数理解析研究所講究録 1321 巻 2003 年 79-91

古典群の fundamental stratum のフィルトレーションについて

尾道大学経済情報学部 刈山和俊 (Kazutoshi Kariyama)

平成 15 年 5 月 6 日

1 紹介

F を剰余標数が 2 でない非アルキメデス的局所体とし, G を F 上の古典群とせよ. Morris-宮内 [10, 8] によって, G の既約スムース表現はある fundamental C-stratum を含むことが示された. この fundamental C-stratum は, Morris による C-chain とよばれる 2 つの lattice chain のある組によって定義される G のフィルトレーション部分群によって与えられる. この C-chain は, Bushnell-Kutzko [5], Stevens [13] の自己双対 lattice sequence の特別なものである. さらに, その fundamental C-stratum は Moy-Prasad [11, 12] の unrefined minimal K-type の特別なものでもある.

ここに, [6] によって, G の既約スムース表現が正のレベルの fundamental C-stratum を含むならば, G の簡約部分群 G^1 の本質的にある自己双対 lattice chain によって定義されるフィルトレーション部分群によって与えられる fundamental C-stratum を含むことを証明できたことを予報する. ここでは簡単のため G は F 上 split する古典群に制限して話を進める. この古典群に関する結果は GL_n に関する類似の結果 [4] に非常に近いことを示している.

尚, 補題 4.8 は, 講演に対する宮内氏による誤りの指摘をもとに訂正されたものである. ここに宮内氏に深く感謝の意を表します.

2 Lattice sequence

F を非アルキメデス的局所体, そして ω を F 上の正規離散的付値とする. $\mathcal{O} = \{x \in F |\ \omega(x) \geq 0\}$, $\mathcal{P} = \{x \in F |\ \omega(x) \geq 1\}$, そして ϖ を F のある素元とする. $\overline{F} = \mathcal{O}/\mathcal{P}$ は奇素数の標数をもつ F の剰余体と仮定する.

V を F 上の N 次元ベクトル空間とし, n を 2 以上のある整数とする. $f : V \times V \longrightarrow F$ をある非退化歪対称または対称双線形形式とする. V の F-基底を $\mathcal{E} = \{e_{-n}, \cdots, e_{-1}, e_1, \cdots, e_n\}$ または $\mathcal{E} = \{e_{-n}, \cdots, e_{-1}, e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ とする. 今後,

この基底の順番を固定する.

$$J = (f(e_i, e_j))_{-n\le i,j\le n}$$

とおく. すると $N = 2n$ または $N = 2n+1$ であり, $V_0 = Fe_0$ は (V, f) の非等方的部分空間である. $V_0 = Fe_0$ は V の非等方的部分空間である.

$$G = \mathrm{Is}(V, f) = \{g \in \mathrm{Aut}_F(V) |\ \ f(gv, gw) = f(v, w)\ (v, w \in V)\}$$

そして

$$G^0 = \{g \in G | \det(g) = 1\}$$

とする. $A = \mathrm{End}_F(V)$ を V 上の F-準同型からなる環とし, A 上の（歪）対合 σ を

$$\sigma(X) = J^{-1}.{}^tX.J\ (X \in A)$$

で定義する, ここで, ${}^tX$ は X の転置行列を表わす. G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathrm{End}_F(V) |\ X + \sigma(X) = 0\}$$

で与えられる. Z を G^0 の対角行列からなる極大 F-分裂トーラスとする:

$$Z = \{g \in G |\ ge_i \in F^{\times}e_i\ (i \in I),\ ge_0 = e_0\},$$

ここで, $I = \{\pm 1, \cdots, \pm n\}$ とする. Z のその元 g は $g = \mathrm{Diag}(g_{-n}, \cdots, g_n)$ と表わせる. Z の Lie 環 $\mathfrak{z}$ は

$$\mathfrak{z} = \{\mathrm{Diag}(t_{-n}, \cdots, t_n) |\ t_i \in F,\ t_i + t_{-i} = 0\ (i \in \tilde{I})\}$$

で与えられる.

[5], 2 章の定義に従って, V における lattice sequence とは, ある関数 $\Lambda : \mathbb{Z} \longrightarrow \{V$ の $\mathcal{O}$-lattice$\}$ で次の性質を満たすものである.

(1) $\Lambda(k) \supset \Lambda(k+1)\ (k \in \mathbb{Z})$

(2) $\mathscr{P}\Lambda(k) = \Lambda(k+e)\ (k \in \mathbb{Z})$ を満たす自然数 e が存在する.

この自然数 e を Λ の周期とよび, $e = e(\Lambda)$ と書く. とくに, (1) において $\Lambda(k) \supsetneq \Lambda(k+1)\ (k \in \mathbb{Z})$ となるとき, Λ を strict とよぶ. これはまた V における lattice chain とよばれる. 一般の Λ に対して, $L_\Lambda = \{\Lambda(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ を Λ の下の lattice chain とよぶ.

