数理解析研究所講究録 1324 巻 2003 年 1-6

正標数代数曲線の被覆に関する数論幾何
(Arithmetic geometry of coverings of curves in positive characteristic)

玉川安騎男 (Akio Tamagawa)

京都大学数理解析研究所 (RIMS, Kyoto University)

§1. 復習 (基本群と普遍被覆).

$\boxed{\text{位相空間の場合}}$

X: 連結位相空間である条件 (局所弧状連結かつ半局所単連結) を満たすもの
に対し, 三つ組

$$(\pi_1(X), \tilde{X}, \tilde{X} \curvearrowleft \pi_1(X))$$

が定まります. ここで,

$\pi_1(X)$: 「X の基本群」 — (離散) 群
$\tilde{X}$: 「X の普遍被覆」 — 位相空間
$\tilde{X} \curvearrowleft \pi_1(X)$: (忠実な) 作用 (すなわち (単射) 準同型 $\pi_1(X) \to \mathrm{Aut}(\tilde{X})$)

より詳しく言うと, 上記の三つ組を完全に functorial に定めるには, データとして X だけでなく組 (X, x) を与える必要があります. ここで,

x: 「基点」 — X 上の点

ただ, 三つ組の同型類は基点 x の取り方によらず X だけで定まるので, 以下では基点のことは忘れることにします.

さて, ここで基本的な観察は, 位相空間 X は三つ組 $(\pi_1(X), \tilde{X}, \tilde{X} \curvearrowleft \pi_1(X))$ から

$$X = \tilde{X}/\pi_1(X)$$

として (あっけなく) 復元されるということです.

なお, 以上のことは, 「位相空間」を種種の「多様体」に取り替えても成立することに注意します.

$\boxed{\text{スキームの場合}}$

X: 連結スキーム

に対し, 三つ組

$$(\pi_1(X), \tilde{X}, \tilde{X} \curvearrowleft \pi_1(X))$$

が定まります. ここで,

$\pi_1(X)$: 「X の基本群」 — profinite 位相群
$\tilde{X}$: 「X の普遍被覆」 — スキーム
$\tilde{X} \curvearrowleft \pi_1(X)$: (忠実な) 作用 (すなわち (単射) 準同型 $\pi_1(X) \to \mathrm{Aut}(\tilde{X})$)

(ほんとうは, スキームの普遍被覆は pro-scheme として定義したほうがより自然なのですが, ここでは射影極限を取って考えています.)

位相空間の場合と同様に, より詳しく言うと, 上記の三つ組を完全に functorial に定めるには, データとして X だけでなく組 $(X, \bar{x})$ を与える必要があります. ここで,

$\bar{x}$: 「基点」 — X 上の幾何的点 (すなわち射 $\mathrm{Spec}(\Omega) \to X$, Ω は分離閉体)

ただ, 三つ組の同型類はやはり基点 $\bar{x}$ の取り方によらず X だけで定まるので, 以下では基点のことは忘れることにします.

位相空間の場合と同様に, スキーム X は三つ組 $(\pi_1(X), \tilde{X}, \tilde{X} \curvearrowleft \pi_1(X))$ から

$$X = \tilde{X}/\pi_1(X)$$

として (やはりあっけなく) 復元されます.

§2. 問題設定.

前節で, 位相空間 (あるいは種種の多様体) ないしスキーム X が, 三つ組 $(\pi_1(X), \tilde{X}, \tilde{X} \curvearrowleft \pi_1(X))$ から簡単に復元されることを説明しました. 本稿で考えたいのは, 三つ組ではなく $\pi_1(X)$ あるいは $\tilde{X}$ だけを独立に考えたとき, X をどの程度復元 (特定) できるかという問題です. つまり,

(I) $\pi_1(X)$ はどの程度 X の情報を持っているか？

(II) $\tilde{X}$ はどの程度 X の情報を持っているか？

という問題です.

