数理解析研究所講究録 1324 巻 2003 年 174-182

量指標に付随するHecke L関数の値分布について

見正 秀彦 (Mishou Hidehiko)
名古屋大学多元数理科学研究科 (Nagoya University)

1 Introduction

$s=\sigma+it$ を複素数とする。$\sigma>1$ において Riemann zeta 関数を

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1}$$

により定義する。 zeta 関数の値分布の研究は次の結果に始まる。

H.Bohr (1911 [2],1914 [3])

1. 任意の複素数 $z\in\mathbb{C}$ と正数 $\varepsilon>0$ に対し、適当な $\sigma_0>1$ をとると、

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mu\left\{t\in[-T,T]\;\middle|\;|\zeta(\sigma_0+it)-z|<\varepsilon\right\}>0$$

が成り立つ。 ここで μ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度とする。

2. $\frac{1}{2}<\sigma_0<1$ を固定する。 このとき集合

$$\left\{\zeta(\sigma_0+it)\in\mathbb{C}\;\middle|\;t\in\mathbb{R}\right\}$$

は $\mathbb{C}$ 内で稠密である。

S.M. Voronin は、この結果を更に次のように拡張した。

Voronin (1972 [17]) $\frac{1}{2}<\sigma_0<1$, $N\in\mathbb{N}$ を固定する。このとき集合

$$\left\{\left(\zeta(\sigma_0+it),\zeta'(\sigma_0+it),\cdots,\zeta^{(N-1)}(\sigma_0+it)\right)\in\mathbb{C}^{N}\;\middle|\;t\in\mathbb{R}\right\}$$

は $\mathbb{C}^N$ 内で稠密となる。

この結果は次のように解釈できる。 任意の正則関数 $f(s)$ と、Riemann zeta 関数 $\zeta(s+it)$ の σ_0 における展開

$$f(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(\sigma_0)(s-\sigma_0)^{k},\quad \zeta(s+it)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\zeta^{(k)}(\sigma_0+it)(s-\sigma_0)^{k}$$

を考える。Voronin の結果より、十分小さい正数 $\delta>0$ に対し、実数 t で $|\zeta^{(k)}(\sigma_0+it)-f^{(k)}(\sigma_0)|<\delta \quad (0\le k\le N-1)$ を満たすものが存在するが、このような t に対しては、σ_0 の十分小さい近傍内で $\zeta(s+it)$ は $f(s)$ を近似していると考えられる。Voronin は以上のような考察から, 無限次元への拡張として、次の普遍性定理を得た。

Voronin (1975 [18]) $0<r<\frac{1}{4}$ とし, $f(s)$ は $|s|\le r$ 上連続な零点を持たない関数で $|s|<r$ 内で正則なものとする。この時、$^\forall\varepsilon>0$ に対し、次の不等式が成り立つ。

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mu\left\{t\in[-T,T]\ \middle|\ \max_{|s|\le r}|\zeta(s+\frac{3}{4}+it)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

これは即ち、殆んど全ての正則関数は $\zeta(s)$ の垂直方向への平行移動により、compact 集合上一様近似できることを意味する。 Riemann zeta 関数のこの性質を一般に普遍性 (universality) と呼ぶ。現在のところ、具体的な zeta 関数で普遍性が証明されているものは、以下のものである。

Dirichlet L-関数, Hurwitz zeta 関数 $\zeta(s,\alpha)$ (α は有理数、又は超越数) ([1],[5])
Dedekind zeta 関数 ([14]), Rankin-Selberg L-関数 ([9])
正則 Hecke eigen cusp forms に付随する保型 L 関数 ([8])

さて、上記の結果は全て、複素変数の虚軸方向（以下、t-aspect と呼ぶ）に着目した時の値分布に関するものである。 一方、S.M.Gonek [5], B.Bagchi [1] はそれぞれ独立に次の結果を得ている。