V におけるある lattice sequence Λ と $u \in \mathbb{Z}$ に対して, $A = \mathrm{End}_F(V)$ の $\mathcal{O}$-部分加群を

$$\mathfrak{a}_u(\Lambda) = \{x \in \mathrm{End}_F(V) |\ x\Lambda(k) \subset \Lambda(k+u)\ (k \in \mathbb{Z})\}$$

で定義する. V の lattice L の $\mathcal{O}$-dual を

$$L^{\#}=\{x\in V\mid f(x,L)\subseteq\mathcal{O}\}$$

で定義する. [13], 2 章における定義に従って, lattice sequence Λ が自己双対とは,

$$\Lambda(-k)^{\#}=\Lambda(k+d)\ (k\in\ \mathbb{Z})$$

を満たす整数 d が存在するときとする. Λ が自己双対ならば, $\sigma(\mathfrak{a}_u(\Lambda))=\mathfrak{a}_u(\Lambda)$ $(u\in\mathbb{Z})$ が成り立つ. そこで, Λ に付随した $\mathfrak{g}$ 上のフィルトレーションを

$$\mathfrak{g}_{\Lambda,i}=\mathfrak{a}_i(\Lambda)\cap\mathfrak{g}\ (i\in\mathbb{Z})$$

で定義できる.

[10] における $\mathfrak{g}$ 上の Morris によるフィルトレーションの定義を思い起こす. V における 2 つの lattice chain $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ で $\mathcal{L}=\mathcal{M}^{\#}=\{M^{\#}\mid M\in\mathcal{M}\}$ を満たすものに関して, $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ が C-chain とは, lattice chain $\mathcal{L}$ と $\mathcal{M}$ が

$$\mathcal{L}\cup\mathcal{M}:\cdots\supsetneq M_i\supset L_i\supsetneq M_{i+1}\supset L_{i+1}\supsetneq\cdots$$

となるように $\mathcal{L}=\{L_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $\mathcal{M}=\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ と番号づけできる. このような C-chain $(\mathcal{L},\mathcal{M})$ に対して,

$$\Lambda(2i)=M_i,\ \Lambda(2i+1)=L_i\ (i\in\mathbb{Z})$$

とおく. すると $\mathcal{L}\cup\mathcal{M}$ は自己双対 lattice sequence Λ であり, $e(\Lambda)=2e(\mathcal{L})$ となることを [7] で見た. このとき, $\Lambda=(\mathcal{L},\mathcal{M})$ とかく.

3 Fundamental C-stratum

ψ_F を conductor が $\mathcal{P}$ である加法群 F のある連続指標とし, これを固定する. V におけるある lattice sequence Λ に付随して, G の開コンパクト部分群を次のように定義する:

$$\hat{P}_\Lambda=\mathfrak{a}_0(\Lambda)\cap G=P_{\Lambda,0},$$
$$P_{\Lambda,i}=(1+\mathfrak{a}_i(\Lambda))\cap G\ (i\geq 1).$$

さらに, P_Λ^0 を $P_{\Lambda,1}\subset P_\Lambda^0\subset\hat{P}_\Lambda$ を満たし, 商 $P_\Lambda^0/P_{\Lambda,1}$ がある連結簡約 $\overline{F}$-代数群の $\overline{F}$-有理点の群に同型であるような G の開コンパクト部分群とする.

ある自然数 i に対して, Abel 群の同型

$$\mathfrak{g}_{\Lambda,-i}/\mathfrak{g}_{\Lambda,1-i}\simeq(P_{\Lambda,i}/P_{\Lambda,i+1})^{\wedge},$$
$$b+\mathfrak{g}_{\Lambda,1-i}\longmapsto\psi_b$$

を得る (cf. [7]), ここで, $\psi_b(p)=\psi_F(\mathrm{tr}(b(p-1)))$ $(p\in P_{\Lambda,i})$. 以下 [7] の定義を思い起こす.

定義 1. V におけるある lattice sequence Λ と非負整数 n に対して, 3組 (Λ,n,ψ) が *stratum* とは,

(1) $n>0$ のとき, ある $b\in\mathfrak{g}_{\Lambda,-n}/\mathfrak{g}_{\Lambda,1-n}$ に対して, $\psi=\psi_b$, または

(2) $n=0$ のとき, ψ が $P^0_\Lambda/P_{\Lambda,1}$ のある既約表現

を満たすときとする. また, とくに $\Lambda=(\mathcal{L},\mathcal{M})$ が C-chain であり, かつ n が偶数のとき, そのような3組 (Λ,n,ψ) を C-stratum とよぶ. $n/e(\Lambda)$ をその stratum のレベルとよぶ.

定義 2. ある stratum (Λ,n,ψ) が *fundamental* とは,

(1) $n>0$ のとき, $\psi=\psi_b$ かつ $b+\mathfrak{a}_{1-n}(\Lambda)$ が巾零元を含まない, または

(2) $n=0$ のとき, ψ が $P^0_\Lambda/P_{\Lambda,1}$ のある既約 cuspidal 表現

を満たすときとする.

