数理解析研究所講究録 1321 巻 2003 年 50-61

SPHERICAL FUNCTIONS ON THE SYMMETRIC VARIETY $GL_{2n}(F)/GL_n(E)$ WHERE E/F IS QUADRATIC UNRAMIFIED

高野 啓児 (Keiji TAKANO)

明石工業高等専門学校 (Akashi College of Technology)

Introduction.

F を $\mathfrak{p}$- 進体、$\tau \in F^\times$ を non-square とし、$E = F(\sqrt{\tau})$ とおく。F- ベクトル空間としての同一視 $E^n \simeq F^{2n}$ により群 $GL_n(E)$ は $GL_{2n}(F)$ の部分群とみなされる。E^n の具体的な F-basis の取り方にしたがい例えば $a + \sqrt{\tau}b \in GL_n(E)$ $(a, b \in \mathrm{Mat}_n(F))$ を $GL_{2n}(F)$ の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ \tau b & a \end{pmatrix}$ と同一視する。この同一視による $GL_n(E)$ の像は内部自己同型 $\mathrm{Int}\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ \tau 1_n & 0 \end{pmatrix}$ (involution になる) による fixator となっており、$(GL_{2n}(F), GL_n(E))$ は (より正確には $(GL_{2n/F}, R_{E/F}(GL_{n/E}))$ は F 上の) symmetric pair である。これが Gelfand pair となることが Guo により ([G]) 知られている。

加藤信一氏との共同研究により、E/F が不分岐な場合にこの symmetric pair の球関数の明示公式が得られたのでここに紹介する。本レポートの議論の構成、証明の方法などほとんどは [T2] と同様で、相対不変式の複素べきの Poisson 変換で構成する球関数の表示公式を正規化し、一般次元の明示公式の導出を階数 1 の場合へ帰着させるが、この例では階数 1 の場合も含めて実質ほとんど計算の必要がなく明示公式が求まってしまう。これまでに研究されている対称多様体 ([HS], [H], [K] など) と比較して最も簡単な例になっていると思われる。

§1 では必要となる剰余類分解の準備をする。ここで極大コンパクト群軌道の記述が、一般的な対称空間において宇澤達氏により与えられた予想 [U] の通りであることをこの対称多様体の場合に確認する。§2 では elementary Bruhat theory により主系列表現の対称多様体での実現を調べ、自明でない実現を与える佐武パラメータを決定する。さらに球関数、すなわち表現の実現のなかの不分岐ベクトル、を具体的に構成し、その表示公式を与える。最後に §3 で $n = 1$ の場合の状況を記述し、それに基づく球関数の正規化の取り方を説明して、表示公式中の未知の係数部分を決定し主結果である明示公式を与える。

Notation.

F を $\mathfrak{p}$- 進体、剰余標数は 2 ではないとする。$|\cdot|, \mathcal{O}, k, q$ をそれぞれ F の絶対値、付値環、剰余体、剰余位数とする。F の素元 $\varpi \in \mathcal{O}$ を固定しておく。$\tau \in F^\times$ を non-square とし、$E = F(\sqrt{\tau})$ とおく。E が F 上不分岐と仮定する。したがって τ は $\mathcal{O}^\times$ に属し、その modulo $\varpi\mathcal{O}$ での $k^\times$ への像も non-square であるとしてよい。

G により群 $GL_{2n}(F)$ を表す。 $K=GL_{2n}(\mathcal{O})$ とし、また G の部分群についての記号を以下の通りとする。

$$P=\left\{\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ O & & * \end{pmatrix}\in G\right\},\quad T=\left\{\begin{pmatrix} * & & O \\ & \ddots & \\ O & & * \end{pmatrix}\in P\right\},\quad U=\left\{\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{pmatrix}\in P\right\},$$

$$P^-=\left\{\begin{pmatrix} * & & O \\ & \ddots & \\ * & & * \end{pmatrix}\in G\right\},\quad U^-=\left\{\begin{pmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}\in P^-\right\},\quad N=N_G(T),\ W=N/T,$$

$$B=\left\{(b_{ij})\in K\,;\, b_{ii}\in\mathcal{O}^\times,\ b_{ij}\in\mathcal{O}\,(i<j),\ b_{ij}\in\varpi\mathcal{O}\,(i>j)\right\},$$

$$U_0=U\cap B,\quad T_0=T\cap B,\quad U_1^-=U^-\cap B,$$

P は G の Borel 部分群、T は極大トーラス、B は岩堀部分群、W は (G,T) の Weyl 群で $2n$ 次対称群 $\mathfrak{S}_{2n}$ と同型。以下、W の元は対応する置換と同一視することもある。