Bagch, Gonek (1979) $p_1,\cdots,p_r$:素数、 C:critical strip $\frac{1}{2}<\sigma<1$ 内の単連結 compact 集合、$f(s)$:C 上零点を持たない連続関数で、C の内部で正則な関数とする。このとき任意の $\varepsilon>0$ に対し、次の不等式が成り立つ。

$$\liminf_{q\to\infty}{}' \frac{1}{\phi(q)}\sharp\left\{\chi(\mathrm{mod}\,q)\ \middle|\ \max_{s\in C}|L(s,\chi)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0$$

ここで $L(s,\chi)$ は Dirichlet 指標 χ に付随する Dirichlet L-関数、$\phi(q)$ は Euler 関数、$\liminf'_{q\to\infty}$ は、

1. q を素数に制限、 又は

2. q を $p_1,\cdots,p_r$ により生成される整数に制限

してとる。

これはつまり、パラメーターとして Dirichlet 指標を選んでも同様の普遍性が成立する事を意味する。 近年、名越氏は [15] において、パラメーターとして正則 Hecke eigen cusp forms を、[16] においては Maass cusp forms を考えたとき、保型 L-関数に対する普遍性が成立する事を得ている。

2 Results

この講演の主題である Hecke L-関数を導入する。$K/\mathbb{Q}$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の有限次代数拡大、 $n=[K:\mathbb{Q}]$、$\mathfrak{q}$ を K の整数環 O_K のイデヤルとする。$\tilde{\mathfrak{q}}$ を法とする量指標は次の形で与えられる。

$$\chi\lambda^m = \chi\lambda_1^{m_1}\cdots\lambda_{n-1}^{m_{n-1}}$$

ただし、χ は $\tilde{\mathfrak{q}}$ を法とする類指標、$\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ は $\tilde{\mathfrak{q}}$ を法とする量指標の基底である。$\sigma>1$ において $\chi\lambda^m$ に付随する Hecke L-関数を

$$L(s,\chi\lambda^m)=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{\chi\lambda^m(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}=\prod_{\mathfrak{p}}\left(1-\frac{\chi\lambda^m(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1}$$

で定義する。 ここで $\mathfrak{a}$ は O_K のイデヤル、$\mathfrak{p}$ は素イデヤルを表し、$N\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}$ のノルムである。

Hecke L-関数の値分布は以下の 3 つの側面から考えることができる。

1. t-aspect (量指標 $\chi\lambda^m$ は固定)

2. m-aspect ($\chi,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ は固定。$m\in\mathbb{Z}^{n-1}$ を動かす)

3. χ-aspect ($m=0$ と固定。類指標 χ を動かす)

まず t-aspect について。既に [12] で次を報告済みである。

Theorem 1. $K/\mathbb{Q}$ を n 次代数拡大、量指標 $\chi\lambda^m$ を固定する。$\sigma_K=\max\{\frac{1}{2},1-\frac{1}{n}\}$ とし、C を *strip* $\sigma_K<\sigma<1$ 内の単連結 *compact* 集合、関数 $f(s)$ を C 上零点を持たない連続関数で、C の内部で正則なものとする。このとき $^\forall\varepsilon>0$ に対し、 次の不等式が成り立つ。

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mu\left\{t\in[0,T]\mid\max_{s\in C}|L(s+it,\chi\lambda^m)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0. \tag{1}$$

m-aspect については次の結果が得られた。

Theorem 2. *(i)* $K/\mathbb{Q}$*: Galois* 体、$[K:\mathbb{Q}]\geq 3$ とする。法 $\tilde{\mathfrak{q}}$ と、$\chi,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ を固定する。このとき、$^\forall z\in\mathbb{C}$, $^\forall\varepsilon>0$ に対し、適当な $\sigma_0>1$ を取ると、

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T^{n-1}}\sharp\left\{m\in\mathbb{Z}^{n-1}\mid ||m||\leq T,\ |L(\sigma_0,\chi\lambda^m)-z|<\varepsilon\right\}>0$$

が成立する。 ここで $||m||=\max_{1\leq i\leq n-1}|m_i|$。

(ii) $K/\mathbb{Q}$ を n 次代数拡大、$\chi,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$ は固定する。C, $f(s)$ は Theorem 1 と同じ仮定を満たすものとする。このとき $^\forall\varepsilon>0$ に対し、

