

## 古典群の fundamental strata

神戸大学自然科学研究科 宮内通孝 (Michitaka Miyauchi)  
Graduate School of Science and Technology,  
Kobe University

平成 14 年 9 月 28 日

### 1 導入

$F$  を非アルキメデスの局所体とする.  $GL_N(F)$  の既約許容表現の研究において,  $F^N$  の lattice chain から定義される開コンパクト部分群とその表現を用いた手法が有効であった. この方法の出発点となったのが Howe-Moy [3] と Bushnell [1] で与えられた fundamental stratum ([3] では minimal K-type) の概念である.  $GL_N(F)$  の fundamental stratum は, lattice chain から得られる開コンパクト部分群とその既約表現の組として与えられる. これらの論文で  $GL_N(F)$  の既約許容表現が (部分群へ制限したときに) fundamental stratum を含むことが示された.

L.Morris は剰余標数が 2 でない非アルキメデスの局所体上の古典群  $G$  に対して, fundamental strata の構成を試みた. Morris [6] では, ある種の双対性を持つ lattice chain である C-chain から  $G$  の開コンパクト部分群のフィルトレーションを構成し, fundamental  $G$ -strata を定義した. しかし, 彼の定めた fundamental  $G$ -strata は, 一般線形群の fundamental strata の応用としては不適切であり, fundamental  $G$ -strata を用いた古典群の表現論的結果は, 未だ得られていない.

K.Kariyama は [4] で, Morris の C-chain を用いて古典群の fundamental C-stratum を定義し,  $G$  が古典 Chevalley 群の場合に既約 supercuspidal 表現に対応しない split fundamental strata を与えた. 本稿では, fundamental C-strata の存在, すなわち, 古典群  $G$  の任意の既約許容表現は fundamental C-stratum を含むことを証明する. この結果により, 古典群の既約許容表現は fundamental strata でパラメータ付けすることができる.

最近, S.Stevens が [8] で, 自己双対的 lattice sequence を用いた古典群の fundamental strata を定義し, その存在を証明した. 3.3. 節で見るように C-chain は典型的な自己双対的 lattice sequence であり, fundamental C-strata は Stevens の定めた fundamental strata である. 従って, 自己双対的 lattice sequence による fundamental strata の存在は fundamental C-strata の存在の帰結である.

## 2 準備

2.1. この節では  $F$  を対合  $\sigma_0$  を持つ, 標数が 2 でない体とする.  $\varepsilon \in \{\pm\}$ ,  $V$  を非退化  $(\varepsilon, \sigma_0)$ -半双線形形式  $f$  を備えた有限次元  $F$ -線形空間とする. すなわち, 任意の  $v, w \in V$  と  $\lambda \in F$  に対して  $f: V \times V \rightarrow F$  は

$$f(\lambda v, w) = \sigma_0(\lambda)f(v, w) = \varepsilon\sigma_0(f(w, \lambda v))$$

を満足する.

このとき  $X \in \text{End}_F(V)$  に対して次の条件を満たす  $\sigma(X) \in \text{End}_F(V)$  が一意に定まる. 任意の  $v, w \in V$  に対し

$$f(Xv, w) = f(v, \sigma(X)w).$$

写像  $\sigma: \text{End}_F(V) \rightarrow \text{End}_F(V)$  は  $\text{End}_F(V)$  の対合となる.

$V$  上の skew 線形写像の集合を

$$\text{End}_F(V)^- = \{X \in \text{End}_F(V) \mid X + \sigma(X) = 0\}$$

で定義する.

2.2.  $e_0 \in \{1, 2\}$  とする.  $e$  を自然数,  $V = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}/ee_0\mathbf{Z}} V_i$  を非退化  $(\varepsilon, \sigma_0)$ -半双線形形式  $f$  を備えた有限次元  $\mathbf{Z}/ee_0\mathbf{Z}$ -次数付き  $F$ -線形空間とする. 形式  $f$  には次の条件を仮定する: 整数  $c$  で

$$i + j \not\equiv c \pmod{ee_0} \text{ ならば } f(V_i, V_j) = \{0\} \quad (2.2.1)$$

を満たすものが存在する.

$\text{End}_F(V)_l$  を次数  $l$  の斉次線形写像全体の集合とする:

$$\text{End}_F(V)_l = \{X \in \text{End}_F(V) \mid XV_i \subset V_{i+l}, i \in \mathbf{Z}/e\mathbf{Z}\}.$$

$T \in \text{End}_F(V)_e$  で,  $T^{e_0} = \text{id}_V$  かつ  $\sigma(T) = (-1)^{e_0+1}T$  を満たすものが存在すると仮定する.

以下  $X \in \text{End}_F(V)_l$  は  $T$  と可換で, 巾零かつ skew であると仮定し, 自然数  $d$  を  $X^d V = \{0\}, X^{d-1} V \neq \{0\}$  を満足するようにとる. このとき次が成り立つ.

**命題 2.2.1** ([6] 命題 3.3). 上の仮定のもとで,  $V$  の斉次元  $e_i \in V_{m(i)} (1 \leq i \leq s)$ ,  $f_j \in V_{n(j)}, g_j \in V_{k(j)} (1 \leq j \leq t)$  と自然数  $d_i, \delta_j$  で次の条件を満たすものが存在する.

(i)  $X^{d_i} e_i = X^{\delta_j} f_j = X^{\delta_j} g_j = 0$  かつ  $X^a e_i, X^b f_j, X^b g_j (0 \leq a < d_i, 0 \leq b < \delta_j, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t)$  は  $V$  の基底を成す.

(ii) 上の基底の元は以下の場合を除いて互いに直交する.

$$f(X^a e_i, X^{d_i-a-1} e_i) = (-1)^a \alpha_i, \quad \alpha_i \in F^\times$$

または

$$f(X^b f_j, X^{\delta_j-b-1} g_j) = \varepsilon f(X^{\delta_j-b-1} g_j, X^b f_j) = (-1)^b.$$

(iii) 集合  $\{e_i, f_j, g_j\}$  は定数倍を除いて  $T$  の作用で閉じている.

2.3. 命題 2.2.1 の基底を用いて  $H \in \text{End}_F(V)$  を次のように定める:

$$\begin{aligned} H(X^a e_i) &= (1 - d_i + 2a)X^a e_i, \\ H(X^b f_j) &= (1 - \delta_j + 2b)X^b f_j, \\ H(X^b g_j) &= (1 - \delta_j + 2b)X^b g_j. \end{aligned}$$

$X^{d-1} \neq 0$  かつ  $X^d = 0$  であったから  $d = \max\{d_i, \delta_j\}_{i,j}$  である. 整数  $\lambda$  に対し weight  $\lambda$  の weight 空間  $V(\lambda)$  を

$$V(\lambda) = \{v \in V \mid Hv = \mu v, \mu \geq \lambda\}$$

で定義する.  $V(\lambda)$  はそれに含まれる  $H$  の固有ベクトル, すなわち基底  $\{X^a e_i, X^b f_j, X^b g_j\}$  の元で張られる. 特に  $V(\lambda)$  は  $V$  の斉次部分空間である.  $V_i(\lambda) = V(\lambda) \cap V_i$  とすれば  $V_i(\lambda)$  もまた, それに属する基底  $\{X^a e_i, X^b f_j, X^b g_j\}$  の元で張られ,  $TV_i(\lambda) = V_{i+e}(\lambda)$  であることが確かめられる. 定義から, 任意の  $\lambda$  に対し  $XV_i(\lambda) \subset V_{i+1}(\lambda+2)$  である.

明らかに  $\mu \leq \lambda$  ならば  $V(\lambda) \subset V(\mu)$  で, 定義より  $V = V(1-d)$  かつ  $V(d) = \{0\}$  である. 任意の  $i$  に対し  $\lambda_i$  で  $V_i = V_i(\lambda_i)$  を満足する最大の整数  $\lambda_i \leq d-1$  を表すことにすれば,  $TV_i - V_{i+e}$  より  $\lambda_{i+e} - \lambda_i$  である. 次の補題が成立する.