定理 3.1. (*Morris-宮内 (cf. [7])*)
G のある既約スムース表現はある fundamental C-stratum を含む.

4 フィルトレーション

4.1 Moy-Prasad フィルトレーション

$\mathscr{B}(G^0,F)$ を G^0 の F 上の Bruhat-Tits ビルディングとする. $X_*(Z)=\mathrm{Hom}(GL_1,Z)$ を Z の 1-パラメータ部分群とし, $X^*(Z)=\mathrm{Hom}(Z,GL_1)$ を Z の指標群とする. $X^*(Z)$ の自然な $\mathbb{Z}$ 上の基底 $\{a_i\}_{1\leq i\leq n}$ をとれる. Z に付随して, $\mathscr{B}(G^0,F)$ のアパート $\mathscr{A}=\mathscr{A}(Z,F)=X_*(Z)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ を得る. $<,>$ を $X_*(Z)\times X^*(Z)$ 上の自然なペアリングとすると, 対応 $p\mapsto(p_i)_{1\leq i\leq n}$ を $p_i=<p,a_i>$ $(1\leq i\leq n)$ で定義すると, それは同型 $\mathscr{A}\simeq\mathbb{R}^n$ を与える. そこで, $\mathscr{A}=\mathbb{R}^n$ と同一視する.

$\Phi=\Phi(G^0,Z)$ を (G^0,Z) のルート系とする. すると $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{z}$ に関する Cartan 分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{z}\oplus\bigoplus_{a\in\Phi}\mathfrak{g}_a$$

を得る. $(X_a)_{a\in\Phi}$ を $\mathfrak{g}_a=FX_a$ $(a\in\Phi)$ を満たすある Chevalley 基底とする. $a\in\Phi$, $r\in\mathbb{R}$ に対して, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{z}$ の $\mathscr{O}$-部分加群をおのおの次のように定義する:

$$\mathfrak{g}_{a,r} = \{\xi X_a \in \mathfrak{g}_a |\ \omega(\xi) \geq r\},$$
$$\mathfrak{z}_r = \{\mathrm{Diag}(t_{-n}, \cdots, t_n) \in \mathfrak{z} |\ \omega(t_i) \geq r\ (i \in I)\}$$

ここで, $I = \{\pm 1, \cdots, \pm n\}$ とする. $p \in \mathscr{A} = \mathbb{R}^n$ と実数 r に対して, $\mathfrak{g}$ の $\mathscr{O}$-部分加群 $g_{p,r}$ を

$$\mathfrak{g}_{p,r} = \mathfrak{z}_r \oplus \bigoplus_{a \in \Phi} \mathfrak{g}_{a, r-<p,a>}$$

で定義する. すると $\{\mathfrak{g}_{p,r}\}_{r \in \mathbb{R}}$ は [11] における点 $p \in \mathscr{A}$ に付随する Moy-Prasad フィルトレーションとなることを容易に示せる.

4.2 標準的 lattice sequence

以下 [10, 7] を参照のこと. V における自己双対 lattice chain $\boldsymbol{N}$ はある自然数 r に対して, 自己双対 slice

$$N^{\#}_{r-1} \supsetneq \cdots \supsetneq N^{\#}_0 \supset N_0 \supsetneq \cdots \supsetneq N_{r-1} \supset \varpi N^{\#}_{r-1} \tag{4.1}$$

を含むことがよく知られている. この slice は $N_0 \supsetneq \cdots \supsetneq N_{r-1}$ によって決まる. この slice は次の 4 つの条件のうちいずれか 1 つを満たす：

Type I: $N_{r-1} = \varpi N^{\#}_{r-1}$ かつ $N^{\#}_0 = N_0$,

Type II: $N_{r-1} = \varpi N^{\#}_{r-1}$ かつ $N^{\#}_0 \neq N_0$,

Type III: $N_{r-1} \neq \varpi N^{\#}_{r-1}$ かつ $N^{\#}_0 = N_0$,

Type IV: $N_{r-1} \neq \varpi N^{\#}_{r-1}$ かつ $N^{\#}_0 \neq N_0$.

1 章の $\mathcal{E} = \{e_i\}$ と $a + b = N$ に対して, V の lattice $a\mathscr{O} \oplus b\mathscr{P}$ を

$$a\mathscr{O} \oplus b\mathscr{P} = \underbrace{\mathscr{O}e_{-n} \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}e_{-n+a-1}}_{a \text{ times}} \oplus \underbrace{\mathscr{P}e_{-n+a} \oplus \cdots \oplus \mathscr{P}e_n}_{b \text{ times}}$$

で定義する. 以下の N_i $(0 \leq i \leq r-1)$ で決まる自己双対 slice をもつ $\boldsymbol{N}$ を考える.