$w_0^{(m)}$ を $m\times m$ 反対角の置換行列 $(\delta_{i,m-j+1})$ とし、また $w_0^{(2n)}$ をたんに w_0 で表す。

$$\sigma=\mathrm{Int}(\varepsilon),\quad \text{where}\quad \varepsilon=\begin{pmatrix} 0 & w_0^{(n)} \\ \tau\cdot w_0^{(n)} & 0 \end{pmatrix}\in G$$

とおく。$\varepsilon^2=\tau\cdot 1_{2n}$ なので σ は G 上の対合となる。σ- 不変元のなす G の部分群を H とする。

$$\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & w_0^{(n)} \end{pmatrix}^{-1}\cdot\varepsilon\cdot\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & w_0^{(n)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ \tau\cdot 1_n & 0 \end{pmatrix}$$

という関係により

$$\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & w_0^{(n)} \end{pmatrix}^{-1}\cdot H\cdot\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & w_0^{(n)} \end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \tau b & a \end{pmatrix}\in G\,;\, a,b\in\mathrm{Mat}_n(F)\right\}$$

がわかり、冒頭に述べたことから $H\simeq GL_n(E)$ となっている。

K,T,N は σ-stable な部分群であり、特に $\varepsilon=w_0\begin{pmatrix} \tau\cdot 1_n & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$ により σ の T,W への作用は $\mathrm{Int}(w_0)$ でも与えられることがわかる。$W_\sigma=\{w\in W;\sigma(w)=w\}$ とおくと、これは w_0 の W での centralizer ということになる。最後に $\sigma(P)=P^-$, $\sigma(U)=U^-$ となっていることに注意しておく。

§1. G/H の軌道分解.

G/H での２種類の軌道分解を、G/H の G 内での実現 X を通して調べる。

$$X=\{x\in G\,;\,x\sigma(x)=1\}$$

とし、σ-twisted conjugation により G を左から X に作用させる。

$$(g,x)\mapsto g*x:=gx\sigma(g)^{-1}\in X \text{ for } g\in G,\ x\in X$$

(1.1) Lemma. G の X への作用は推移的、すなわち

$$X = G * 1.$$

Proof. (Cf. [G]) $x \in X$ は $x\varepsilon x\varepsilon^{-1} = 1$ を意味する。$\varepsilon^2 = \tau \cdot 1$ を両辺に掛けて $(x\varepsilon)^2 = \tau \cdot 1$ となり、$x\varepsilon$ の固有値は $\pm\sqrt{\tau}$ である。それぞれの固有空間は E/F の自己同型でうつりあうので同一次元を持ち、結局 $x\varepsilon$ は E 上で $\begin{pmatrix} \sqrt{\tau}\cdot 1_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{\tau}\cdot 1_n \end{pmatrix}$ に共役となる。いっぽうで ε も同じ性質を持つからこれも E 上同じ対角行列に共役となり、ともに F- 係数である $x\varepsilon$ と ε は F 上共役ということになる。ある $g \in G$ により $x\varepsilon = g\varepsilon g^{-1}$ なので $x = g\sigma(g)^{-1}$. □

これについては体 F を k に、τ をその mod. $\varpi\mathcal{O}$ での像 $\bar{\tau}$ に取り替えて同じ形の involution $\bar{\sigma}$ を $GL_{2n}(k)$ 上で考えても成立することに注意しておく。またこのことを 1-cohomology の記号で表すと

$$H^1(\{\mathrm{id}, \sigma\}, G) = \{1\} \quad (\text{or} \quad H^1(\{\mathrm{id}, \bar{\sigma}\}, GL_{2n}(k)) = \{1\})$$

ということ。

X の P- 軌道を調べる。w_0 を W の最長元とし、

$$V = \{v \in W \,;\, vw_0 \text{ は } w_0 \text{ と } W \text{ のなかで共役}\}$$

とおく。各 $w \in W$ に対しその N での代表元 n_w を固定する。

(1.2) Lemma. $w \in W$ について、

$$Pn_wP^- \cap X \neq \emptyset \iff w \in V.$$

Proof. Bruhat 分解の一意性により $Pn_wP^- \cap X \neq \emptyset$ ならば次が容易にわかる。

- $w\sigma(w) = 1$, すなわち $(ww_0)^2 = 1$ であり、
- $n_w \cdot T \cap X \neq \emptyset$.