**補題 2.3.1** ([6] 補題 3.4).  $V_{i+ml}(\lambda_i + 2m)$  は  $X^m V_i$  を含む  $V_{i+ml}$  の weight 空間の中で, 最小のものである. 特に  $V_{i+ml}(\lambda_i + 2m) = 0$  と  $X^m V_i = 0$  は同値である.

部分空間  $\{0\} \subsetneq W \subset V_i$  に対しその次数付き補空間  $W^\perp$  を次のように定義する.

$$W^\perp = \{v \in V_{e-i} \mid f(v, W) = \{0\}\}.$$

このとき次の補題は容易である.

**補題 2.3.2.** 斉次 weight 空間  $V_i(\lambda)$  が零空間でないとき,  $V_i(\lambda)^\perp = V_{e-i}(1-\lambda)$  が成立する.

### 3 自己双対的 lattice sequence によるフィルター付け

3.1.  $F$  を剰余標数が 2 でない非アルキメデスの局所体,  $\mathfrak{o}$  をその付値環,  $\mathfrak{p}$  を  $\mathfrak{o}$  の極大イデアル,  $k_F$  を  $F$  の剰余体  $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$  とする.  $F$  は対合  $\sigma_0$  を持つと仮定し,  $F$  の  $\sigma_0$  による固定体を  $F_0 = F^{\sigma_0}$  で表す.  $\mathfrak{o}_0, \mathfrak{p}_0$  をそれぞれ  $F_0$  の付値環とその極大イデアルとする. このとき  $F$  の素元  $\varpi$  は  $\sigma_0(\varpi) = \pm\varpi$  を満たすようにとれる.

$V$  を  $F$  上の  $N$  次元ベクトル空間,  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$  とし,  $f$  を  $V$  上の非退化  $(\varepsilon, \sigma_0)$ -半双線形形式とする.  $G$  を形式  $(f, V)$  の等長変換全体の成す群

$$G = \{g \in GL(V) \mid f(gv, gw) = f(v, w), v, w \in V\}$$

とする.  $f$  から定まる  $A = \text{End}_F(V)$  上の対合を  $\sigma$  で表すとき,  $G$  の Lie 環は,

$$A^- = \{X \in A \mid X + \sigma(X) = 0\}$$

3.2. S.Stevens が [8] で構成した, 自己双対的 lattice sequence によるフィルター付けを思い出そう.  $V$  の開 compact 部分  $\sigma$ -加群を,  $V$  の lattice と呼ぶ. Bushnell-Kutzko が [2] で導入した  $V$  の lattice sequence とは,  $\mathbf{Z}$  から  $V$  の lattice 全体の成す集合への写像  $\Lambda$  で, 次の条件を満足するものをいう:

(i)  $\Lambda(i) \supset \Lambda(i+1)$ ,  $i \in \mathbf{Z}$ ,

(ii) 自然数  $e = e(\Lambda)$  が存在して  $\varpi \Lambda(i) = \Lambda(i+e)$   $i \in \mathbf{Z}$  を満たす.

$\Lambda$  が lattice sequence であるとき, 条件 (ii) を満たす自然数  $e$  は一意に定まり, それを  $\Lambda$  の周期と呼ぶ.

$V$  の lattice  $L$  に対し, その双対 lattice  $L^\#$  を

$$L^\# = \{v \in V \mid f(v, L) \subset \mathfrak{p}\}$$

で定める. このとき  $(L^\#)^\# = L$  が成り立つ. lattice sequence  $\Lambda$  が自己双対的であるとは, 整数  $d$  で

$$\Lambda(i)^\# = \Lambda(d-i), \quad i \in \mathbf{Z}$$

を満たすものが存在するときをいう.

$V$  の lattice sequence  $\Lambda$  より,  $A$  の lattice から成るフィルター付け  $\{\mathfrak{a}_n(\Lambda) \mid n \in \mathbf{Z}\}$  を

$$\mathfrak{a}_n(\Lambda) = \{X \in A \mid X\Lambda(i) \subset \Lambda(i+n), \quad i \in \mathbf{Z}\}$$

で定める. lattice sequence  $\Lambda$  が自己双対的であることは, 任意の  $n$  に対し  $\mathfrak{a}_n(\Lambda)$  が  $\sigma$ -安定であることと同値である.

写像  $\mathrm{tr}_{A/F_0} - \mathrm{tr}_{F/F_0} \circ \mathrm{tr}_{A/F}$  をトレースの合成とする.  $A$  の lattice  $\Gamma$  に対して

$$\begin{aligned} \Gamma^* &= \{X \in A \mid \mathrm{tr}_{A/F_0}(X\Gamma) \subset \mathfrak{p}_0\} \\ &= \{X \in A \mid \mathrm{tr}_{A/F}(X\Gamma) \subset \mathfrak{p}\} \end{aligned}$$

と定義する. このとき, 次が成立する.

**命題 3.2.1** ([2] 命題 2.3, 2.10). (a)  $\mathfrak{a}_0(\Lambda)$  は  $A$  の hereditary order で  $\mathfrak{a}_1(\Lambda)$  はその Jacobson 根基である.

(b)  $\varpi \mathfrak{a}_n(\Lambda) = \mathfrak{a}_{n+e(\Lambda)}(\Lambda)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

(c)  $\mathfrak{a}_n(\Lambda) \cdot \mathfrak{a}_m(\Lambda) \subset \mathfrak{a}_{n+m}(\Lambda)$ ,  $n, m \in \mathbf{Z}$ .

(d)  $\mathfrak{a}_n(\Lambda)^* = \mathfrak{a}_{1-n}(\Lambda)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

$\Lambda$  を自己双対的 lattice sequence とする. このとき, 任意の  $n$  について  $\mathfrak{a}_n(\Lambda)$  は  $\sigma$ -安定であったから

$$\mathfrak{a}_n(\Lambda)^- = \mathfrak{a}_n(\Lambda) \cap A^- = \{X \in \mathfrak{a}_n(\Lambda) \mid X + \sigma(X) = 0\}$$

は  $A^-$  の  $\sigma_0$ -lattice となる.  $G$  の開 compact 部分群  $P_\Lambda$  を

$$P_\Lambda = G \cap \mathfrak{a}_0(\Lambda)^\times$$

で定め,  $P_\Lambda$  の開 compact 部分群から成るフィルター付け  $\{P_{\Lambda,n} \mid n \geq 1\}$  を

$$P_{\Lambda,n} = G \cap (1 + \mathfrak{a}_n(\Lambda)), \quad n \geq 1$$

で定義する.

記号  $\wedge$  は Pontrjagin dual を表すものとし,  $F_0$  の自明でない加法的指標  $\Omega$  でその conductor が  $\mathfrak{p}_0$  であるものを固定する. このとき次が成立する.

**命題 3.2.2** ([7] 補題 3.1, 3.2). (a) 任意の  $n, m > 0$  に対して  $P_{\Lambda,n}$  は  $P_\Lambda$  の正規部分群で, 交換子群  $[P_{\Lambda,n}, P_{\Lambda,m}]$  は  $P_{\Lambda,n+m}$  に含まれる.

(b)  $2n \geq m \geq n > 0$  であるとき, 有限アーベル群の同型  $P_{\Lambda,n}/P_{\Lambda,m} \simeq \mathfrak{a}_n(\Lambda)^-/\mathfrak{a}_m(\Lambda)^-$  が写像  $x \mapsto x - 1$  から誘導される.

(c)  $2n \geq m \geq n > 0$  であるとき, 有限アーベル群の同型  $\mathfrak{a}_{1-m}(\Lambda)^-/\mathfrak{a}_{1-n}(\Lambda)^- \simeq (P_{\Lambda,n}/P_{\Lambda,m})^\wedge; b + \mathfrak{a}_{1-n}(\Lambda)^- \mapsto \psi_b$  が

$$\psi_b(p) = \Omega(\text{tr}_{A/F_0}(b(p-1))), \quad p \in P_{\Lambda,n}$$

により得られる.

**3.3.** L.Morris も [6] で,  $G$  の開 compact 部分群とそのフィルター付けを構成している. ここでは彼の構成した C-filtration を, 自己双対的 lattice sequence によるフィルター付けとして特徴付ける.