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T^n}\mu'\left\{(m,t)\in[-T,T]^n\mid\max_{s\in C}|L(s+it,\chi\lambda^m)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0$$

ここで μ' は $\mathbb{Z}^{n-1}\times\mathbb{R}$ 上の積測度である。

Theorem 2 (i) は Bohr の結果の類似に他ならない。一方、Theorem 2 (ii) は一見すると Theorem 1 の (1) 式を m について平均化した形をしており、Theorem 1 から自然に導けるように見える。しかしながら、これは普遍性定理の課題の一つでもあるが、(1) 式の下からの評価は当然 m に依存するものの、それは explicit には分かっておらず、従って、Theorem 1 から Theorem 2(ii) は、そのままでは得られないことを注意しておく。逆に、Theorem 2(ii) は次の予想が t について平均的に成り立つことを保証していると考えられる。

Conjecture (小山) Theorem 1 と同じ仮定の下で、

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T^{n-1}}\sharp\left\{m\in\mathbb{Z}^{n-1}\;\middle|\;\|m\|\le T,\ \max_{s\in C}|L(s,\chi\lambda^m)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0. \qquad (2)$$

この予想は、Theorem 2(i)、及び Introduction から 尤もらしいと考えられる。

最後に χ-aspect について。これは Dirichlet L 関数の χ-aspect の自然な拡張であるが、今のところ次の結果しか得られていない。

Theorem 3. $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ を虚二次体、$\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_r$ を K の素イデヤル、C を *strip* $\frac{2}{3}<\sigma<1$ 内の単連結 *compact* 集合、$f(s)$ を C 上零点を持たない連続関数で、C の内部で正則なものとする。このとき $^\forall\varepsilon>0$ に対し、

$$\mathop{{\liminf}'}_{N\mathfrak{q}\to\infty}\frac{1}{h(\mathfrak{q})}\sharp\left\{\chi(\mathrm{mod}\mathfrak{q})\;\middle|\;\max_{s\in C}|L(s,\chi)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0$$

ここで $h(\mathfrak{q})$ は $\tilde{\mathfrak{q}}$ を法とする類数、$\liminf'_{N\mathfrak{q}\to\infty}$ は

1. $\mathfrak{q}$ を K の素イデヤルに制限、又は

2. $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_r$ により生成されるイデヤルに制限

してとる。

3 証明の Outline

この節では Theorem 2、3 の証明の概略を、必要とする整数論的な事実に重点を置いて解説する。いずれの場合も、証明は大きく 3 段階に分けることができる。

まず Theorem 2(i) について。$^\forall z\neq 0$ をとり、

$$|\log z-\log L(\sigma_0,\chi\lambda^m)|<\varepsilon$$

を満たす m 全体が $\mathbb{Z}^{n-1}$ 内で正の密度を持つような σ_0 の存在を示す。

(Step 1) まず条件収束する実級数に関する Riemann の定理より、次が示せる。

Lemma 1. 任意の z,ε に対し、$\sigma_0>1$, $\theta_\mathfrak{p}\in[0,1)$ *s.t.* $\sum_{\mathfrak{p}|p}\theta_\mathfrak{p}=0$ (p：素数) を適当に選ぶと、十分大きい任意の正数 M に対し、

$$\left|\log z-\sum_{N\mathfrak{p}\le M}\frac{\chi(\mathfrak{p})e(\theta_\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{\sigma_0}}\right|<\varepsilon$$

が成立する。ここで、$e(x)=e^{2\pi ix}$。

(Step 2)　$\sigma > 1$ における Euler 積の絶対収束性から、十分大きい M に対し、

$$\left|\log L(\sigma_0, \chi\lambda^m) - \sum_{N\mathfrak{p}\le M} \frac{\chi\lambda^m(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{\sigma_0}}\right| < \varepsilon$$

