現 $I(s)$ から $I(-s)$ への intertwining operator $M(s)$ をつぎ のように定義する。

$$M(s)f(g) = \int_N f(wyg)dy, \qquad f \in I(s)$$

によって定義する。この積分は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ のとき絶対収束し、全 s 平面に有理型に解析接続される。Standard maximal compact subgroup $\mathbf{K}$ 上で恒等的に 1 になる関数 $f_0^{(s)} \in I(s)$ に対しては $M(s)$ の作用は

$$M(s)f_0^{(s)} = |2|^{n(n-1)/4}\frac{\zeta_F(s-(n-1)/2)}{\zeta_F(s+(n+1)/2)}\prod_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{\zeta_F(2s-n+2i)}{\zeta_F(2s+n+1-2i)}$$

で与えられる。ただし $\zeta_F(s) = (1-q_F^{-s})^{-1}$.

また、退化 Whittaker vector $W_T(s) \in \mathrm{Hom}_G(I(s), \mathrm{Ind}_N^G\psi_T)$ を

$$W_T(s)f(g) = \int_{N(k_v)} f(wyg)\overline{\psi_T(y)}dy$$

によって定義する。この時、退化 Whittaker vector の空間の一意性により、$s \in \mathbb{C}$ の有理型関数 $\kappa(s)$ が存在して

$$W_T(-s) \circ M(s) = \kappa_T(s) \circ W_T(s)$$

が成り立つ。次節でこの $\kappa_T(s)$ を計算する。

2. 概均質 VECTOR 空間の関数等式との関係

引き続き F を non-aruchimendean local field とし、$M = \mathrm{GL}_n$, $\mathrm{N} = \mathrm{Sym}_n(F)$ とする。$m \in M$ は N に $X \mapsto mX\,{}^t m$ により作用し、この作用で N は概均 質ベクトル空間となる。この作用による open orbit を $Y_1, Y_2, \ldots, Y_t$ とする。

N 上の Schwartz function $\Phi \in \mathcal{S}(N)$ に対し、local zeta function $Z(s,\Phi)$ $Z_i(s,\Phi)$ を

$$Z(S,\Phi) = \int_N \Phi(x)|\det x|^s d^\times x,$$

$$Z_i(S,\Phi) = \int_{Y_i} \Phi(x)|\det x|^s d^\times x,$$

$$d^\times x = |\det x|^{(n+1)/2}dx$$

により定義する。このとき、$s \in \mathbb{C}$ の有理型関数 $e_i(s)$ があって、局所関数等式

$$Z_(s,\Phi) = \sum_{i=1}^{t} e_i(s) Z_i(\frac{n+1}{2}-s,\widehat{\Phi})$$

が成り立つ。ただし、Fourier 変換 $\widehat{\Phi}$ は

$$\widehat{\Phi}(x) = \int_N \Phi(y)\psi(\mathrm{tr}(xy))dy$$

で定義される。また、N の Haar measure dy はこの Fouier 変換が L^2-norm を保存するように正規化しておくものとする。

$\Phi \in \mathcal{S}(N)$ に対して $f_\Phi^{(s)} \in I(s)$ を $f_\Phi^{(s)}(wy) = \Phi(y)$, $(y \in N)$ となるように定める。すなわち

$$f_\Phi^{(s)}(g) = \begin{cases} |\det A|^{s+(n+1)/2}\Phi(y) & \text{if } g = pwy, p = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}, y \in N \\ 0 & g \notin PwN. \end{cases}$$

このとき、対応する退化 Whittaker 関数の原点での値は

$$\begin{aligned} W_T(s)f_\Phi^{(s)}(\mathbf{1}_{2n}) &= \int_N \phi(y)\overline{\psi(\mathrm{tr}(Ty))}dy \\ &= \widehat{\Phi}(-T) \end{aligned}$$

となる。

退化 Whittaker 関数の関数等式から

$$W_T(-s) \circ M(s)f_\Phi^{(s)}(\mathbf{1}_{2n}) = \kappa_T(s)\widehat{\Phi}(-T)$$