$\mathcal{L}$  を  $V$  の lattice から成る集合とする.  $\mathcal{L}$  が包含関係について全順序であり, 更に  $F^\times$  の元の積に関して閉じているとき,  $\mathcal{L}$  は  $V$  の lattice chain であるという.  $\mathcal{L}$  が lattice chain であるとき, 番号付け  $\mathcal{L} = \{L_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  で次の条件を満たすものが存在する.

(i)  $L_i \supseteq L_{i+1}, i \in \mathbb{Z}$ ,

(ii) 自然数  $e$  が存在して  $\varpi L_i = L_{i+e}, i \in \mathbb{Z}$ .

(ii) の  $e$  は  $\mathcal{L}$  により一意に定まる. これを lattice chain  $\mathcal{L}$  の周期と呼び,  $e = e(\mathcal{L})$  と書く. 一般に  $e(\mathcal{L}) \leq \dim_F V = N$  が成り立つ. 以下 lattice chain  $\mathcal{L}$  に対して  $\mathcal{L} = \{L_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  と書けば, 上の条件を満たす番号付けを表すものとする.

$\mathcal{L}$  が  $V$  の lattice chain であるとき,  $\mathcal{L}^\# = \{L^\# \mid L \in \mathcal{L}\}$  もまた lattice chain となり, これを  $\mathcal{L}$  の双対 lattice chain と呼ぶ.  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\#$  であるとき  $\mathcal{L}$  は自己双対的であるという.

**定義 3.3.1** ([6] 補題 4.4). lattice chain  $\mathcal{L}$  と, その双対 lattice chain  $\mathcal{M} = \mathcal{L}^\#$  の組  $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$  が C-chain であるとは,  $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$  が自己双対的 lattice chain で, 更に番号付け  $\mathcal{L} = \{L_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  で

$$M_i \supset L_i \supseteq M_{i+1} \supset L_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z} \tag{3.3.1}$$

を満たすものが存在するときという.

C-chain  $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$  に対して写像  $\Lambda: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{L} \cup \mathcal{M}$  を

$$\Lambda(2i) = M_i \supset \Lambda(2i+1) = L_i, \quad i \in \mathbb{Z}$$

で定義すれば,  $\Lambda$  は周期  $e(\Lambda) = 2e(\mathcal{L})$  の lattice sequence である. また  $\mathcal{M} = \mathcal{L}^\#$  であったから  $L_0^\# = M_c$  を満たす整数  $c$  が一意に存在し, 任意の  $i$  について  $L_i^\# = M_{c-i}$  かつ  $M_i^\# = L_{c-i}$  が成立する. これより  $\Lambda(i)^\# = \Lambda(2c+1-i)$  であることが確かめられ,  $\Lambda$  は自己双対的である.

逆に, 自己双対的 lattice sequence  $\Lambda$  が

C(i)  $\Lambda(2i+1) \supseteq \Lambda(2i+2)$ ,  $i \in \mathbf{Z}$ .

C(ii)  $e(\Lambda)$  は偶数で  $d$  は奇数である.

を満足するとき,  $\mathcal{L} = \{L_i = \Lambda(2i+1) \mid i \in \mathbf{Z}\}$ ,  $\mathcal{M} = \{M_i = \Lambda(2i) \mid i \in \mathbf{Z}\}$  とおけば, C-chain  $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$  が得られる.

上の記号のもとで C-chain と, 条件 C(i), C(ii) を満たす自己双対的 lattice sequence を同一視し,  $\Lambda - (\mathcal{L}, \mathcal{M})$ ,  $e(\Lambda) - 2e(\mathcal{L}) - 2e$ ,  $d - 2c + 1$  と書く.  $\Lambda$  が C-chain であるとき,  $e(\Lambda) \leq 2N$  である.

C-chain  $\Lambda$  から定まる  $A$  のフィルター付け  $\mathfrak{a}_n(\Lambda)$  を記述しよう. lattice chain  $\mathcal{L} = \{L_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$  に対して,  $\mathfrak{A}(\mathcal{L})$  を対応する hereditary order

$$\mathfrak{A}(\mathcal{L}) = \{X \in A \mid XL \subset L, L \in \mathcal{L}\}$$

とし,  $\mathfrak{P}(\mathcal{L})$  をその Jacobson 根基とする. このとき

$$\mathfrak{P}(\mathcal{L})^n = \{X \in A \mid XL_i \subset L_{i+n}, i \in \mathbf{Z}\}, n \in \mathbf{Z}$$

が成り立つ.

$\Lambda = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$  を C-chain とする. このとき, 定義から

$$\mathfrak{a}_{2j}(\Lambda) = \mathfrak{P}(\mathcal{L})^j \cap \mathfrak{P}(\mathcal{M})^j, j \in \mathbf{Z}$$

が従う. これと命題 3.2.1 (d) から

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{2j+1}(\Lambda) &= \mathfrak{a}_{-2j}(\Lambda)^* = (\mathfrak{P}(\mathcal{L})^{-j} \cap \mathfrak{P}(\mathcal{M})^{-j})^* \\ &= (\mathfrak{P}(\mathcal{L})^{-j})^* + (\mathfrak{P}(\mathcal{M})^{-j})^* = \mathfrak{P}(\mathcal{L})^{j+1} + \mathfrak{P}(\mathcal{M})^{j+1} \end{aligned}$$

が任意の  $j$  について成立する.

## 4 古典群の strata

4.1. 古典群の strata は次のように定義される.

**定義 4.1.1** ([8] 定義 2.6). 自己双対的 lattice sequence  $\Lambda$ , 自然数  $n$ , 剰余類  $b + \mathfrak{a}_{1-n}(\Lambda)^-$  に対応する  $P_{\Lambda, n}/P_{\Lambda, n+1}$  の指標  $\psi_b$  から成る三つ組  $(\Lambda, n, \psi_b)$  を stratum と呼ぶ. 商  $n/e(\mathcal{L})$  を stratum の level と呼ぶ.

$\Lambda$  が C-chain で,  $n$  が偶数である stratum  $(\Lambda, n, \psi_b)$  を C-stratum と呼ぶ ([4]).

$(\Lambda, n, \psi_b)$  を stratum,  $k = (n, e(\Lambda))$  とする.  $b \in \mathfrak{a}_{-n}(\Lambda)^-$  であるから,  $y = \varpi^{n/k} b^{e(\Lambda)/k}$  は整環  $\mathfrak{a}_0(\Lambda)$  に属し,  $y$  の固有多項式  $\Phi_b(X)$  は  $\mathfrak{o}$ -係数の多項式である.  $\phi_b(X) = \Phi_b(X) \pmod{\mathfrak{p}} \in k_F[X]$  と置けば, これは  $b + \mathfrak{a}_{1-n}(\Lambda)$  から一意に定まる.

**定義 4.1.2** ([8] 定義 2.7). stratum  $(\Lambda, n, \psi_b)$  が  $\phi_b(X) \neq X^N$  を満たすとき,  $(\Lambda, n, \psi_b)$  は fundamental であるという.

**命題 4.1.3.**  $\Lambda = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$  を C-chain, C-stratum  $(\Lambda, 2n, \psi_b)$  は fundamental でないと仮定する. このとき,  $b + \mathfrak{a}_{1-2n}(\Lambda)$  は巾零元を含む.

**証明** まず  $b \in \mathfrak{a}_{-2n} \subset \mathfrak{P}(\mathcal{L})^{-n}$  である. 仮定より  $\phi_b(X) = X^N$  であるから,  $y^N \in \mathfrak{a}_1(\Lambda)$ ,  $b^{e(\Lambda)N/k} \in \varpi^{-2nN/k} \mathfrak{a}_1(\Lambda) = \mathfrak{a}_{1-2ne(\Lambda)N/k}(\Lambda)$  が従う. これを二乗すれば,  $b^{2e(\Lambda)N/k} \in \mathfrak{a}_{2-4ne(\Lambda)N/k}(\Lambda) \subset \mathfrak{P}(\mathcal{L})^{1-2ne(\Lambda)N/k}$  を得る. 従って, 次の補題から  $b + \mathfrak{P}(\mathcal{L})^{1-n} \subset b + \mathfrak{a}_{1-2n}(\Lambda)$  は巾零元を含む.  $\square$

**補題 4.1.4** ([1] 補題 2.1).  $\mathcal{L}$  を lattice chain,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathfrak{P}(\mathcal{L})^n$  とする. このとき,  $b + \mathfrak{P}(\mathcal{L})^{n+1}$  が巾零元を含む為の必要十分条件は, ある  $m \geq 1$  に対し  $b^m \in \mathfrak{P}(\mathcal{L})^{mn+1}$  となることである.