本稿では, この問題を次のような 1 次元の場合に考えます:

$$\begin{cases} X\text{: 有限型リーマン面 (すなわちコンパクト 1 次元複素解析多様体マイナス有限個の点)} \\ X\text{: 代数閉体 } k \text{ 上の非特異 (既約) 代数曲線} \end{cases}$$

簡単のため, 今後はそれぞれ「リーマン面」「曲線」と省略して言うことにします. 次の定義は, 二つの場合どちらにもあてはまります.

定義. (i) X^* を X のコンパクト化とする.

$g = g_X \overset{\mathrm{def}}{=} X^*$ の種数
$r = r_X \overset{\mathrm{def}}{=} \sharp(X^* - X)$: 「$X$ の無限遠点の数」

(ii) X: 双曲的 $\overset{\mathrm{def}}{\iff} 2 - 2g_X - r_X < 0$

なお, X が曲線の場合は,

X: proper $\iff r_X = 0$
X: affine $\iff r_X > 0$

であることに注意します.

§3. 結果のまとめ.

定義. (i) A, B を集合, $f: A \to B$ を写像とする. このとき,

f: constant $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\sharp(f(A)) \leq 1$

f: almost injective $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall b \in B, \sharp(f^{-1}(b)) < \infty$

(ii) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を圏, $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を関手とする. F は, $\mathcal{A}$ の対象の同型類の集合から $\mathcal{B}$ の対象の同型類の集合への写像

$$F/\simeq:\ \mathrm{Obj}(\mathcal{A})/\simeq\ \to\ \mathrm{Obj}(\mathcal{B})/\simeq$$

を引き起こす. このとき,

F: constant $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $F/\simeq$: constant

F: almost injective $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $F/\simeq$: almost injective

われわれの問題について現在までにわかっている結果をまとめると, 次の表のようになります.

	リーマン面 双曲的 (g, r) 固定	曲線 $/k$ 双曲的 (g, r) 固定 $\mathrm{char}(k) = 0$	曲線 $/k$ proper 双曲的 $k = \overline{\mathbb{F}}_p$	曲線 $/k$ affine $k = \overline{\mathbb{F}}_p$
$X \mapsto \pi_1(X)$	constant ①	constant ③	almost inj. ⑤	almost inj. ⑤
$X \mapsto \tilde{X}$	constant ②	almost inj. ④	? ⑦	constant ⑥

⑤ と ⑥ が今回の主結果です. 次節で, この表の ① から ⑦ までを順番に解説します.

§4. 結果の解説.

① 有限型リーマン面 X の位相型は, (g_X, r_X) だけで決まることが知られています. したがって, 特に $\pi_1(X)$ は (g_X, r_X) だけで決まります. より具体的には, $\Sigma_{g,r}$ を種数 g のコンパクト向き付け可能曲面から r 個の点を除いたものとするとき, X は $\Sigma_{g,r}$ と同相であり,

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1(\Sigma_{g,r}) \simeq \Pi_{g,r}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_r \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}\gamma_1 \cdots \gamma_r = 1 \rangle$$

となります. つまり, $\pi_1(X)$ は, $r = 0$ のときは種数 g の曲面群, $r > 0$ のときは階数 $2g + r - 1$ の自由群となります.

② 次の古典的な結果から従います.

Koebe の一意化定理. $\tilde{X}$ は上半平面 $\mathbb{H} \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ と複素解析的に同型.

③ 次の Grothendieck の結果から従います.

定理 ([SGA1]). $\pi_1(X) \simeq (\Pi_{g,r})^{\frown}$.

但し, 群 Γ に対し, $\Gamma^{\frown}$ で Γ の profinite 完備化を表します. つまり, $\pi_1(X)$ は, $r = 0$ のときは種数 g の曲面群の profinite 完備化, $r > 0$ のときは階数 $2g + r - 1$ の自由 profinite 群となります.

④

定義. k を (任意標数の) 代数閉体とし, X, Y を k 上の曲線とする. k 上の曲線 Z と finite étale k- 射 $Z \to X$, $Z \to Y$ が存在するとき, X と Y を同種と言い, $X \sim Y$ と表す.

補題. $\tilde{X} \simeq \tilde{Y} \iff X \sim Y$.