2番目から $t = \mathrm{diag}(t_1, \cdots, t_{2n}) \in T$ で $n_w t\sigma(n_w t) = 1$ となるものが取れる。この関係式は $(n_w t\varepsilon)^2 = \tau \cdot 1$, すなわち $t \cdot \varepsilon n_w t \varepsilon n_w = \tau \cdot 1$ と変形され、1番目の条件から $\varepsilon n_w \equiv (\varepsilon n_w)^{-1} \bmod T$ なので結局、

$$\mathrm{diag}(t_1, \cdots, t_{2n})\mathrm{diag}(t_{w_0w(1)}, \cdots, t_{w_0w(2n)}) = \mathrm{diag}(\tau, \cdots, \tau)$$

という式がたつ。ここで τ は non-square なので、$w_0w(i) = i$ となる index i は無いこととなり、そのような置換は最長元に共役になるから $w \in V$. □

これにより $v \in V$ に対してその N での代表 n_v は $N \cap X$ から取れることとなる。さらに (1.1) により、$n_v = \eta_v\sigma(\eta_v)^{-1}$ となるような $\eta_v \in G$ を取っておく。

(1.3) Proposotion.

$$G = \bigcup_{v \in V} P\eta_v H \,(\text{disjoint})$$

Proof. Bruhat 分解と **(1.2)** により

$$X = \bigcup_{v \in V} (Pn_v P^- \cap X)$$

となる。またよく知られた代数閉体上の Springer の理論 ([S]) 同様、

$$Pn_v P^- \cap X = P * n_v$$

が示され、**(1.1)** により命題が証明される。 □

$x \in \mathrm{Mat}_{2n}(F)$ に対し $d_i(x)$ を x の右下 $i \times i$ block の行列式とする。$x \in X$ と $p \in P$ に対し

$$d_i(p * x) = d_i(p\sigma(p)^{-1}) d_i(x)$$

となり、$p \mapsto d_i(p\sigma(p)^{-1})$ は P の F-rational character となっている。つまり d_i は X 上の P- 相対不変式である。

$$X_0 = \{\, x \in X \,;\, d_i(x) \neq 0 \,(1 \leqq i \leqq n) \,\}$$

とおく。F の $\mathfrak{p}$- 進位相から誘導される X の位相に関し X_0 は X の開稠密な部分集合で、$X_0 = P * 1$ がわかる。故に **(1.3)** の分解で、$P \cdot H$ が唯一つの開稠密 (P, H) 両側剰余類となる。(これは一般論からわかることでもあるが。)

次に K- 軌道の記述を与える。方法は [T1],[T2] とほぼ同じであるから概略のみに止める。$\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_{2n}) \in \mathbb{Z}^{2n}$ に対し $\varpi^\mu = \mathrm{diag}(\varpi^{\mu_1}, \cdots, \varpi^{\mu_{2n}}) \in T$ とおく。まず Cartan 分解の一意性から次は直ちに確かめられる。

(1.4) Lemma. $K\varpi^\mu K \cap X \neq \emptyset$, $\mu_1 \geqq \cdots \geqq \mu_{2n}$
$\iff \mu_1 \geqq \cdots \geqq \mu_n \geqq 0$, $\mu_{2n-i+1} = -\mu_i \,(1 \leqq i \leqq n)$

$\Lambda = \{\, \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{Z}^n \,;\, \lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_n \geqq 0 \,\}$ とおき、各 $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$t_\lambda = \mathrm{diag}(\varpi^{\lambda_1}, \cdots, \varpi^{\lambda_n}, 1, \cdots, 1) \in T$$

とおく。**(1.4)** に記述されているような ϖ^μ はすべて $t_\lambda \sigma(t_\lambda)^{-1}$ の形に書かれる。Cartan 分解より

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (Kt_\lambda \sigma(t_\lambda)^{-1} K \cap X)$$

がわかり、さらに $Kt_\lambda \sigma(t_\lambda)^{-1} K \cap X$ 上 K が推移的であること、つまり

$$Kt_\lambda \sigma(t_\lambda)^{-1} K \cap X = K * t_\lambda \sigma(t_\lambda)^{-1} (= Kt_\lambda * 1)$$

を示すことで X の K- 軌道、あるいは G の (K, H)- 両側剰余類分解の記述が与えられる。上の K- 推移性は、1-cohomology vanishing

$$H^1(\{\mathrm{id}, \sigma\}, t_\lambda K t_\lambda^{-1} \cap \sigma(t_\lambda K t_\lambda^{-1})) = \{1\}$$

に言い換えられる。$t_\lambda K t_\lambda^{-1} \cap \sigma(t_\lambda K t_\lambda^{-1})$ の元の entries を調べるとこれが K の部分群であることと、さらに mod $\varpi\mathcal{O}$ での $GL_{2n}(k)$ への像 M_λ の形が具体的にわかる。上の 1-cohomology vanishing は mod ϖ での $H^1(\{\mathrm{id}, \bar{\sigma}\}, M_\lambda)$ の vanishing に帰着され、それは[T1],[T2] で有限体の Galois 対合に関する Lang の定理に訴えたところをここでは **(1.1)** 直後の注意で代用することで証明できる。

結論は、

(1.5) Proposition.

$$G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} K t_\lambda H \,(\text{disjoint})$$

本節最後に、球関数の表示公式の構成に用いる補題を述べておく。小行列式の直接計算により、

(1.6) Lemma. (Cf. [H]) $b \in B$ と $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$|d_i\,(bt_\lambda * 1)\,| = |d_i(t_\lambda * 1)|\,(\neq 0).$$

したがって特に $Bt_\lambda \subset P \cdot H$ となる。 □

§2. $P\backslash G/H$ の Bruhat theory と H- 球関数の表示公式.