が成り立つ。

左辺を計算するため、 $M(s)f_\Phi^{(s)}$ を計算する。$x \in N \simeq \mathrm{Sym}_n(F)$ に対して $w\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は

$$w\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^{-1} & 1 \\ 0 & -x \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & -x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と分解されるので

$$\begin{aligned} M(s)f_\Phi^{(s)}(wy) &= \int_N f_\Phi^{(s)}(wxwy)dx \\ &= \int_N |\det x^{-1}|^{s+(n+1)/2}\Phi(-x^{-1}+y)dx \\ &= \int_N |\det x|^s \Phi(x+y)d^\times x \end{aligned}$$

となる。$\Phi_y(x) = \Phi(y+x)$ とおけば上の式の右辺は

$$\int_N |\det x|^s \Phi_y(x)d^\times x = Z(s, \Phi_y)$$

と表される。これを使うと、

$$\begin{aligned} W_T(-s) \circ M(s)f_\Phi^{(s)}(\mathbf{1}_{2n}) &= \int_N Z(s, \Phi_y)\overline{\psi(\mathrm{tr}(Ty))}dy \\ &= \sum_{i=1}^t e_i(s) \int_N Z(\frac{n+1}{2} - s, (\Phi_y)^\frown)\overline{\psi(\mathrm{tr}(Ty))}dy \end{aligned}$$

$N \simeq \mathrm{Sym}_n(F)$ の compact open subgroup $B \neq \emptyset$ をとる。B の dual lattice を $\widehat{B}$ で表わし、B の特性関数を $\mathrm{char}_B(x)$ で表す。

$$\begin{aligned}
&\int_N Z(\frac{n+1}{2}-s,(\Phi_y)^\frown)\overline{\psi(\mathrm{tr}(Ty))}dy \\
&=\lim_{r\to\infty}\int_{y\in\mathfrak{p}_F^{-r}B}\int_{x\in Y_i}|\det x|^{-s}\widehat{\Phi}(x)\overline{\psi(\mathrm{tr}(yx))\psi(\mathrm{tr}(Ty))}dxdy \\
&=\int_{x\in Y_i}|\det x|^{-s}\widehat{\Phi}(x)\lim_{r\to\infty}\int_{y\in\mathfrak{p}_F^{-r}B}\overline{\psi(\mathrm{tr}(y(T+x)))}dxdy \\
&=\int_{x\in Y_i}|\det x|^{-s}\widehat{\Phi}(x)\lim_{r\to\infty}\int_{y\in\mathfrak{p}_F^{-r}B}\overline{\psi(\mathrm{tr}(y(T+x)))}dxdy \\
&=\int_{Y_i}|\det x|^{-s}\widehat{\Phi}(x)\lim_{r\to\infty}\int_{y\in N}\mathrm{char}_{\mathfrak{p}_F^{-r}B}(y)\overline{\psi(\mathrm{tr}(y(T+x)))}dxdy
\end{aligned}$$

$\mathrm{char}_{\mathfrak{p}_F^{-r}B}(x)$ の Fourier 変換は $\mathrm{Vol}(\mathfrak{p}_F^{-r}B)\mathrm{char}_{\mathfrak{p}_F^{r}\widehat{B}}(x)$ で与えられるから、

$$\begin{aligned}
&\int_N Z(\frac{n+1}{2}-s,(\Phi_y)^\frown)\overline{\psi(\mathrm{tr}(Ty))}dy \\
&=\lim_{r\to\infty}\mathrm{Vol}(\mathfrak{p}_F^{r}\widehat{B})^{-1}\int_{Y_i}|\det x|^{-s}\widehat{\Phi}(x)\mathrm{char}_{\mathfrak{p}_F^{r}\widehat{B}}(x+T)dx \\
&=\begin{cases}|\det T|^{-s}\,\widehat{\Phi}(-T) & \text{if } T\in Y_i \\ 0 & \text{if } T\notin Y_i\end{cases}
\end{aligned}$$