第 7 節では次の定理の証明を与える.

**定理 4.1.5.**  $\Lambda$  を C-chain,  $x \in \mathfrak{a}_{2j}(\Lambda)^-$  とし,  $x + \mathfrak{a}_{2j+1}(\Lambda)$  は巾零元を含むと仮定する. このとき C-chain  $\Lambda'$  と整数  $j'$  で次の条件を満たすものが存在する.

- (a)  $x + \mathfrak{a}_{2j+1}(\Lambda) \subset \mathfrak{a}_{2j'}(\Lambda')$ .
- (b)  $2j'/e(\Lambda') > 2j/e(\Lambda)$ .

**4.2.**  $G$  の既約許容表現  $\pi$  が stratum  $(\Lambda, n, \psi_b)$  を含むとは,  $\pi$  の  $P_{\Lambda, n}$  への制限  $\pi|_{P_{\Lambda, n}}$  が  $\psi_b$  を含むことをいう.

$\pi$  を既約許容表現,  $\Lambda$  を自己双対的 lattice sequence とする. このとき  $\pi$  は smooth であるから, 十分大きな  $n \geq 1$  に対して  $P_{\Lambda, n}$  で固定されるベクトルを持ち, stratum  $(\Lambda, n, 1)$  を含む. 自己双対的 lattice sequence は存在するから, 任意の既約許容表現はある stratum を含む.

次に本稿の主定理を述べる.

**定理 4.2.1.**  $G$  の既約許容表現  $\pi$  は, 任意の自己双対的 lattice chain  $\Lambda$  に対し,  $P_{\Lambda, 1}$ -fixed vector を持たないと仮定する. このとき,  $\pi$  に含まれる C-stratum の中でその level が最小であるものは fundamental である.

**証明** C-chain の周期は  $2N$  を越えないから,  $\pi$  に含まれる C-stratum の中でその level が最小であるものが存在することを注意しておく.

$(\Lambda, 2n, \psi_b)$  を  $\pi$  に含まれる C-stratum の中でその level が最小であるものとする. この C-stratum が fundamental でないと仮定して, 矛盾を導こう.

命題 4.1.3 より,  $b + \mathfrak{a}_{1-2n}(\Lambda)$  は巾零元を含む. 従って定理 4.1.5 から C-chain  $\Lambda'$  と整数  $j'$  で

$$b + \mathfrak{a}_{1-2n}(\Lambda) \subset \mathfrak{a}_{2j'}(\Lambda') \quad (4.2.1)$$

かつ

$$2j'/e(\Lambda') > -2n/e(\Lambda) \quad (4.2.2)$$

を満たすものが存在する.

(4.2.1) より特に  $\mathfrak{a}_{1-2n}(\Lambda) \subset \mathfrak{a}_{2j'}(\Lambda')$  であり, 双対性から  $\mathfrak{a}_{2n}(\Lambda) \supset \mathfrak{a}_{1-2j'}(\Lambda')$  を得る. ここで  $n' = -j'$  と置けば,  $\mathfrak{a}_{2n}(\Lambda) \supset \mathfrak{a}_{2n'+1}(\Lambda')$  と  $n \geq 1$  から  $n' \geq 0$  を得る. 実際  $n' < 0$  ならば  $1 \in \mathfrak{a}_0(\Lambda') \subset \mathfrak{a}_{2n'+1}(\Lambda')$  となり  $1 \notin \mathfrak{a}_{2n}(\Lambda)$  に反する. 従って, 部分群の包含関係  $P_{\Lambda, 2n} \supset P_{\Lambda', 2n'+1}$  が成立する.

任意の  $p \in P_{\Lambda, 2n}$  に対して  $\psi_b(p)$  は

$$\psi_b(p) = \Omega(\text{tr}_{A/F_0}(b(p-1)))$$

で与えられ, (4.2.1) より  $b \in \mathfrak{a}_{2j'}(\Lambda')$  であるから写像  $\Omega(\text{tr}(b_-)) : \mathfrak{a}_{2n}(\Lambda) \rightarrow \mathbb{C}; x \mapsto \Omega(\text{tr}_{A/F_0}(bx))$  は  $(\mathfrak{a}_{2j'}(\Lambda'))^* = \mathfrak{a}_{2n'+1}(\Lambda')$  上 1 である. 従って  $\psi_b(P_{\Lambda', 2n'+1}) = \{1\}$  となり,  $\pi$  は  $P_{\Lambda', 2n'+1}$  によって固定される零でないベクトルを持ち, 仮定より  $n' \geq 1$  を得る. 特に  $\pi$  は level  $2n'/e(\Lambda')$  の stratum を含む.

このとき (4.2.2) から

$$2n'/e(\Lambda') = -2j'/e(\Lambda') < 2n/e(\Lambda)$$

となり level  $2n/e(\Lambda)$  の最小性に矛盾する.  $\square$

4.3.  $G$  の既約許容表現  $\pi$  に含まれる 2 つの strata に関して考察する.

命題 4.3.1 ([1] 注意 2.9).  $\Lambda$  を自己双対的 lattice sequence,  $n \geq 1, b \in \mathfrak{a}_{-n}(\Lambda)$  とする. 自己双対的 lattice sequence  $\Lambda'$  と  $n' \geq 1$  で次の条件を満たすものが存在するとき, stratum  $(\Lambda, n, \psi_b)$  は fundamental ではない.

- (i)  $b \in \mathfrak{a}_{-n'}(\Lambda')$ ,
- (ii)  $n/e(\Lambda) > n'/e(\Lambda')$ .

証明 仮定より  $y = \varpi^{n/k} b^{e(\Lambda)/k} \in \mathfrak{a}_1(\Lambda')$  を得る.  $\mathfrak{a}_1(\Lambda')$  は hereditary order  $\mathfrak{a}_0(\Lambda')$  の Jacobson 根基であるから  $y$  の固有多項式  $\Phi_b(X)$  は  $\mathfrak{o}$ -係数で, modulo  $\mathfrak{p}$  で  $X^N$  に合同である.  $\square$

[3] 定理 4.1 と同様に次の結果が成立する.

命題 4.3.2.  $\pi$  を  $G$  の既約許容表現とする. strata  $(\Lambda, n, \psi_b), (\Lambda', n', \psi_{b'})$  が  $\pi$  に含まれると仮定する. このとき  $g \in G$  が存在して

$$(b + \mathfrak{a}_{1-n}(\Lambda)^-) \cap g(b' + \mathfrak{a}_{1-n'}(\Lambda')^-)g^{-1} \neq \phi$$

を満たす



従って次の結果を得る.

系 4.3.3.  $\pi$  を  $G$  の既約許容表現とする. strata  $(\Lambda, n, \psi_b)$ ,  $(\Lambda', n', \psi_{b'})$  が  $\pi$  に含まれると仮定する. このとき,  $(\Lambda, n, \psi_b)$  が fundamental であるならば,  $n/e(\Lambda) \leq n'/e(\Lambda')$  が成立する. 特に,  $\pi$  に含まれる二つの fundamental strata の level は等しい.

## 5 C-filtration の巾零剰余類

5.1.  $\Lambda = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$  を C-chain とする. 以下,  $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_n(\Lambda)$ ,  $\Lambda_i = \Lambda(i)$  と略記する. この節では  $\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$  の剰余類について考察する.  $\mathfrak{a}_{2j}$ ,  $\mathfrak{a}_{2j+1}$  は  $\sigma$ -不変であったから,  $\sigma$  より  $\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$  上の対合  $\bar{\sigma}$  が定まる.