$X_{\mathrm{ur}}(T)$ を T の不分岐指標、すなわち T_0 上自明になっている T から $\mathbb{C}^\times$ への指標全体の集合とする。$\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)$ はまた $\chi|_U \equiv 1$ とすることで P 上の指標とみなす。$(\pi_\chi, I(\chi))$ を $\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)$ が定める不分岐主系列表現とする。すなわち $I(\chi)$ は G 上の、

$$\varphi(pg) = \chi(p)\delta(p)^{1/2}\varphi(g) \quad \text{for } p \in P,\ g \in G$$

をみたす局所定値 $\mathbb{C}$- 値関数 φ 全体の空間で、π_χ は G の右移動による $I(\chi)$ への作用である。上で δ は P の modulus, 具体的には T 上で

$$\delta\,(\mathrm{diag}(t_1, \cdots, t_{2n})) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2n} |t_i t_j^{-1}| = \prod_{1 \leqslant i \leqslant 2n} |t_i|^{2n-2i+1}$$

で与えられる。

λ, ρ をそれぞれ G の $C_c^\infty(G)$ 上の左移動、右移動とする。$\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)$, $d_\ell p$ を P の左不変測度とし、$f \in C_c^\infty(G)$ に対し G 上の関数 $p_\chi(f)$ を

$$(p_\chi(f))\,(g) = \int_P \chi^{-1}(p)\delta(p)^{1/2} f(pg) d_\ell p$$

で与えると $p_\chi(f) \in I(\chi)$ で、G- 準同型 $p_\chi : (\rho, \mathcal{C}_c^\infty(G)) \to (\pi_\chi, I(\chi))$ が定まる。よく知られているように p_χ は全射になる。

まず不分岐主系列表現 $(\pi, I(\chi))$ が G/H 上の局所定値関数の空間 $\mathcal{C}^\infty(G/H)$ の左正則表現に実現できるための χ のみたすべき条件を述べる。$P\backslash G/H$ の所謂 elementary Bruhat theory で、内容は全く [T1] と同じであるから証明は略す。Frobenius の相互律より

$$\mathrm{Hom}_G(I(\chi), \mathcal{C}^\infty(G/H)) \simeq \mathrm{Hom}_H(I(\chi), \mathbb{C}) = (I(\chi)^*)^H$$

なので問題は $I(\chi)$ 上の H- 不変な線型汎関数の存在を調べるということでもある。p_χ の dual map p_χ^* で $I(\chi)$ 上の汎関数を G 上の distribution に引き戻して、$P \times H$- 両側剰余類ごとにこれを調べる。

$\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)$ と、$P\Omega H = \Omega$ となっているような G の局所閉部分集合 Ω に対し、Ω 上の distribution D で

$$\langle D, \lambda(p)\rho(h)f \rangle = \chi(p)^{-1}\delta(p)^{1/2}\langle D, f \rangle \quad \text{for all } p \in P,\, h \in H,\, f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$$

をみたすもの全体の空間を $\mathcal{D}_\chi(\Omega)$ で表す。[H, (1.2)] で示されているように、p_χ^* は同型 $(I(\chi)^*)^H \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_\chi(G)$ を与える。

各 $v \in V$ に対し $\Omega_v = P\eta_v H$ とおき、まず $\mathcal{D}_\chi(\Omega_v)$ を調べる。$R_v = \{r \in P\,;\, n_v^{-1}\sigma(r)n_v = r\}$ とし、これを $P \times H$ の部分群 $\{(r, \eta_v^{-1}r\eta_v) \in P \times H\,;\, r \in R_v\}$ と同一視する。Ω_v は $P \times H$- 等質空間として

$$\Omega_v \simeq P \times H/R_v.$$

$\mathcal{D}_\chi(\Omega_v)$ は高々 1 次元で、これが消えないための判定条件が R_v の modulus δ_v の計算から得られる。ここで R_v は半直積分解 $R_v = (T \cap R_v) \ltimes (U \cap R_v)$ をもつことに注意しておく。

(2.1) Lemma. (i) δ_v は $U \cap R_v$ 上自明であり、また $t \in T \cap R_v$ に対しては $\delta_v(t) = \delta(t)^{1/2}$.

$$\text{(ii)} \quad \dim(\mathcal{D}_\chi(\Omega_v)) = \begin{cases} 1 & \text{if } \chi|_{T\cap R_v} \equiv 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$v \in V$ に対し

$$X_{\mathrm{ur}}(T)_{\sigma,v} = \{\, \chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)\,;\, \chi_{|T\cap R_v} \equiv 1 \,\}$$