従って、退化 Whittaker 関数の関数等式にあらわれる $\kappa_T(s)$ は $T\in Y_i$ のとき、

$$\kappa_T(s)=|\det T|^{-s}e_i(s)$$

で与えられる。

$e_i(s)$ は Sweet [11] により計算されていて、その具体的な形は $T\in Y_i$ のとき、n が奇数ならば

$$\begin{aligned}
e_i(s)=&\varepsilon'(s-\frac{n-1}{2},1,\psi)^{-1}\prod_{i-1}^{(n-1)/2}\varepsilon'(2s-n+2i,1,\psi)^{-1} \\
&\times|2|_F^{-(n-1)s+(n(n-1)/4}\langle -1,\det T\rangle^{(n-1)/2}\langle -1,-1\rangle^{(n^2-1)/8}\epsilon_T
\end{aligned}$$

n が偶数のときは

$$\begin{aligned}
e_i(s)=&\varepsilon'(s-\frac{n-1}{2},1,\psi)^{-1}\prod_{i=1}^{n/2}\varepsilon'(2s-n+2i,1,\psi)^{-1} \\
&\times|2|_F^{-ns+(n(n-1)/4}\varepsilon(\frac{1}{2},\chi_T,\psi)^{-1}\varepsilon'(s+\frac{1}{2},\chi_T\psi)
\end{aligned}$$

で与えられる。ここで $\langle *,*\rangle$ は Hilbert symbol で ϵ_T は対称行列 T の Hasse invariant (T が対角行列 $\mathrm{diag}(t_i)$ のとき、$\epsilon_T=\prod_{i<j}\langle t_i,t_j\rangle$) で、

$$\chi_T(x)=\langle(-1)^{n/2}\det T,x\rangle,$$

$$\varepsilon(s,\chi)=\varepsilon(s,\chi,\psi)\frac{L(1-s,\chi)}{L(s,\chi)}$$

である。

これから $b(T,s)$ の関数等式が導かれる。$b(T,s)$ は q^{-s} の有理関数で、

$$b(T,s)=\gamma(T,q^{-s})F(T,q^{-s}),\quad \gamma(T,X),F(T,X)\in\mathbb{Z}[X],$$

$$\gamma(T,q^{-s})=\begin{cases}\zeta_F(s)^{-s}\prod_{i=1}^{(n-1)/2}\zeta_F(2s-2i)^{-1} & 2|n\\ \zeta_F(s)^{-s}L(s-\frac{n}{2},\chi_T)\prod_{i=1}^{n/2}\zeta(2s-2i)^{-1} & 2\nmid n\end{cases}$$

という形であることが知られて ([7], [9]) いる。これから、$F(T,X)$ は次の形の関数等式を満たすことがわかる。

n が奇数のとき、

$$F(T,q^{-n-1}X^{-1})=\zeta(T)(q^{-(n+1)/2}X)^{-\mathrm{ord}(2^{n-1}\det T)}F(T,X),$$

ここで

$$\zeta(T)=\langle -1,\det T\rangle^{(n-1)/2}\langle -1,-1\rangle^{(n^2-1)/8}\epsilon_T$$

は T が F 上 split するとき 1 でそうでないとき -1 の値を取る。

n が偶数のときは

$$F(T,q^{-n-1}X^{-1})=(q^{(n+1)/2}X)^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{D}_T^{-1}2^n\det T)}F(T,X)$$

が成り立つ。ここで $\mathfrak{D}_T$ は χ_T の conductor である。$F=\mathbb{Q}_p$ のとき、この式は桂田の関数等式 ([6]) と一致する。

3. Unitary 群の場合

以上の方法は unitary 群に対しても同様に適用することができる。この場合の退化 Whittaker 関数の関数等式は Kudla, Sweet ら ([4], [8]) によって計算されている。ここでは計算の結果だけを述べることにする。