Type I, III: 自然数 $m_1, \cdots, m_r$ に対して,

$$N_0 = D\mathscr{O},$$
$$N_i = (D - m_1 - \cdots - m_i)\mathscr{O} \oplus (m_1 + \cdots + m_i)\mathscr{P}\ (1 \leq i \leq r-1)$$

ここで, タイプ I に対して, $n = m_1 + \cdots + m_{r-1}$, そしてタイプ III に対して, $n = m_1 + \cdots + m_r$ とする.

Type II, IV: 自然数 $m_1, \cdots, m_r$ に対して,

$$N_0 = (D - m_0)\mathscr{O} \oplus m_0\mathscr{P},$$
$$N_i = (D - m_0 - \cdots - m_i)\mathscr{O} \oplus (m_0 + \cdots + m_i)\mathscr{P}\ (1 \leq i \leq r-1)$$

ここで，タイプIIに対して，$n = m_0 + \cdots + m_{r-1}$，そしてタイプIVに対して，$n = m_0 + \cdots + m_r$ とする．また，$G^0 = SO_{2n+1}$ の場合は $m_r = 0$ を許す．

このような lattice chain $\boldsymbol{N}$ を標準的とよぶ．

命題 4.1. *([9, 命題 1.10]) V におけるある自己双対 lattice chain $\boldsymbol{N} = \{N_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ に対して，$g\boldsymbol{N} = \{gN_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が標準的となる $g \in G$ が存在する．*

次の命題は容易に示せる．

命題 4.2. *Λ を $\boldsymbol{N}_\Lambda$ が標準的となる V における自己双対 lattice sequence とせよ．またそれは (4.1) の自己双対 slice をもつとせよ．すると，下の等号を満たす非負整数列 $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_{r-1} < n_r$ が唯一存在する:*

$$\Lambda(0) = \cdots = \Lambda(n_1 - 1) = N_0$$
$$\Lambda(n_i) = \Lambda(n_i + 1) = \cdots = \Lambda(n_{i+1} - 1) = N_i \ (1 \le i \le r-1)$$

そして $\Lambda(-i)^\# = \Lambda(i)$ または $\Lambda(-i)^\# = \Lambda(i-1)$ のいずれかが成り立つ．

4.3 フィルトレーションの比較

以下は [1, 2] を参照のこと．

$p = (p_i)_{1\le i\le n} \in \mathscr{A} = \mathbb{R}^n$ から V 上のある F-ノルム α_p を

$$\alpha_p(\sum_{i\in\tilde{I}} x_i e_i) = \inf(\omega(x_0), \inf_{i\in I}(\omega(x_i) - < p, a_i >))$$

で定義する．ここで，$x_i \in F$ $(i \in I)$ そして $a_{-i} = -a_i$ $(i \in I)$ とする．またこの F-ノルム α_p から，$\mathrm{End}_F(V)$ 上の F-ノルム End α_p を

$$\mathrm{End}\alpha_p(u) = \inf_{x\in V}(\alpha_p(u(x)) - \alpha_p(x)) \ (u \in \mathrm{End}_F(V))$$

で定義する．さらに，ある関数 $\ell_p : \mathbb{R} \longrightarrow \{V \text{ の } \mathscr{O}\text{-lattice}\}$ を

$$\ell_p(c) = \{x \in V |\ \alpha_p(x) \ge c\} \ (c \in \mathbb{R})$$

で定義する．

命題 4.3. *Λ を $e = e(\Lambda)$ となる V におけるある標準的自己双対 lattice sequence とせよ．d を，$\Lambda(-i)^\# = \Lambda(i+d)$ を満たす 0 または -1 の整数とする．すると*

$$\Lambda(k) = \ell_p(\frac{k}{e} - \frac{1}{2} - \frac{d}{2e}) \ (k \in \mathbb{Z})$$

を満たすアパート $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(G^0, F)$ の点 p が Λ の下にある lattice chain $\boldsymbol{L}_\Lambda$ のタイプごとに以下のように具体的に与えられる．$\delta = d + 1$ とし，自然数 r，非負整数列 $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_{r-1} < n_r$ を命題 4.2 の通りとする．

$$(\underbrace{\frac{e-2n_{r-1}+\delta}{2e},\cdots,\frac{e-2n_{r-1}+\delta}{2e}}_{m_{r-1}},\cdots,$$

$$\underbrace{\frac{e-2n_i+\delta}{2e},\cdots,\frac{e-2n_i+\delta}{2e}}_{m_i},\cdots,\underbrace{\frac{e-2n_1+\delta}{2e},\cdots,\frac{e-2n_1+\delta}{2e}}_{m_1}).$$

Type II:

$$(\underbrace{\frac{e-2n_{r-1}}{2e},\cdots,\frac{e-2n_{r-1}}{2e}}_{m_{r-1}},\cdots,$$

$$\underbrace{\frac{e-2n_i}{2e},\cdots,\frac{e-2n_i}{2e}}_{m_i},\cdots,\underbrace{\frac{e-2n_0}{2e},\cdots,\frac{e-2n_0}{2e}}_{m_0}).$$