とし、また $X_{\mathrm{ur}}(T)_\sigma = X_{\mathrm{ur}}(T)_{\sigma,1}$ とおく。$t \in T$ に対し $n_v^{-1}\sigma(t)n_v \cdot t \in T \cap R_v$ なので $\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)_{\sigma,v}$ ならば すべての $t \in T$ に対し $\chi(v^{-1}\sigma(t)vt) = 1$, つまり $v \cdot \chi = \chi^{-1}$ となる。ただしここで $w \cdot \chi$ は $w \in W$ の $\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)$ への自然な作用を表す。

$$w \cdot \chi(t) = \chi(n_w^{-1}tn_w).$$

$w \cdot \chi = \chi$ となる $w \in W$ が $w = 1$ に限られるとき χ は regular であるというのだった。

(2.2) Proposition.

(i) $(I(\chi)^H)^* \simeq \mathcal{D}_\chi(G) \neq (0)$ ならば、$\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)_{\sigma,v}$ となる $v \in V$ が存在する。とくに χ が regular ならこのような $v \in V$ は一意に決まる。

(ii) $(I(\chi)^H)^* \simeq \mathcal{D}_\chi(G) \neq (0)$ ならば、${}^w\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)_\theta$ となる $w \in W$ が存在する。

(iii) χ が regular なら $(I(\chi)^H)^* \simeq \mathcal{D}_\chi(G)$ は高々 1 次元である。さらにもし $\mathcal{D}_\chi(G) \neq (0)$, $\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)_{\sigma,v}$ であれば、$0 \neq D \in \mathcal{D}_\chi(G)$ に対しその support $\mathrm{supp}(D)$ が Ω_v の閉包 Ω_v^{cl} で与えられる。

[T1] との違いは $P\backslash G/H$ の記述で、ここではこれが Weyl 群のひとつの共役類となっている ((**1.3**)) ことから (ii) で χ の regularity が必要無くなっている。

これにより、不分岐主系列表現 $I(\chi)$ の $\mathcal{C}^\infty(G/H)$ での自明でない実現が存在する場合として generic には ($I(\chi) \simeq I(w\cdot\chi)$ だから) χ は $X_{\mathrm{ur}}(T)_\sigma$ からとってやればよいこと、またその実現が（やはり generic には） unique であることが分かる。

以降、$\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)_\sigma$ と限定し、χ は regular と仮定する。

$$\chi_i(x) = \chi(\mathrm{diag}(1,\cdots,1,\overset{i}{\check{x}},1,\cdots,1))$$

とおくと $\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)_\theta$ ならば各 $1 \leqq i \leqq n$ に対し $\chi_{2n-i+1} - \chi_i^{-1}$ となっている。またここで $\chi_i = |\cdot|^{s_i}$ ($s_i \in \mathbb{C}$), $z_i = \chi_i(\varpi) = q^{-s_i} \in \mathbb{C}^\times$ とおくことにする。すると $s_{2n-i+1} = -s_i$ としてよく、$\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)_\theta$ は

$$\chi(\mathrm{diag}(t_1,\cdots,t_n)) = \prod_{i=1}^n |t_i t_{2n-i+1}^{-1}|^{s_i}$$

という形で表されることになる。ここで、

$$\begin{cases} s_i' = s_i - s_{i+1} - 1 & \text{for } i < n, \\ s_n' = s_n - 1/2 \end{cases}$$

として、§1. で与えた相対不変式 d_i を用いて $\mathrm{Re}(s_i') > 0$ で G 上の関数 Δ_χ を

$$\Delta_\chi(g) = \prod_{i=1}^n |d_i\left(g\sigma(g)^{-1}\right)|^{s_i'}$$

で定める。d_i の P- 相対不変性から、$p \in P$, $g \in G$, $h \in H$ に対し

$$\Delta_\chi(pgh) = \chi^{-1}\delta^{1/2}(p)\Delta_\chi(g)$$

が確かめられる。さて $\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)_\theta$ で $\mathrm{Re}(s_i') > 0$ となるものに対し、$I(\chi)$ 上の線型汎関数 ℓ_χ を、

$$\langle \ell_\chi, \varphi \rangle = \oint_{P\backslash G} \Delta_\chi(\dot{g})\varphi(\dot{g})d\dot{g} \quad \left(= \int_K \Delta_\chi(k)\varphi(k)dk \right)$$