剰余類  $X = x + \mathfrak{a}_{2i+1} \in \mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$  が対合  $\bar{\sigma}$  に関して skew であるとき,  $X$  は skew であるという.  $\bar{\sigma}$  の定義から,  $X$  が skew であるための必要十分条件は  $x + \sigma(x) \in \mathfrak{a}_{2j+1}$  となることである.

$(\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1})^-$  を  $\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$  の skew な剰余類全体のなす集合とすれば, 次の補題が成り立つ.

補題 5.1.1 ([6] 補題 6.1). 写像

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{2j}^-/\mathfrak{a}_{2j+1}^- &\rightarrow (\mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1})^- \\ x + \mathfrak{a}_{2j+1}^- &\mapsto x + \mathfrak{a}_{2j+1} \end{aligned}$$

は同型である.

5.2. 命題 3.2.1 (c) により,  $\mathbb{F}_q$  上の  $\mathbb{Z}$ -次数付き多元環

$$\bar{\mathfrak{a}} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$$

が構成される.

剰余類  $X = x + \mathfrak{a}_{2j+1} \in \mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$  が  $\bar{\mathfrak{a}}$  の元として巾零であるとき,  $X$  は巾零であるという.  $X$  が巾零であるための必要十分条件は,  $x^n \in \mathfrak{a}_{2nj+1}$  となる  $n \geq 1$  が存在することである. [1] 補題 2.1 より, この条件は次のように言い換えられる.

命題 5.2.1. 剰余類  $x + \mathfrak{a}_{2j+1}$  が巾零であるための必要十分条件は,  $x + \mathfrak{a}_{2j+1}$  が巾零元を含むことである.

5.3.  $X = x + \mathfrak{a}_{2j+1} \in \mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$  とする.  $V$  の lattice  $L$  に対して, lattice  $XL$  を

$$XL = xL + \mathfrak{a}_{2j+1}L$$

で定める. また  $X^0L = L$  とし,  $n \geq 2$  についても帰納的に  $X^nL = X(X^{n-1}L)$  と定める.

このとき  $\mathfrak{a}_{2j+1} = \mathfrak{P}(\mathcal{L})^{j+1} + \mathfrak{P}(\mathcal{M})^{j+1}$  であることから, 次の補題が成立することが確かめられる.

**補題 5.3.1.**  $\Lambda_i \supset L \supseteq \Lambda_{i+1}$  を満足する lattice  $L$  に対して,  $\Lambda_{i+2j} \supset XL \supset \Lambda_{i+2j+1}$  が成立する.

この補題を帰納的に用いれば, 巾零剰余類についての次の主張を得る.

**補題 5.3.2.** 剰余類  $X = x + \mathfrak{a}_{2j+1} \in \mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$  は巾零であると仮定する. このとき任意の  $i$  に対して, 次の条件を満たす  $r = r(i) \geq 0$  が一意に存在する.

(i)  $0 \leq s < r(i)$  に対し  $\Lambda_{i+2sj} \supset X^s \Lambda_i \supseteq \Lambda_{i+2sj+1}$ ,

(ii)  $X^r \Lambda_i = \Lambda_{i+2rj+1}$ ,

(iii)  $s > r$  に対し  $\Lambda_{i+2sj+1} \supset X^s \Lambda_i$ .

更に  $x^n \in \mathfrak{a}_{2nj+1}$  を満たす任意の  $n \geq 1$  に対して,  $n \geq r(i)$  である.

**注意 5.3.3.** 任意の  $i$  について条件 C(i) より  $\Lambda_{2i+1} \supseteq \Lambda_{2i+2}$  であったから,  $r(2i+1) > 0$  である.

## 6 C-filtration の商

**6.1.** 以下  $e_0$  を拡大  $F/F_0$  の分岐指数とする. 従って,  $F, F_0$  の素元  $\varpi, \varpi_0$  は

$$\varpi_0 = \varpi^{e_0}, \quad \sigma_0(\varpi) = (-1)^{e_0+1} \varpi$$

を満たすように取れる.

C-chain  $\Lambda = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$  に対し,  $\mathbf{Z}$ -次数付き  $k_F$ -ベクトル空間  $\tilde{\Lambda}$  を次のように定義する:

$$\tilde{\Lambda} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \tilde{\Lambda}_i, \quad \tilde{\Lambda}_i = \Lambda_i / \Lambda_{i+1}.$$

$\Lambda$  の周期は  $e(\Lambda) = 2e$  であることから,  $\varpi_0$  の積から同型  $\bar{\varpi}_0 \in \text{End}_{k_F}(\tilde{\Lambda})_{2ee_0}$  が誘導され, この同型により  $\mathbf{Z}/2ee_0\mathbf{Z}$ -次数付きベクトル空間

$$\bar{\Lambda} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}/2ee_0\mathbf{Z}} \bar{\Lambda}_i$$

が構成される.

素元  $\varpi$  の積により,  $\bar{\Lambda}$  には  $2e$  次の斉次同型  $\bar{\varpi}$  が誘導される. 構成の方法から  $\bar{\varpi}^{e_0} = \text{id}_{\bar{\Lambda}}$  を得る.

**6.2.**  $\bar{\Lambda}$  上に非退化な半双線形式を定めよう. はじめに  $\tilde{\Lambda}$  上に形式  $\tilde{f}$  を定義する.

$\mathbf{Z}/2ee_0\mathbf{Z}$  の完全代表系として  $\{i \mid c+1-ee_0 \leq i \leq c+ee_0\}$  を選ぶ. ここで  $e(\Lambda) = 2e$  かつ  $\Lambda_i^\# = \Lambda_{2c+1-i}$  であったことを注意しておく.

$c+1-ee_0 \leq i \leq c+ee_0-1$  に対して, 写像  $f_i$  を

$$f_i: \quad \varpi_0^m \Lambda_i \times \varpi_0^n \Lambda_{-i+2c} \rightarrow \mathfrak{o}/\mathfrak{p}; \\ (\varpi_0^m x, \varpi_0^n y) \mapsto f(x, y) \pmod{\mathfrak{p}}$$

で定義する. このとき  $\Lambda_{-i+2c} = \Lambda_{i+1}^\#$  であることから  $f(\Lambda_i, \Lambda_{-i+2c}) \subset \mathfrak{o}$  である.

$i = c + ee_0$  の場合, 写像  $f_{c+ee_0}$  を

$$f_{c+ee_0} : \varpi_0^m \Lambda_{c+ee_0} \times \varpi_0^n \Lambda_{c+ee_0} \rightarrow \mathfrak{o}/\mathfrak{p};$$

$$(\varpi_0^m x, \varpi_0^n y) \mapsto \varpi_0^{-1} f(x, y) \pmod{\mathfrak{p}}$$

と定義する.  $\Lambda_{c+ee_0} = \varpi_0 \Lambda_{c+ee_0+1}^\#$  であるから  $f_{c+ee_0}$  も矛盾無く定まる.

$\sigma_0$  から誘導される  $k_F$  上の対合を  $\bar{\sigma}_0$  で表す.

**補題 6.2.1.** (a) 任意の  $i$  に対して  $f_i$  は両変数について加法的で, 第 1 変数について  $\bar{\sigma}_0$ -半線形, 第 2 変数について  $\mathfrak{o}$ -線形である.

(b)  $c+1-ee_0 \leq i \leq c+ee_0-1$  に対して  $f_i(x, y) = \varepsilon \bar{\sigma}_0(f_{-i+2c}(y, x))$ , また  $i = c+ee_0$  に対しては  $f_{c+ee_0}(x, y) = \varepsilon \bar{\sigma}_0(f_{c+ee_0}(y, x))$  が成立する.

(c)  $c+1-ee_0 \leq i \leq c+ee_0-1$  に対して  $f_i$  は非退化な形式

$$\varpi_0^m \Lambda_i / \varpi_0^m \Lambda_{i+1} \times \varpi_0^n \Lambda_{-i+2c} / \varpi_0^n \Lambda_{1-i+2c} \rightarrow \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$$

を誘導する. 同様に  $f_{c+ee_0}$  は非退化な形式

$$\varpi_0^m \Lambda_{c+ee_0} / \varpi_0^m \Lambda_{c+ee_0+1} \times \varpi_0^n \Lambda_{c+ee_0} / \varpi_0^n \Lambda_{c+ee_0+1} \rightarrow \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$$

を誘導する.