Type III:

$$(\underbrace{\frac{e-2n_r+\delta}{2e},\cdots,\frac{e-2n_r+\delta}{2e}}_{m_r},\cdots,$$

$$\underbrace{\frac{e-2n_i+\delta}{2e},\cdots,\frac{e-2n_i+\delta}{2e}}_{m_i},\cdots,\underbrace{\frac{e-2n_1+\delta}{2e},\cdots,\frac{e-2n_1+\delta}{2e}}_{m_1}).$$

Type IV:

$$(\underbrace{\frac{e-2n_r}{2e},\cdots,\frac{e-2n_r}{2e}}_{m_r},\cdots,$$

$$\underbrace{\frac{e-2n_i}{2e},\cdots,\frac{e-2n_i}{2e}}_{m_i},\cdots,\underbrace{\frac{e-2n_0}{2e},\cdots,\frac{e-2n_0}{2e}}_{m_0}).$$

この命題は [3], 命題 3.10 と命題 4.2 とより直接の計算によって証明される．このΛを $\Lambda=\Lambda_p$ とかく．

定理 4.4. $\Lambda=\Lambda_p$ の周期 $e=e(\Lambda_p)$ とする．すると，任意の整数 k に対して，

$$\mathfrak{g}_{\Lambda_p,k}=\mathfrak{g}_{p,\frac{k}{e}}$$

が成り立つ．

証明．Λ_p を命題 4.3 のおけるある点 $p\in\mathscr{A}$ に対応する lattice seuence, そして $x\in\mathrm{End}_F(V)$ とせよ．すると，$k\in\mathbb{Z}$ に対して，

$$x\in\mathfrak{a}_k(\Lambda_p)\Longleftrightarrow \mathrm{End}\ \alpha_p(x)\geq\frac{k}{e}$$

を示すことができる．他方，$x=\xi X_a\in\mathfrak{g}_a$ $(a\in\Phi,\ \xi\in F)$, $r\in\mathbb{R}$ に対して，

$$x \in \mathfrak{g}_{p,r} \Longleftrightarrow \mathrm{End}\ \alpha_p(x) \geq r$$

を示すことができる. したがって,

$$\mathfrak{a}_k(\Lambda_p) \cap \mathfrak{g}_a = \mathfrak{g}_{p,\frac{k}{e}} \cap \mathfrak{g}_a$$

を得る. また $\mathfrak{z}$ の定義から

$$\mathfrak{a}_k(\Lambda_p) \cap \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{\frac{k}{e}}.$$

したがって, 4.1 の $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解によって定理 4.4 の証明が完了する.

定理 4.4 から, lattice sequence による $\mathfrak{g}$ 上のフィルトレーションは Moy-Prasad フィルトレーションになることがわかる.

4.4 真の C-chain

$\Lambda = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$ を V におけるある C-chain とせよ. Λ が真の C-chain とは, $\mathcal{L} \neq \mathcal{M}$ かつ $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$ であったことを思い起こそう. もし Λ が真の C-chain でないならば, $\Lambda = (\mathcal{L}, \mathcal{L})$ または Λ は strict である.

今後, Λ は真の C-chain とし, $(\Lambda, P_{\Lambda,n}, \psi_b)$, $n > 0$ をある fundamental C-stratum と仮定せよ. さらに Λ は標準的と仮定してもよい. われわれは少し根気のいる計算によって次の命題を証明できる.

命題 4.5. 次の性質を満たす (V, f) の直交分解 $(V, f) = (V_1, f_1) \oplus (V_2, f_2)$ を得る:

(1) V_1 は $\mathcal{E}$ のある部分集合 $\mathcal{E}_1$ によって F 上生成される.

(2) $\mathcal{L} = \{L_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ とかくと, $\mathcal{L}^1 = \{L_i \cap V_1\}_{i\in\mathbb{Z}}$ は $e(\mathcal{L}^1) = e(\mathcal{L})$ となる V_1 の自己双対 *lattice chain* となる.

(3) $b = (b_1, b_2) \in A_1 \oplus A_2$, ここで, $A_i = \mathrm{End}_F(V_i)$ $(i = 1, 2)$.

(4) b_2 は A_2 において巾零であり, b_1 は非退化, すなわち, それはコセット

$$b^1 + \mathfrak{P}(\mathcal{L}^1)^{1-n/2} \in \mathfrak{P}(\mathcal{L}^1)^{-n/2}/\mathfrak{P}(\mathcal{L}^1)^{1-n/2}$$

を導き, このコセットは巾零元を含まない. ここで, $\mathfrak{P}(\mathcal{L}^1)$ は $\mathcal{L}^1$ に付随する A_1 における *Jacobson* 根基である.