で定義する。すると $\langle \ell_\chi, \pi_\chi(h)\varphi \rangle = \langle \ell_\chi, \varphi \rangle$ つまり ℓ_χ は H- 不変線型汎関数を与えている。またこの積分は全 $(s_1, \cdots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ についての有理型関数に解析接続される。$\langle \ell_\chi, p_\chi(\mathrm{ch}_B) \rangle = \mathrm{vol}(B)$ なのでこれで少なくとも 0 ではない $I(\chi)$ 上の H- 不変線型汎関数が具体的に取れたことになる。この ℓ_χ を用いて G/H の球関数 S_χ を

$$S_\chi(g) = \langle \ell_\chi, \pi_\chi(g^{-1})\phi_{K,\chi} \rangle$$

で定義する。ここで $\phi_{K,\chi}$ は $I(\chi)$ の K 上で恒等的に 1 である元を表す。この S_χ は $K\backslash G/H$ 上の関数となるので **(1.5)** で与えた代表元 $g = t_\lambda$ での値で完全に定まることになる。

$\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)$ を regular とし、$w \in W$ に対し $T_w^\chi : I(\chi) \to I(w\cdot\chi)$ を standard intertwining operator ([C, §3]), $c_w(\chi)$ を $T_w^\chi(\phi_{K,\chi}) = c_w(\chi)\phi_{K,{}^w\chi}$ で定まる因子とする。ここでは $c_w(\chi)$ は具体的に

$$c_w(\chi) = \prod_{i<j, w(i)>w(j)} \frac{1 - q^{-1}z_i z_j^{-1}}{1 - z_i z_j^{-1}}$$

と与えられる ([C, (3.1), (3.3)]) 。

Casselman の $I(\chi)^B$ の基底 $\{f_{w,\chi}\}_{w\in W}$ ([C, §3]) を用いた式 $\phi_{K,\chi} = \sum_{w\in W} c_w(\chi) f_{w,\chi}$ ([C, (3.8)]) を少しひねった形で、

$$\phi_{K,\chi} = \frac{\mathrm{vol}(Bw_0B)}{\mathrm{vol}(B)} \sum_{w\in W} c_{w_0w}(\chi) T_{w^{-1},w\cdot\chi}(p_{w\cdot\chi}(\mathrm{ch}_B))$$

という式が得られる ([KMS]) 。ここから、

$$S_\chi(t_\lambda) = \frac{\mathrm{vol}(Bw_0B)}{\mathrm{vol}(B)} \sum_{w\in W} c_{w_0w}(\chi) \langle \ell_\chi, T_{w^{-1},w\cdot\chi}(p_{w\cdot\chi}(\mathrm{ch}_{Bt_\lambda})) \rangle.$$

(これ自体は ℓ_χ の H-invariance も条件 $\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)_\sigma$ も用いずに得られる。) ここで、

(2.3) Lemma.
(i) $w \in W_\sigma$ ならば $w\cdot\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)_\sigma$ であり、

$$\left(T_{w^{-1},w\cdot\chi}\right)^* (\ell_\chi) = b_w(\chi)\ell_{w\cdot\chi}$$

となる定数 $b_w(\chi) \in \mathbf{C}$ が存在する。
(ii) $\langle \ell_\chi, p_\chi(\mathrm{ch}_{Bt_\lambda}) \rangle = \mathrm{vol}(B)\cdot\chi^{-1}\delta^{1/2}(t_\lambda)$.
(iii) $w \notin W_\sigma$ ならば $w\cdot\chi \notin X_{\mathrm{ur}}(T)_\sigma$ であり、このとき

$$\langle \left(T_{w^{-1},w\cdot\chi}\right)^* (\ell_\chi), p_{w\cdot\chi}(\mathrm{ch}_{Bt_\lambda}) \rangle = 0.$$

Proof. (i) は **(2.2)** (iii) より。(ii) は **(1.6)** より。(iii) では distribution $p_{w\cdot\chi}^* \circ T_{w^{-1},w\cdot\chi}^*(\ell_\chi)$ の support が $1 \neq v \in V$ に対する $(\Omega_v)^{cl}$ となる (**(2.2)** (iii)) から、**(1.6)** より

$$\mathrm{supp}(p_{w\cdot\chi}^* \circ T_{w^{-1},w\cdot\chi}^*(\ell_\chi)) \cap Bt_\lambda \subset (\Omega_v)^{cl} \cap \Omega_1 = \emptyset.$$

□

さてこれにより、

(2.4) Proposition. $\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)_\sigma$ が regular であれば、$\lambda \in \Lambda$ に対して

$$S_\chi(t_\lambda) = \mathrm{vol}(Bw_0B) \sum_{w \in W_\sigma} c_{w_0w}(\chi) b_w(\chi)(w\chi^{-1} \cdot \delta^{1/2})(t_\lambda).$$

(2.4) では因子 $b_w(\chi)$ の部分が未知のままなのでまだ明示公式とはなっていない。この因子の値を求めるか、あるいは別の方法でともかく指標 $(w\chi^{-1} \cdot \delta^{1/2})$ の係数を決定すれば S_χ の明示公式が得られることになる。次節で、この S_χ を χ の関数として W_σ- 不変となるよう正規化を施し、その指標の係数部分を決定し明示公式を与える。

§3. 階数 1 の場合と一般次元の明示公式.