したがって, ④ は次の望月の結果と同等です.

定理 ([Moc]). k を標数 0 の代数閉体とする. このとき, (g, r) を固定した k 上の双曲的曲線の中で, 各同種類は有限個の同型類からなる.

望月の結果の証明は, $PSL_2(\mathbb{R})$ の数論的部分群に関する二つの基本的な結果 (それぞれ Margulis と竹内による) を基礎としています.

1 節で, 三つ組 $(\tilde{X}, \pi_1(X), \tilde{X} \curvearrowleft \pi_1(X))$ から X が復元されることを復習しましたが, ④ は, X が標数 0 の代数閉体上の ((g, r) を固定した) 双曲的曲線のときには, 実は (pro-finite-étale) 普遍被覆 $\tilde{X}$ だけでも X の情報を「ほとんど」持っているということを示しています.

⑤ 次の結果から従います.

定理 1 ([PS], [Ra2], [T4]). $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ とし, Π を profinite 群とする. このとき, $(g_X, r_X) \neq (1, 0)$ なる k 上の曲線 X で $\pi_1(X)$ が Π と同型になるようなものの同型類は高高有限個しかない.

注. (i) π_1 を π_1^{t} (tame 基本群) に取り替えたバージョンもあります ([T4]).
(ii) $g_X = 0$ のときには, 曲線の (スキームとしての) 同型類が基本群で完全に決まってしまうという, より強い結果が得られています ([T1], [T3]).
(iii) 一般の正標数代数閉体 k に対する同様の結果はまだ証明されていませんが, この方向のものとしては, 最近の Saïdi の研究があります.

定理 1 の証明の主な材料は, Raynaud のテータ因子の理論 ([Ra1]), 一般化された Anderson-Indik の定理 ([AI], [PS], [Ra2]), Hrushovski の定理 ([H], cf. [PR]), 一般 Prym 多様体に対する無限小 Torelli 問題 ([T4]) などです.

1 節で, 三つ組 $(\tilde{X}, \pi_1(X), \tilde{X} \curvearrowleft \pi_1(X))$ から X が復元されることを復習しましたが, ⑤ は, X が $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の曲線のときには, 実は基本群 $\pi_1(X)$ だけでも X の情報を「ほとんど」持っているということを示しています.

⑥ ④ の解説の中の補題により, 次と同等です.

定理 2 (論文準備中, $p=2$ の場合は [T2]). $k=\overline{\mathbb{F}}_p$ とし, X, Y を k 上の affine 曲線とする. このとき, X と Y は同種である.

定理 2 の証明の主な材料は, Rumely と Moret-Bailly の定理 ([Ru], [Mor1], [Mor2]) の, 正標数における次の改良版です:

定理 3 ([T5]). k を $\mathbb{F}_p$ の代数拡大体とする. X を k 上の affine 曲線とし, η をその generic point とする. $f: W \to B$ を smooth, surjective な射とし, W_η が幾何的連結であると仮定する. このとき, f は finite étale quasi-section を持つ. すなわち, B の finite étale 被覆 B' が存在して, $\mathrm{Hom}_B(B', W) \neq \emptyset$.

注. Rumely と Moret-Bailly の定理は, 有限体上の affine 曲線だけでなく代数体の整数環に対しても成立しましたが, その改良版である定理 3 は, 正標数特有の現象と考えられます. (例えば, $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}} - \{0, 1, \infty\} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ は, finite étale quasi-section を持ちません.)

定理 3 の証明は, Moret-Bailly の証明 ([Mor1], [Mor2]) に基礎をおき, 更に Gabber のある議論 ([G]) からアイディアを得ています.

定理 2 の証明は, $X \sim \mathbf{A}^1_k$ を示せばよいわけですが, まず, ある (smooth, surjective, generically geometrically connected) X-scheme W であって, (finite) étale 射 $X \to \mathbf{A}^1_k$ が存在することと $W \to X$ に section が存在することとが同値になるようなものを構成します. (しかも, W は X の étale base change と可換になります.) ここで, $W \to X$ に定理 3 を適用すれば定理 2 が得られます. W の構成方法はいくつかあるのですが, いずれにしても p が大きくなるほど W の次元は上がります. その関係で $p=2$ の場合だけは問題が易しくなり, 定理 3 の代わりに類体論の単項化定理を用いても証明ができます ([T2]).