命題 4.5 の (V_1, f_1) から 2 章におけるように isometry 群 $G^1 = \mathrm{Is}(V_1, f_1)^0$ を得, そして $\mathcal{E}$ の部分集合 $\mathcal{E}_1$ に付随して G^1 の極大 F-トーラス Z^1 を得る. また G^1 の Bruhat-Tits ビルディング $\mathscr{B}(G^1, F)$ と Z^1 に対応するアパート $\mathscr{A}^1 = \mathscr{A}(Z^1, F)$ を得る. $\mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}$ が自然に埋め込み

$$\mathscr{A}^1 = \mathbb{R}^{n_1} \subset \mathscr{A} = \mathbb{R}^n$$

を導く，ここで，n_1 は Z^1 の階数である．G^1 の Lie 環を $\mathfrak{g}^1$ と表わす．

また $\Lambda=(\mathcal{L},\mathcal{M})$ を，$\boldsymbol{N}_\Lambda$ の自己双対 slice (4.1) に属する N_0 に関して，次の 4 つのタイプに分けられる：

Type A: $N_0\in\mathcal{L}\cap\mathcal{M}$ かつ $N_0^{\#}=N_0$,

Type B: $N_0\in\mathcal{L}\cap\mathcal{M}$ かつ $N_0^{\#}\neq N_0$,

Type C: $N_0\in\mathcal{L}\backslash\mathcal{M}$,

Type D: $N_0\in\mathcal{M}\backslash\mathcal{L}$.

このタイプは 4.2 のタイプと次のように関連する：タイプ A はタイプ I またはタイプ III のいづれかとなり，他のタイプ B, C, D はおのおのタイプ II またはタイプ IV のいづれかとなる．定理 4.4 と命題 4.5 を用いて次を示せる．

命題 4.6. 整数 i に対して，

$$\mathfrak{g}^1\cap\mathfrak{a}_{2i-1}(\Lambda)=\mathfrak{g}^1\cap\mathfrak{a}_{2i}(\Lambda)=\mathfrak{g}^1\cap\mathfrak{P}(\mathcal{L}^1)^i=\mathfrak{g}^1_{p^1,\frac{i}{e}}$$

を満たす $\mathscr{A}^1=\mathbb{R}^{n_1}$ の点 p^1 が次のように与えられる，ここで，$e=e(\mathcal{L})$ とする．

(1) (I,A), (II,C): $\mathcal{L}^1$ は *Type I* であり，ある自然数 $r\geq 2$ に対して，$e=2r-2$ である．ある分割 $n_1=m_1+\cdots+m_{r-1}$, $m_1,\cdots,m_{r-1}\geq 1$ に対して，

$$p^1=(\underbrace{\frac{1}{2e},\cdots,\frac{1}{2e}}_{m_{r-1}},\cdots,\underbrace{\frac{e-2i+1}{2e},\cdots,\frac{e-2i+1}{2e}}_{m_i},\cdots,\underbrace{\frac{e-1}{2e},\cdots,\frac{e-1}{2e}}_{m_1}).$$

(2) (II,B),(II,D): $\mathcal{L}^1$ は *Type II* であり，ある自然数 $r\geq 2$ に対して，$e=2r-1$ である．ある分割 $n_1=m_0+\cdots+m_{r-1}$, $m_0,\cdots,m_{r-1}\geq 1$ に対して，

$$p^1=(\underbrace{\frac{1}{2e},\cdots,\frac{1}{2e}}_{m_{r-1}},\cdots,\underbrace{\frac{e-2i}{2e},\cdots,\frac{e-2i}{2e}}_{m_i},\cdots,\underbrace{\frac{e}{2e},\cdots,\frac{e}{2e}}_{m_0}).$$

(3) (III,A), (IV,D): $\mathcal{L}^1$ は *Type III* であり，ある自然数 $r\geq 1$ に対して，$e=2r-1$ である．ある分割 $n_1=m_1+\cdots+m_r$, $m_1,\cdots,m_r\geq 1$ に対して，p^1 は

$$(\underbrace{0,\cdots,0}_{m_r},\cdots,\underbrace{\frac{e-2i+1}{2e},\cdots,\frac{e-2i+1}{2e}}_{m_i},\cdots,\underbrace{\frac{e-1}{2e},\cdots,\frac{e-1}{2e}}_{m_1}).$$

(4) (IV,B), (IV,C): $\mathcal{L}^1$ は *Type IV* であり，ある自然数 $r\geq 1$ に対して，$e=2r$ である．ある分割 $n_1=m_0+\cdots+m_r$, $m_0,\cdots,m_r\geq 1$ に対して，

$$p^1=(\underbrace{0,\cdots,0}_{m_r},\cdots,\underbrace{\frac{e-2i}{2e},\cdots,\frac{e-2i}{2e}}_{m_i},\cdots,\underbrace{\frac{e}{2e},\cdots,\frac{e}{2e}}_{m_0}).$$

結局次を示せる。

定理 4.7. $\Lambda = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$ をある真の標準的C-$chain$とせよ．すると $\mathfrak{g}_{\Lambda,k} = \mathfrak{g}_{p,k/e(\Lambda)}$ $(k \in \mathbb{Z})$ を満たす点 $p \in \mathscr{A} = \mathbb{R}^n$ を次のように取ることができる: $p^1 = (p^1_1, \cdots, p^1_{n_1})$ は命題 *4.6* における点である．p^2 を p の座標から p^1 の座標を取り除いた座標からなる点とし，$p^2 = (p^2_1, \cdots, p^2_{n_2})$ と表す．するとそれは次のように与えられる．ただし，自然数 r, e は命題 *4.6* のようとする．