(2.3) (i) の線型汎関数の関数等式の両辺を $\pi_{w\cdot\chi}(t_\chi^{-1})\phi_{K,w\cdot\chi}$ にぶつけて球関数の関数等式

$$c_{w^{-1}}(w\chi)S_\chi = b_w(\chi)S_{w\cdot\chi}$$

が得られる。これにより $S_\chi(1) = \int_K \Delta_\chi(k)dk$ の値が具体的に知られれば明示公式が得られることになる。

$n=1$ の場合は、$H \simeq E^\times$ が mod center で anisotropic となっており、G/H の構造は簡単になっている。X を具体的に見てみると、

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in X \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & \tau^{-1}c \\ \tau b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から $ad + \tau b^2 = 1$ を得る。$a = 0$ および $d = 0$ は τ が non-square であることに矛盾する。よって $a \neq 0, d \neq 0$ で、さらに $c = -\tau b$ が得られ、結局

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\tau b & a^{-1}(1-\tau b^2) \end{pmatrix} ; a \in F^\times, b \in F \right\}.$$

特に d_1 は X 上消えないことになるから、$X = X_0$ すなわち $G = P \cdot H$ となる。(一般に H が anisotropic であれば閉体上で $G(\bar{F}) = P(\bar{F})H(\bar{F})$ となる。ここでは F-points でもそうなっている。)

(1.5) で、$K \cap X = K * 1$ であった。$n = 1$ のとき、$K \cap X$ の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ -\tau b & a^{-1}(1-\tau b^2) \end{pmatrix}$ について、$b \in \mathcal{O}$, a, $a^{-1}(1-\tau b^2) \in \mathcal{O} \setminus (0)$ だが、ここで τ が mod $\varpi\mathcal{O}$ でも non-square であることより $1 - \tau b^2 \in \mathcal{O}^\times$ がわかる。よって $a, a^{-1}(1-\tau b^2) \in \mathcal{O}^\times$ ということになる。

この観察から、階数 1 においては $b_w(\chi)$ が実質計算なしで求まる。$k \in K$ に対し $d_1(k*1) \in \mathcal{O}^\times$ なので Δ_χ が K 上で 1 となってしまい、

$$S_\chi(1) = \int_K \Delta_\chi(k)dk = 1.$$

したがって $b_w(\chi) = c_{w^{-1}}(w\chi)$ である。

一般次元の場合に戻る。W_σ の生成元の集合 $\{w_1, \cdots, w_n\}$ を、

$$w_i = (i \quad i+1)(2n-i \quad 2n-i+1) \quad (\text{for } i < n), \quad w_n = (n \quad n+1)$$

で与え、B と w_i で生成される parahoric subgroup を B_i, $\phi_{i,\chi} - p_\chi(\mathrm{ch}_{B_i})$ とおく。すると

$$T_{w_i,\chi}(\phi_{i,\chi}) = c_{w_i}(\chi)\phi_{i,w_i\cdot\chi}$$

となることがわかる。線型汎関数の関数等式両辺を $\phi_{i,w\chi}$ にぶつけると、

$$c_{w_i^{-1}}(w_i\chi)\langle \ell_\chi, \phi_{i,\chi}\rangle = b_{w_i}(\chi)\langle \ell_{w_i\chi}, \phi_{i,w_i\chi}\rangle$$

が分かる。

$$a_i(\chi) = \langle \ell_\chi, \phi_{i,\chi}\rangle = \int_{B_i} \Delta(b)db$$

とおく。すると本節冒頭の球関数の関数等式とつなげて

$$\frac{a_i(w_i\chi)}{a_i(\chi)} = \frac{c_{w_i^{-1}}(w_i\chi)}{b_{w_i}(\chi)} = \frac{S_{w_i\cdot\chi}}{S_\chi}$$

を得る。各 i に対し $a_i(\chi)$ を直接、計算する。この積分が階数 1 の場合の積分と同等なもので、

・$i < n$ に対しては、$\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_E)$ 上の簡単な積分となり、結果は

$$a_i(\chi) = \mathrm{vol}(B_i)\frac{q}{q+1}\frac{1-q^{-1}z_iz_{i+1}^{-1}}{1-z_iz_{i+1}^{-1}}.$$

・$i = n$ においては、上記階数 1 の場合と全く同じ積分が現れ、結果は

$$a_n(\chi) = \mathrm{vol}(B_n)$$

ここで

$$\underline{a}(\chi) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1-q^{-1}z_iz_j^{-1}}{1-z_iz_j^{-1}} \cdot \frac{1-q^{-1}z_iz_j}{1-z_iz_j}$$