⑥ は, $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の affine 曲線に対し, $H \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathbf{A}^1_k)^{\sim}$ がリーマン面に対する上半平面 $\mathbb{H}$ の役割を果たしていることを示しています. $\mathbb{H}$ の持ついくつかの性質は, その類似を H に対しても証明することができます. この類似をもっと追求すると何かおもしろい数学を含んでいるかもしれないと少し期待しています.

なお, $\overline{\mathbb{F}}_p$ 以外の正標数代数閉体 k 上の affine 曲線の場合には, 対応 $X \mapsto \tilde{X}$ は constant でないことが示せます (almost injective でもない).

⑦ この場合が ④ と同様「almost injective」なのか ⑥ と同様「constant」なのか, あるいはどちらでもないのか, 現在の所筆者にはわかりませんが, どうなっているのか興味があります.

References

[AI] G. W. Anderson and R. Indik, *On primes of degree one in function fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 31–32.

[G] O. Gabber, *On space filling curves and Albanese varieties*, Geom. Funct. Anal. **11** (2001), 1192–1200.

[H] E. Hrushovski, *The Mordell-Lang conjecture for function fields*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 667–690.

[Moc] S. Mochizuki, *Correspondences on hyperbolic curves*, J. Pure Appl. Algebra **131** (1998), 227–244.

[Mor1] L. Moret-Bailly, *Groupes de Picard et problèmes de Skolem, I*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **22** (1989), 161–179.

[Mor2] ———, *Groupes de Picard et problèmes de Skolem, II*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **22** (1989), 181–194.

[PR] R. Pink and D. Roessler, *On ψ-invariant subvarieties of semiabelian varieties and the Manin-Mumford conjecture*, preprint (2002).

[PS] F. Pop and M. Saïdi, *On the specialization homomorphism of fundamental groups of curves in positive characteristic*, preprint, to appear in Galois Groups and Fundamental Groups, MSRI Publications, 41 (L. Schneps, ed.), 2003.

[Ra1] M. Raynaud, *Sections des fibrés vectoriels sur une courbe*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 103–125.

[Ra2] ———, *Sur le groupe fondamental d'une courbe complète en caractéristique $p > 0$*, in Arithmetic Fundamental Groups and Noncommutative Algebra (Berekeley, 1999), Proc. Symp. Pure Math., 70 (M. D. Fried and Y. Ihara, eds.), 2002, pp. 335–351.

[Ru] R. S. Rumely, *Arithmetic over the ring of all algebraic integers*, J. Reine Angew. Math. **368** (1986), 127–133.

[SGA1] A. Grothendieck and Mme. M. Raynaud, *Revêtements Etales et Groupe Fondamental, Séminaire de Géometrie Algébrique du Bois Marie 1960/61 (SGA 1),* Lecture Notes in Mathematics, 224, Springer-Verlag, 1971.

[T1] A. Tamagawa, *On the fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic* > 0, Internat. Math. Res. Notices (1999), no. 16, 853–873.

[T2] ———, *Coverings and vector bundles of algebraic curves in positive characteristic (Raynaud の理論とその最近の発展・応用)*, in 代数的整数論とその周辺 (Kyoto, 2000), 数理解析研究所講究録, 1200 (Y. Ihara, ed.), RIMS, Kyoto Univ., 2001, pp. 186–194.

[T3] ———, *On the tame fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic* > 0, preprint, to appear in Galois Groups and Fundamental Groups, MSRI Publications, 41 (L. Schneps, ed.), 2003.

[T4] ———, *Finiteness of isomorphism classes of curves in positive characteristic with prescribed fundamental groups*, preprint, submitted.

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

E-mail address: tamagawa@kurims.kyoto-u.ac.jp