(1) *(I,A), (II,C)*: ある非負整数列 $0 \le j_r < \cdots < j_s \le (e-1)/2$ とある分割 $n_2 = m_r + \cdots + m_s$, $m_r, \cdots, m_s \ge 1$ に対して，

$$p^2 = (\underbrace{\frac{e-2j_s}{2e}, \cdots, \frac{e-2j_s}{2e}}_{m_s}, \cdots, \underbrace{\frac{e-2j_r}{2e}, \cdots, \frac{e-2j_r}{2e}}_{m_r}).$$

ここで，*(II,C)* の場合 $0 = j_r$.

(2) *(II,B), (II,D)*: ある自然数列 $0 < j_r < \cdots < j_s \le (e-1)/2$ とある分割 $n_2 = m_r + \cdots + m_s$, $m_r, \cdots, m_s \ge 1$ に対して，

$$p^2 = (\underbrace{\frac{e-2j_s+1}{2e}, \cdots, \frac{e-2j_s+1}{2e}}_{m_s}, \cdots, \underbrace{\frac{e-2j_r+1}{2e}, \cdots, \frac{e-2j_r+1}{2e}}_{m_r})$$

(3) *(III,A), (IV,D)*: ある非負整数列 $0 \le j_{r+1} < \cdots < j_s \le (e-1)/2$ とある分割 $n_2 = m_{r+1} + \cdots + m_s$, $m_{r+1}, \cdots, m_s \ge 1$ に対して，

$$p^2 = (\underbrace{\frac{e-2j_s}{2e}, \cdots, \frac{e-2j_s}{2e}}_{m_s}, \cdots, \underbrace{\frac{e-2j_{r+1}}{2e}, \cdots, \frac{e-2j_{r+1}}{2e}}_{m_{r+1}})$$

ここで，*(III,A)* の場合，$0 < j_{r+1}$．そして *(IV,D)* の場合，$0 = j_{r+1}$.

(4) *(IV,B), (IV,C)*: ある自然数列 $0 < j_{r+1} < \cdots < j_s \le (e-1)/2$ とある分割 $n_2 = m_{r+1} + \cdots + m_s$, $m_{r+1}, \cdots, m_s \ge 1$ に対して，p^2 は

$$(\underbrace{\frac{e-2j_s+1}{2e}, \cdots, \frac{e-2j_s+1}{2e}}_{m_s}, \cdots, \underbrace{\frac{e-2j_{r+1}+1}{2e}, \cdots, \frac{e-2j_{r+1}+1}{2e}}_{m_{r+1}}).$$

4.5 主定理

$\Lambda = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$ を V におけるある真の標準的 C-chain とし，そして $(\Lambda, P_\Lambda, \psi_b)$ を $n > 0$ となるある fundamental C-stratum とする．さらに

$$\gcd(n, e(\Lambda)) = 2 \tag{4.2}$$

と仮定せよ．G の既約スムース表現 π がある正の整数 n に対して，fundamental C-stratum $(\Lambda, P_\Lambda, \psi_b)$ を含むならば，[7] によって，(4.2) を満たすものに取り替えることができることを注意しておく．

補題 4.8. 上のような $(\Lambda, P_\Lambda, \psi_b)$ に対して，

$$\begin{gathered}\mathfrak{g}_{\Lambda,-n} \supset \mathfrak{g}_{\Lambda',-n'} \supset \mathfrak{g}_{\Lambda',1-n'} = \mathfrak{g}_{\Lambda,1-n},\\ \mathfrak{g}_{\Lambda,-n}/\mathfrak{g}_{\Lambda,1-n} \supset \mathfrak{g}_{\Lambda',-n'}/\mathfrak{g}_{\Lambda',1-n'} \simeq \mathfrak{g}^1_{\Lambda^1,-n}/\mathfrak{g}^1_{\Lambda^1,1-n},\\ n/e(\Lambda) = n'/e(\Lambda')\end{gathered}$$

を満たす V における *lattice sequence* Λ' と整数 n' が存在する，ここで，命題 *4.5* の $\mathcal{L}^1$ に対して，$\Lambda^1 = (\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^1)$ である．

証明．証明の概略を述べる．命題 4.4 より，$p_1 \mapsto p : \mathscr{A}^1 = \mathbb{R}^{n_1} \subset \mathscr{A} = \mathbb{R}^n$ そして整数 k に対して，

$$\mathfrak{g}_{\Lambda,k} = \mathfrak{g}_{p,\frac{k}{2e}},\ \mathfrak{g}^1_{\Lambda^1,k} = \mathfrak{g}^1_{p^1,\frac{k}{e}}$$