**証明**  $\sigma_0(\varpi_0) = \varpi_0$  であることから (a), (b) は自明である.

(c).  $c+1-ee_0 \leq i \leq c+ee_0-1$  の場合について示す. 残りの場合も全く同様である.  $\varpi_0^m x \in \varpi_0^m \Lambda_i$  が  $f_i(\varpi_0^m x, \varpi_0^n \Lambda_{-i+2c}) = \{0\}$  を満たすと仮定すれば  $f(x, \Lambda_{-i+2c}) = f(x, \Lambda_{i+1}^\#) \subset \mathfrak{p}$  となり, 双対 lattice の定義から  $x \in \Lambda_{i+1}$  を得る. 第 2 変数についても同様の議論が成立するから  $f_i$  は非退化である.  $\square$

この補題から  $f_i$  を用いて  $\bar{\Lambda}$  上の  $(\varepsilon, \bar{\sigma}_0)$ -半双線形形式  $\tilde{f}$  が自然に定義できる.

最初の形式  $f$  は  $\varpi_0$  と可換であるから  $\tilde{f}$  は  $\bar{\Lambda}$  上の非退化  $(\varepsilon, \bar{\sigma}_0)$ -半双線形形式  $\bar{f}$  を誘導する. 更に  $\bar{f}$  は次の条件を満足する:

$$i+j \not\equiv 2c \pmod{2ee_0} \text{ ならば } \bar{f}(\bar{\Lambda}_i, \bar{\Lambda}_j) \equiv 0. \quad (6.2.1)$$

形式  $\bar{f}$  から定まる  $\text{End}_{k_F}(\bar{\Lambda})$  の対合を  $\bar{\sigma}_{\bar{f}}$  で表せば,  $\sigma_0(\varpi) = (-1)^{e_0+1} \varpi$  であることより  $\bar{\sigma}_{\bar{f}}(\bar{\varpi}) = (-1)^{e_0+1} \bar{\varpi}$  を得る.

これら条件と第 2 章の結果を用いて,  $\bar{\Lambda}$  上の  $\bar{\varpi}$  と可換な巾零かつ skew 斉次準同型から,  $\bar{\Lambda}$  の斉次 weight 空間を構成することができる.

6.3. この節では  $\bar{\Lambda}$  上の巾零かつ skew 斉次準同型と, 巾零かつ skew 剰余類との対応をみる. 剰余類  $X = x + \mathfrak{a}_{2j+1} \in \mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$  に対して  $\tilde{\phi}_{2j}(X) \in \text{End}_{k_F}(\tilde{\Lambda})_{2j}$  が

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{2j}(X) : \Lambda_i/\Lambda_{i+1} &\rightarrow \Lambda_{i+2j}/\Lambda_{i+2j+1}; \\ v_i + \Lambda_{i+1} &\mapsto xv_i + \Lambda_{i+2j+1} \end{aligned}$$

によって定まる.

$X$  は  $\varpi, \varpi_0$  と可換であるから,  $\tilde{\phi}_{2j}(X)$  は  $\bar{\varpi}$  と可換な写像  $\bar{\phi}_{2j}(X) \in \text{End}_{k_F}(\bar{\Lambda})_{2j}$  を誘導する. [2] 命題 2.4 より写像

$$\bar{\phi}_{2j} : \mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1} \rightarrow \text{End}_{k_F}(\bar{\Lambda})_{2j}$$

は単射である. 更に次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1} \times \mathfrak{a}_{2k}/\mathfrak{a}_{2k+1} & \longrightarrow & \mathfrak{a}_{2(j+k)}/\mathfrak{a}_{2(j+k)+1} \\ \bar{\phi}_{2j} \times \bar{\phi}_{2k} \downarrow & & \bar{\phi}_{2(j+k)} \downarrow \\ \text{End}_{k_F}(\bar{\Lambda})_{2j} \times \text{End}_{k_F}(\bar{\Lambda})_{2k} & \longrightarrow & \text{End}_{k_F}(\bar{\Lambda})_{2(j+k)} \end{array}$$

ただし右向きの矢印はそれぞれの積による写像である. これより次の主張を得る.

**命題 6.3.1.** 剰余類  $X = x + \mathfrak{a}_{2j+1} \in \mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$  が巾零であることと  $\bar{\phi}_{2j}(X) \in \text{End}_{k_F}(\bar{\Lambda})_{2j}$  が巾零であることは同値である.

次に skew 剰余類との関連をみよう. 形式  $\bar{f}$  により定まる  $\text{End}_{k_F}(\bar{\Lambda})$  上の対合を  $\bar{\sigma}_{\bar{f}}$  で表す. 形式  $\bar{f}$  は  $f$  から構成されたものであったから, 任意の  $X = x + \mathfrak{a}_{2j+1} \in \mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$  に対して

$$\bar{\phi}_{2j}(\bar{\sigma}(X)) = \bar{\sigma}_{\bar{f}}(\bar{\phi}_{2j}(X))$$

が成立することが確かめられる.

**命題 6.3.2.**  $X = x + \mathfrak{a}_{2j+1} \in \mathfrak{a}_{2j}/\mathfrak{a}_{2j+1}$  が skew であることは,  $\bar{\phi}_{2j}(X)$  が  $\bar{f}$  に関して skew であることと同値である.

## 7 定理 4.1.5の証明

7.1. この節では定理 4.1.5の証明を与える.  $\Lambda = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$   $X = x + \mathfrak{a}_{2j+1}(\Lambda)$   $e = e(\mathcal{L})$  とおく. 先の結果から  $X$  は  $\bar{\Lambda} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/2e_0\mathbb{Z}} \bar{\Lambda}_i$  上に斉次, 巾零, skew かつ  $\bar{\varpi}$  と可換に作用し, 第 2 章の結果を適用して  $\bar{\Lambda}$  の斉次 weight 空間を構成できる.

7.2.  $\mathcal{N} = \{X^a \Lambda_i \mid i \in \mathbb{Z}, a \geq 0\}$  とすれば補題 5.3.2 から

$$\mathcal{N} = \{X^a \Lambda_i \mid i \in \mathbb{Z}, 0 \leq a < r(i)\}$$

かつ  $\Lambda_{i+2aj} \supset X^a \Lambda_i \supsetneq \Lambda_{i+2aj+1}$  を得る. 従って  $\mathcal{N}$  は包含関係に関して全順序集合となり, 特に lattice chain である.

$\mathcal{N}$  の lattice  $N$  に対し,  $0 \leq k < l \leq e(N)$  なる  $k, l$  と整数  $n$  が存在して  $X^k N = \varpi^n X^l N$  を満たす. 従って  $N_0 \in \mathcal{N}$  と  $0 < e' \leq e(N)$  で

$$X^k N_0 \not\equiv X^l N_0 \pmod{\varpi}, \quad 0 \leq k < l \leq e' - 1$$

かつ  $X^{e'} N_0 = \varpi^n N_0$  を満たすものが存在する. このとき

$$\mathcal{N}' = \{ \varpi^m X^a N_0 \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq a \leq e' - 1 \} \quad (7.2.1)$$

は周期  $e'$  の lattice chain で,  $X$  は  $\mathcal{N}'$  上に全単射で作用する.

7.3.  $\mathcal{N}'$  から C-chain を構成しよう. 2.3. 節と同様に  $\lambda_i$  を  $\bar{\Lambda}_i = \bar{\Lambda}_i(\lambda_i)$  を満たす最大の weight とする.

$N$  を  $\mathcal{N}'$  の lattice とする.  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$  であったから,  $N$  はある  $i \in \mathbb{Z}$  と  $0 \leq a < r(i)$  に対して  $N = X^a \Lambda_i$  と表せ, 従って  $\Lambda_{i+2aj} \supset X^a \Lambda_i \supsetneq \Lambda_{i+2aj+1}$  を満たす.  $V$  の  $\mathfrak{o}$ -lattice  $l(N)$  を写像

$$\Lambda_{i+2aj} \rightarrow \Lambda_{i+2aj} / \Lambda_{i+2aj+1} = \bar{\Lambda}_{i+2aj} \simeq \bar{\Lambda}_{i+2aj} \neq 0$$

による  $\bar{\Lambda}_{i+2aj}(\lambda_i + 2a)$  の逆像として定義する. 従って  $\Lambda_{i+2aj} \supset l(N) \supset N \supsetneq \Lambda_{i+2aj+1}$  が成立する. 補題 2.3.1 より  $l(N)$  は  $N = X^a \Lambda_i$  の表示の仕方に依らずに決まる.