とおくと、すべての i に対して

$$\frac{\underline{a}(w_i\cdot\chi)}{\underline{a}(\chi)} = \frac{a_i(w_i\cdot\chi)}{a_i(\chi)}$$

となってくれることが確かめられる。ふたたび球関数の関数等式にまでつなげて、

$$\frac{\underline{a}(w_i\chi)}{\underline{a}(\chi)} = \frac{a_i(w_i\chi)}{a_i(\chi)} = \frac{S_{w_i\chi}}{S_\chi}.$$

この式は、$\widetilde{S}_\chi := \dfrac{1}{\underline{a}(\chi)} \cdot S_\chi$ が W_σ- 不変であることを示している。(**2.4**) まで戻って、

$$\widetilde{S}_\chi(t_\lambda) = \mathrm{vol}(Bw_0B) \sum_{w \in W_\sigma} \frac{c_{w_0 w}(\chi) b_w(\chi)}{\underline{a}(\chi)} (w\chi^{-1} \cdot \delta^{1/2})(t_\lambda).$$

指標 $(w\chi^{-1} \cdot \delta^{1/2})$ の $w = 1$ での係数が既知の量として $\dfrac{c_{w_0}(\chi)}{\underline{a}(\chi)}$ と分かる。これを $\widetilde{c}(\chi)$ とおくと、$\widetilde{S}_\chi$ の W_σ- 不変性と指標の独立性 (χ は regular) とにより $(w\chi^{-1} \cdot \delta^{1/2})$ の係数は $\widetilde{c}(w \cdot \chi)$ と決まり、これで $\widetilde{S}_\chi$ の明示公式が得られた。$\widetilde{c}(\chi)$ の形を具体的に見るには、$\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)_\sigma$ のときは $z_{2n-i+1} = z_i^{-1}$ となっていることより、

$$c_{w_0}(\chi) = \prod_{1 \leqq i < j \leqq 2n} \frac{1 - q^{-1} z_i z_j^{-1}}{1 - z_i z_j^{-1}} = \underline{a}(\chi)^2 \cdot \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1 - q^{-1} z_i^2}{1 - z_i^2}$$

に注意する。

以上により、次の主結果が得られる。

(4.1) Theorem. $\chi \in X_{\mathrm{ur}}(T)_\sigma$, $\lambda \in \Lambda$ に対し、

$$\widetilde{S}_\chi(t_\lambda) = \mathrm{vol}(Bw_0B) \sum_{w \in W_\sigma} \widetilde{c}(w\chi)(w\chi^{-1} \cdot \delta^{1/2})(t_\lambda),$$

ただしここで

$$\widetilde{c}(\chi) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1 - q^{-1} z_i z_j^{-1}}{1 - z_i z_j^{-1}} \cdot \frac{1 - q^{-1} z_i z_j}{1 - z_i z_j} \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1 - q^{-1} z_i^2}{1 - z_i^2}.$$

References

[C] W. Casselman, *The unramified principal series of $\mathfrak{p}$-adic groups I. The spherical functions*, Compositio Math. **40** (1980), 387–406.

[G] J. Guo, *Uniqueness of generalized Waldspurger model for $GL(2n)$*, Pacific Jour.Math. **180(2)** (1997), 273–289.

[H] Y. Hironaka, *Spherical functions and local densities on hermitian forms*, Jour.Math.Soc.Japan **51(3)** (1999), 553–581.

[HS] Y. Hironaka, F. Sato, *Spherical functions and local densities of alternating forms,*, Amer.J.Math. **110** (1988), 473–512.

[K] S. Kato, *Spherical functions on spherical homogeneous spaces*, Proc.of the 3-rd Summer School on Number Theory, 1995, pp. 54–77. (in Japanese)

[KMS] S. Kato, A. Murase, T. Sugano, *Whittaker-Shintani functions for orthogonal groups,*, to appear in Tohoku Math. Jour.

[T1] K. Takano, *Spherical functions in a certain distinguished model*, Jour.Math.Sci.Univ.of Tokyo **7** (2000), 369–400.

[T2] K. Takano, *Spherical functions in a certain distinguished model of GL_n*, RIMS Koukyuuroku **1281** (2002), 209–219. (in Japanese)

[S] T.A. Springer, *Some results on algebraic groups with involutions*, Algebraic groups and related topics, Adv.St.Pure Math., vol. 6, Academic Press, 1984, pp. 525–543.

[U] T. Uzawa, *Functoriality for distinguished representations and the relative trace formula*, Proc.of the 3-rd Summer School on Number Theory, 1995, pp. 158–167.

AKASHI COLLEGE OF TECHNOLOGY, AKASHI, HYOGO, 674-8501, JAPAN

E-mail address: takano@akashi.ac.jp