F を局所体、E/F を２次拡大または $E=F\oplus F$ とする。$\mathfrak{D}_{E/F}$ を E/F の discriminant ideal とする。E/F に対応する $F^\times$ の指標を χ で表す。

$$\xi_{E/F}=\begin{cases}1 & E=F\oplus F\\ -1 & E/F\text{ が不分岐２次拡大のとき}\\ 0 & E/F\text{ が分岐２次拡大のとき}\end{cases}$$

とおく。σ を $\mathrm{Gal}(E/F)$ の生成元 (E が体のとき) 、または $\sigma(f_1,f_2)=(f_2,f_1)$ ($E=F\oplus F$ のとき) として、m 次の Hermite 行列の空間を

$$\mathrm{Herm}_m(E/F)-\{x\in \mathrm{M}_m(E)\,|\,\sigma({}^tx)-x\}$$

で定義する。$E=F\oplus F$ ならば $\mathrm{Herm}_m(E/F)\simeq \mathrm{M}_m(F)$ である。

m 次 Hermite 行列 H に対して siegel series $b(H,s)$ を

$$b(H,s)=\int_{\mathrm{Herm}_m(E/F)}|\nu(R)|^{-s}\psi(\mathrm{tr}_{E/F}\circ\mathrm{tr}(HR))dR,\qquad \mathrm{Re}(s)\gg 0$$

により定義する。ここで $\nu(R)$ は R の elementary divisor (F の ideal になる) の分母の 積である。

このとき、$b(H,s)$ は q^{-s} の有理関数で、

$$b(H,s)=\gamma(E/F,q^{-s})F(H,q^{-s}),\quad \gamma(E/F,X),F(H,X)\in\mathbb{Z}[X],$$

$$\gamma(E/F,q^{-s})=\prod_{i=1}^{[(m+1)/2]}(1-q^{2i}X)\prod_{i=1}^{[m/2]}(1-q^{2i-1}\xi_{E/F}X).$$

という形であることが知られて ([10]) いる。このとき、$F(H,X)$ は次の形の関数等式を満たす。

$m=2n+1$ が奇数のとき、

$$F(H,q^{-2m}X^{-1})=(q^mX)^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{D}_{E/F}^n\det H)}F(H,X),$$

$m=2n$ が偶数のとき、

$$F(H,q^{-2m}X^{-1})=\chi((-1)^n\det H)(q^mX)^{-\mathrm{ord}(\mathfrak{D}_{E/F}^n\det H)}F(H,X)$$

が成り立つ。

References

[1] S. Böcherer, *Über die Fourierkoeffizienten der Siegelscher Eisensteinreihen*, Manuscripta Math. **45** (1984) 273–288.

[2] P. Feit, *Poles and residues of Eisenstein series for symplectic and unitary groups*, Momoirs of the AMS. **346** (1986).

[3] E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen*, Springer-Verlag, (1983).

[4] M. Harris, S. Kudla, W. J. Sweet, *Theta dichotomy for unitary groups*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996) 941–1004.

[5] T. Ikeda, *On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree* $2n$, Ann. Math. **154** (2001) 641–681.

[6] H. Katsurada, *An explicit formula for Siegel series*, Amer. J. Math. **121** (1999) 415–452.

[7] Y. Kitaoka, *Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms*, Nagoya Math. J. **95** (1984) 73–84.

[8] M. Harris, S. Kudla, W. J. Sweet, *Degenerate principal series representations for* $\mathrm{U}(n,n)$, Israel J. Math. **98** (1997) 253–306.

[9] G. Shimura, *Euler products and Fourier coefficients of automorphic forms on symplectic groups*, Inv. Math. **116** (1994) 531–576.

[10] G. Shimura, *Euler products and Eisenstein series*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **93** the American Mathematical Society, Providence, RI, (1997)

[11] W. J. Sweet, *A computation of the gamma matrix of a family of p-adic zeta integrals*, J. Number Theory **55** (1995) 222–260.

Graduate school of mathematics, Kyoto University, Kitashirakawa, Kyoto, 606-8502, Japan

E-mail address: `ikeda@kusm.kyoto-u.ac.jp`