$\mathcal{L}' = \{ l(N) \mid N \in \mathcal{N}' \}$  と定めれば, 各  $l(N)$  には  $\bar{\Lambda}$  の斉次 weight 空間が対応する. 同じ次数をもつ weight 空間は包含関係に関し全順序であったから,  $\mathcal{L}'$  も全順序集合となり, 明らかに写像  $l: \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{L}'$  は  $\varpi$  の積と可換であるから,  $\mathcal{L}'$  は lattice chain となる.

**命題 7.3.1.** 写像  $l: \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{L}'$  は全単射である. 特に  $e(\mathcal{L}') = e(\mathcal{N}') = e'$ .

**証明** 単射であることのみを示せば十分である.  $N = X^a \Lambda_i \in \mathcal{N}'$  かつ  $0 \leq a < r(i)$  とすれば  $\Lambda_{i+2aj} \supset l(N) \supset N \supsetneq \Lambda_{i+2aj+1}$  である. このとき

$$\Lambda_{i+2(r(i)-1)j} \supset X^{r(i)-1-a} l(N) \supset X^{r(i)-1} \Lambda_i \supsetneq \Lambda_{i+2(r(i)-1)j+1}$$

であるから

$$\Lambda_{i+2r(i)j} \supset X^{r(i)-a} l(N) \supset X^{r(i)} \Lambda_i = \Lambda_{i+2r(i)j+1}$$

を得る.  $X^{r(i)-a} l(N)$  の  $\bar{\Lambda}_{i+2r(i)j}$  での像は  $\bar{X}^{r(i)-a} \cdot \bar{\Lambda}_{i+2aj}(\lambda_i + 2a)$  で, これは補題 2.3.1 より零であるから  $X^{r(i)-a} l(N) = \Lambda_{i+2r(i)j+1}$  を得る. 従って  $X^k l(N) \subset \Lambda_{i+2(a+k)j+1}$  を満たす最小の  $k$  が  $r(i) - a$  である.

よって  $N' = X^{a'} \Lambda_{i'} \in \mathcal{N}'$  ( $0 \leq a' < r(i')$ ) に対し  $l(N) = l(N')$  であるとすれば,  $i + 2aj = i' + 2a'j$  かつ  $r(i) - a = r(i') - a'$ , 従って  $X^{r(i)-a} N = \Lambda_{i+2r(i)j+1} = \Lambda_{i'+2r(i')j+1} = X^{r(i)-a} N'$  が成立する.  $X$  は  $\mathcal{N}'$  上に全単射で作用するから  $N = N'$  となる.  $\square$

7.4.  $M' = \mathcal{L}'^\#$  を  $\mathcal{L}'$  の双対 lattice chain とする.  $L \in \mathcal{L}'$  はある  $i$  に対して  $\Lambda_i \supset L \supseteq \Lambda_{i+1}$  で,  $\bar{\Lambda}_i$  の斉次 weight 空間  $\bar{\Lambda}_i(\lambda)$  の逆像として定義される. このとき  $\Lambda_{2c-i} \supseteq L^\# \supset \Lambda_{2c+1-i}$  は  $\bar{\Lambda}_{2c-i}$  の部分空間  $\bar{\Lambda}_i(\lambda)^\perp$  の逆像であることが確かめられる. ここで  $^\perp$  は  $\bar{\Lambda}$  上の形式  $\bar{f}$  に関する斉次直交補空間を意味する. 補題 2.3.2 から  $\bar{\Lambda}_i(\lambda)^\perp = \bar{\Lambda}_{2c-i}(1-\lambda)$ , 従って  $L \in \mathcal{L}'$  に対して, その双対 lattice  $L^\#$  も斉次 weight 空間の逆像として与えられる.

任意の  $i$  に対して  $\bar{\Lambda}_i$  の weight 空間は包含関係について全順序であったから,  $\mathcal{L}' \cup M'$  も包含関係に関して全順序で lattice chain となる.

7.5. 写像  $I: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}'$  を  $l(N) \in \mathcal{L}'$  に対して

$$I(l(N)) = l(XN)$$

で定義する. 写像  $X: \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}'$ ,  $l: \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{L}'$  はどちらも全単射であるから,  $I$  も全単射である. 次の補題は定義から明らかである.

補題 7.5.1.  $N = X^a \Lambda_i \in \mathcal{N}' (0 \leq a < r(i))$  かつ  $L = l(N) \in \mathcal{L}'$  とする. このとき  $\Lambda_{i+2aj} \supset L \supseteq \Lambda_{i+2aj+1}$  である. 更に  $a < r(i) - 1$  ならば

$$\Lambda_{i+2(a+1)j} \supset IL \supseteq \Lambda_{i+2(a+1)j+1}$$

が成立し,  $a = r(i) - 1$  のときは

$$IL = XN = X^{a+1}N = \Lambda_{i+2(a+1)j+1}$$

となる.

補題 7.5.2. 任意の  $L \in \mathcal{L}'$  に対し  $IL \supset XL$ .

証明  $L = l(N) \in \mathcal{L}' (N = X^a \Lambda_i \in \mathcal{N}', 0 \leq a < r(i))$  とする. このとき  $\Lambda_{i+2aj} \supset L \supset N \supseteq \Lambda_{i+aj+1}$  で,  $L$  は weight 空間  $\bar{\Lambda}_{i+aj}(\lambda_i + 2a)$  の逆像として定義され,  $\Lambda_{i+2(a+1)j} \supset XL \supset \Lambda_{i+2(a+1)j+1}$  が成立する.

(I)  $a = r(i) - 1$  の場合:  $XN = \Lambda_{i+2r(i)j+1}$  であるから  $IL = l(XN) = XN$  を得る. また  $XN = X^{r(i)} \Lambda_i = \Lambda_{i+2r(i)j+1}$  は  $\bar{X}^{r(i)} \cdot \bar{\Lambda}_i = 0$  を意味する. 従って補題 2.3.1 より

$$0 = \bar{\Lambda}_{i+2r(i)j}(\lambda_i + 2r(i)) \supset \bar{X} \cdot \bar{\Lambda}_{i+2(r(i)-1)j}(\lambda_i + 2(r(i) - 1))$$

であるから  $XL = IL = \Lambda_{i+2r(i)j+1}$ .

(II)  $a < r(i) - 1$  の場合: このとき  $\Lambda_{i+2(a+1)j} \supset IL \supset XN \supseteq \Lambda_{i+2(a+1)j+1}$  となる.  $IL$  は斉次 weight 空間  $\bar{\Lambda}_{i+2(a+1)j}(\lambda_i + 2(a+1)) \supset \bar{X} \cdot \bar{\Lambda}_{i+2a}(\lambda_i + 2a)$  の逆像として定義された. ここで  $\bar{X} \cdot \bar{\Lambda}_{i+2a}(\lambda_i + 2a)$  は  $XL$  の  $\bar{\Lambda}_{i+2aj}$  での像であるから,  $IL \supset XL$  が従う.  $\square$

補題 7.5.3. 任意の  $L \in \mathcal{L}'$  に対して,  $IL$  は  $XL$  を含む  $\mathcal{L}' \cup M'$  の lattice で最小のものである.

証明  $L = l(N)$ ,  $N \in \mathcal{N}'$  に対して, 補題 7.5.2 より  $IL \supset XL \supset XN$  が従う.  $\mathcal{L}' \cup M'$  の lattice には  $\bar{\Lambda}$  の斉次 weight 空間が対応している. 従って補題 2.3.1 から  $IL = l(XN)$  は  $XN$  を含む  $\mathcal{L}' \cup M'$  の lattice のうち最小のものである. 主張はこれより明らか.  $\square$

7.6. 写像  $I$  は  $\mathcal{L}'$  の包含関係を保存する. すなわち次の主張が成立する.