ここで，$e = e(\mathcal{L}) = e(\mathcal{L}^1)$ である．$-n = 2m$ とおく．直接の計算から

$$\mathfrak{g}_{p,\frac{2m}{2e}}/\mathfrak{g}_{p,\frac{2m+1}{2e}} \simeq \mathfrak{g}^1_{p^1,\frac{m}{e}}/\mathfrak{g}^1_{p^1,\frac{m+1}{e}} \oplus \mathfrak{r}$$

ここで，$\mathfrak{r}$ は有限次元 $\overline{F}$-ベクトル空間に同型である．p^1 を固定しながら，p を p' に，n を n' に変更して，$\mathfrak{r} = (0)$ とでき，

$$\begin{gathered}\mathfrak{g}_{p,\frac{2m}{2e}} \supset \mathfrak{g}_{p',\frac{n'}{e'}} \supset \mathfrak{g}_{p',\frac{n'+1}{e'}} = \mathfrak{g}_{p,\frac{2m+1}{2e}},\\ \mathfrak{g}_{p,\frac{2m}{2e}}/\mathfrak{g}_{p,\frac{2m+1}{2e}} \supset \mathfrak{g}_{p',\frac{n'}{e'}}/\mathfrak{g}_{p',\frac{n'+1}{e'}} \simeq \mathfrak{g}^1_{p^1,\frac{m}{e}}/\mathfrak{g}^1_{p^1,\frac{m+1}{e}}\end{gathered}$$

そして $n'/e' = n/e(\Lambda)$ となるように自然数 e' をとることができる．さらにこの p' に付随する $\Lambda' = \Lambda_{p'}$ は $e' = e(\Lambda_{p'})$ を満たす V における lattice sequence であることも示せる．

定理 4.9. $\Lambda = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$ をある真の C-*chain* とせよ．もし G のある既約スムース表現 π が *fundamental* C-*stratum* $(\Lambda, P_\Lambda, n, \psi_b)$，$n > 0$ を含むならば，π は次の性質をもつ *fundamental* C-*stratum* $(\Lambda', P_{\Lambda',n'}, \psi_{b'})$ を含む:

(1) 命題 *4.5* の V_1 における自己双対 *lattice chain* $\mathcal{L}^1$ に対して，$\Lambda^1 = (\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^1)$ とすると

$$\mathfrak{g}'_{\Lambda',-n'}/\mathfrak{g}'_{\Lambda',1-n'} \simeq \mathfrak{g}^1_{\Lambda^1,-n}/\mathfrak{g}^1_{\Lambda^1,1-n},$$

(2) $b' = (b_1, 0) \in A_1 \oplus A_2$, $b_1 + \mathfrak{a}_{1-n}(\Lambda^1)$ は A_1 において巾零元を含まない，ここで，$A_i = \mathrm{End}_F(V_i)$ $(i = 1, 2)$,

(3) $n/e(\Lambda) = n'/e(\Lambda')$.

定理 4.9 の表現 π は G の簡約部分群 $G^1 = \mathrm{Is}(V_1, f_1)^0$ のある fundamental G-stratum $(\Lambda^1, P_{\Lambda^1,n}, \psi_{b_1})$ を含むことを意味する．ここで，Λ' は本質的に自己双対 lattice chain である．

参考文献

[1] F. Bruhat and J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local I, Données radicielles valuées*, Publ. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5-251.

[2] F. Bruhat and J. Tits, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local,* 1^{re} *partie: les groupes linéaire général*, Bull. Soc. Math. France **112** (1984), 259-301.

[3] F. Bruhat and J. Tits, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local,* 2^{re} *partie: groupes unitaires*, Bull. Soc. Math. France **115** (1987), 141-195.

[4] C. J. Bushnell and P. Kutzko, *The admissible dual of GL(N) via compact open subgroups*, Ann. Math. Stud. **129**, Princeton Univ. Press, 1993.

[5] C. J. Bushnell and P. Kutzko, *Semisimple types for* $GL(N)$, Compositio Math. **119** (1999), 53-97.

[6] K. Kariyama, *Filtrations defined by lattice sequences for p-adic classical groups*, preprint, 2002.

[7] K. Kariyama and M. Miyauchi, *Split fundamental strata for split classical groups*, preprint, 2000.

[8] M. Miyauchi, *Fundamental strata for calssical groups*, master thesis at Kobe University, 2001.

[9] L. Morris, *Tamely ramified supercuspidal representations of classical groups I: Filtrations*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. (4) **24** (1991), 705-738.

[10] L. Morris, *Fundamental G-strata for classical groups*, Duke Math. J. vol. **64**, No.3 (1991), 501-553.

[11] A. Moy and G. Prasad, *Unrefined minimal K-types for p-adic groups*, Invent. Math. **116** (1994), 393-408.

[12] A. Moy and G. Prasad, *Jacquet functors and unrefined minimal K-types*, Comment. Math. Helvetici **71** (1996), 98-121.

[13] S. Stevens, *Double coset decompositions and intertwining*, Preprint 99-76, Universié de Paris-Sud, 1999.