補題 7.6.1.  $L, L' \in \mathcal{L}'$  が  $L \supset L'$  を満たすならば,  $IL \supset IL'$  である.

証明 補題 7.5.2 と仮定から  $IL \supset XL \supset XL'$  が従う. 補題 7.5.3 より  $IL'$  は  $XL'$  を含む  $\mathcal{L}'$  の lattice で最小のものであるから, 主張が従う.  $\square$

$\mathcal{L}' = \{L'_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  とする. 写像  $I$  は  $\mathcal{L}'$  の包含関係を保つ全単射であるから, ある  $j'$  が存在して, 任意の  $i$  に対し  $IL'_i = L'_{i+j'}$  が成立する.  $\mathcal{L}'$  の周期性と  $e' = e(\mathcal{L}')$  より,  $j'$  は次の式で与えられる.

$$I^{e'}L = \varpi^{j'}L, \quad L \in \mathcal{L}'. \quad (7.6.1)$$

補題 7.5.3 より  $X \subset \mathfrak{P}(\mathcal{L}')^{j'}$  が得られ,  $\sigma(X) = -X$  かつ  $\sigma(\mathfrak{P}(\mathcal{L}')^{j'}) = \mathfrak{P}(\mathcal{M}')^{j'}$  と合わせて

$$X \subset \mathfrak{P}(\mathcal{L}')^{j'} \cap \mathfrak{P}(\mathcal{M}')^{j'} \quad (7.6.2)$$

が従う. これより  $(\mathcal{L}', \mathcal{M}')$  が C-chain であれば 条件 (a) が成立する.

7.7. 条件 (b) が成立することを示す.  $\mathcal{L}' = l(\mathcal{N}')$  と (7.2.1) から

$$\mathcal{L}' = \{ \varpi^m I^a l(N_0) \mid m \in \mathbb{Z}, 0 \leq a < e' \}$$

で,  $e'$  は  $\mathcal{L}'$  の周期であったから  $e', j'$  は互いに素である.

$\mathcal{N}'$  は  $X$  の作用で閉じているから  $N = X^a \Lambda_i \in \mathcal{N}'$  で  $a = r(i) - 1$  を満たすものが存在する. このとき  $\Lambda_{i+2aj} \supset l(N) \supset N \supseteq \Lambda_{i+2aj+1}$  で, 補題 7.5.1 より  $I(l(N)) = l(XN) = \Lambda_{i+2(a+1)j+1}$ , 従って  $\Lambda_{i+2(a+e')j+1} \supset I^{e'}(l(N))$  が成立する. よって, 包含関係  $\Lambda_{i+2(a+e')j+1} \supset I^{e'}(l(N)) = \varpi^{j'} l(N) \supseteq \varpi^{j'} \Lambda_{i+2aj+1} = \Lambda_{i+2aj+2e'j'+1}$  を得, これより

$$j'/e' > j/e$$

が確かめられる.

7.8. 後は  $(\mathcal{L}', \mathcal{M}')$  が C-chain であることを示せば定理 4.1.5 の証明は完了する. 写像  $I^\# : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}'; M \mapsto I^\#M$  を

$$I^\#M = (I^{-1}M^\#)^\#$$

で定義する.  $L'_i \in \mathcal{L}'$  に対して  $IL'_i = L'_{i+j'}$  であったから,  $M'_i \in \mathcal{M}' - \{M'_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  についても  $I^\#M'_i = M'_{i+j'}$  が成立する. 特に  $I^\#$  は  $\mathcal{M}'$  の包含関係を保ち,  $I^{e'} = \varpi^{j'}$  より  $(I^\#)^{e'} = \varpi^{j'}$  となる.

補題 7.8.1.  $L \in \mathcal{L}', M \in \mathcal{M}'$  が  $M \supset L$  を満たすならば  $I^\#M \supset IL$  である.

**証明** 写像  $I^\# : M' \rightarrow M'$  は次数  $j'$  の平行移動であった。これと  $X \subset \mathfrak{P}(M)^{j'}$  より、 $M \in M'$  に対して  $I^\#M \supset XM$  が成立する。従って仮定から  $I^\#M \supset XM \supset XL$  が得られ、補題 7.5.3 より  $I^\#M \supset IL$  となる。□

**命題 7.8.2.**  $L \in \mathcal{L}', M \in M'$  に対し、 $L \supseteq M$  が  $\mathcal{L}' \cup M'$  の隣り合う lattice (すなわち  $L$  と  $M$  の間には  $\mathcal{L}' \cup M'$  の他の lattice は存在しない) であると仮定する。このとき、任意の  $n \in \mathbb{Z}$  について  $I^n L \supseteq I^\# M$  も  $\mathcal{L}' \cup M'$  の隣り合う lattice である。

**証明**  $I^{e'} - \varpi^{j'}$  かつ  $(I^\#)^{e'} - \varpi^{j'}$  であったから  $0 \leq n \leq e' - 1$  の場合について証明すれば十分である。

ある  $0 \leq n \leq e' - 1$  に対して  $(I^\#)^n M \supseteq I^n L$  であると仮定しよう。このとき補題 7.8.1 より  $(I^\#)^{e'} M \supseteq I^{e'} L$  であるから仮定に反する。従って、任意の  $0 \leq n \leq e' - 1$  に対して  $I^n L \supseteq (I^\#)^n M$  が成立する。

$I^n L \supseteq L' \supseteq (I^\#)^n M$  を満たす  $\mathcal{L}'$  の lattice  $L'$  が存在すると仮定する。このとき補題 7.6.1 と先の議論により  $I^{e'} L \supseteq I^{e'-n} L' \supseteq (I^\#)^{e'} M$  が得られる。これはすなわち  $\varpi^{j'} L \supseteq I^{e'-n} L' \supseteq \varpi^{j'} M$  であるから仮定に反している。同様に、 $I^n L \supseteq (I^\#)^n M$  の間に  $M'$  の lattice が存在するときも矛盾が導かれ、主張を得る。□

$(\mathcal{L}', M')$  が C-chain であることを示そう。 $\mathcal{L}' \cup M'$  の隣り合う lattice  $L \supseteq M$  で  $L \in \mathcal{L}'$  かつ  $M \in M'$  となるものを固定する。これらに対して番号付け  $\mathcal{L}' = \{L'_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ ,  $M' = \{M'_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  を

$$L'_0 = L \supseteq M'_1 = M$$

を満たすようにとる。このとき  $e'$  と  $j'$  は互いに素であったから、任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して整数  $s, t$  で  $n = se' + tj'$  を満たすものが存在する。命題 7.8.2 より  $L'_n = \varpi^s I^t L'_0 \supseteq \varpi^s (I^\#)^t M'_1 = M'_{n+1}$  は  $\mathcal{L}' \cup M'$  の隣り合う lattice であるから、任意の  $n$  について

$$L'_n \supseteq M'_{n+1} \supseteq L'_{n+1} \supseteq M'_{n+2}$$

が成立する。したがって  $(\mathcal{L}', M')$  は C-chain である。

## 参考文献

- [1] C. J. Bushnell. Hereditary orders, Gauss sums and supercuspidal representations of  $GL_N$ . *J. Reine Angew. Math.*, 375/376:184–210, 1987.
- [2] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko. Semisimple types in  $GL_n$ . *Compositio Math.*, 119(1):53–97, 1999.
- [3] R. Howe and A. Moy. Minimal  $K$ -types for  $GL_n$  over a  $p$ -adic field. *Astérisque*, 171-172:257–273, 1989.



- [4] K. Kariyama and M. Miyauchi. Split fundamental strata for split classical groups, preprint.
- [5] M. Miyauchi. Fundamental strata for classical groups, preprint, 2001.
- [6] L. Morris. Fundamental  $G$ -strata for classical groups. *Duke Math. J.*, 64:501–553, 1991.
- [7] S. Stevens. Double coset decompositions and intertwining. *Manuscripta Math.*, 106(3):349–364, 2001.
- [8] S. Stevens. Semisimple strata for  $p$ -adic classical groups. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)*, 35(3):423–435, 2002.