が全ての $m \in \mathbb{Z}^{n-1}$ に対し成り立つ。
(Step 3) 後は、不等式

$$\left|\sum_{N\mathfrak{p}\le M} \frac{\chi\lambda^m(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{\sigma_0}} - \sum_{N\mathfrak{p}\le M} \frac{\chi(\mathfrak{p})e(\theta_{\mathfrak{p}})}{N\mathfrak{p}^{\sigma_0}}\right| < \varepsilon$$

言い換えると、十分小さい $\delta > 0$ に対し

$$||\theta_{\mathfrak{p}} - \frac{1}{2\pi}\arg\lambda^m(\mathfrak{p})|| < \delta$$

を満たす $m \in \mathbb{Z}^{n-1}$ が正の密度で存在することを示せば良い。 これは次より明らかである。

Lemma 2. 素イデヤル $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$ は $p|\mathfrak{p}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{p}_r^{e_r}$ を満たすような素数 p, $e_i \ge 0$ が存在しないようにとる。このとき $^\forall\theta_i \in [0,1)$, $\delta > 0$ に対し、

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{(2T)^{n-1}}\#\left\{m \in \mathbb{Z}^{n-1} \mid ||m|| \le T,\ ||\theta_i - \frac{1}{2\pi}\arg\lambda^m(\mathfrak{p}_i)|| < \delta\right\} = (2\delta)^r$$

この lemma は、基底 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ の kernel を求めることにより得られる。
次に Theorem 2(ii) について。不等式

$$\max_{s\in C}|\log f(s) - \log L(s+it, \chi\lambda^m)| < \varepsilon$$

を満たす (m,t) が正の密度で存在することを示そう。
(Step 1)　Lemma 1 に対応するものとして、次が得られる。

Lemma 3. 素数 p に対し、$\alpha_p = \sum_{N\mathfrak{p}=p}\chi(\mathfrak{p})$ と定める。この時 $\theta_p \in [0,1)$ を適当に選ぶと、十分大きい M に対し、

$$\max_{s\in C}\left|\log f(s) - \sum_{p\le M}\frac{\alpha_p e(\theta_p)}{p^s}\right| < \varepsilon$$

が成り立つ。

この lemma は、正則関数のなす実 Hilbert 空間に、ある関数解析の結果を適用すると、次の素数定理型の評価に帰着できる。

Lemma 4. $^\forall\varepsilon > 0$ に対し、正定数 $C, c > 0$ が存在し、$x > 0$ に対し、

$$\sum_{\substack{p\le x\\ |\alpha_p|\ge n-\varepsilon}} 1 = C\int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(x\exp(-c\sqrt{\log x}))$$

が成り立つ。

これは類体論、及び Chebotarev の密度定理から従う。
(Step 2) 今、$\frac{1}{2} < \sigma < 1$ より、Euler 積の絶対収束性は成り立たず、必ずしも全ての (m, t) について、$\log L(s + it, \chi\lambda^m)$ が有限の Dirichlet 多項式で近似出来るとは限らない。しかし $L(s, \chi\lambda)$ の近似関数等式と t についての二乗平均評価式

$$\int_{-T}^{T} |\sum_{n\le X} a_n n^{-it}|^2 dt \ll (T + X)\sum_{n\le X} |a_n|^2 \tag{3}$$

を用いることにより、評価式

$$\sum_{||m||\le T}\int_{-T}^{T}\left|\log L(s+it,\chi\lambda^m) - \sum_{p\le M}\frac{1}{p^{s+it}}\sum_{N\mathfrak{p}=p}\chi\lambda^m(\mathfrak{p})\right|^2 dt \ll T^n M^{1-2\sigma} \tag{4}$$

が得られ、従って、M を十分大きく取ると、殆んど全ての $(m, t) \in [-T, T]^n$ について、

$$\max_{s\in C}\left|\log L(s+it,\chi\lambda^m) - \sum_{p\le M}\frac{1}{p^{s+it}}\sum_{N\mathfrak{p}=p}\chi\lambda^m(\mathfrak{p})\right| < \varepsilon$$

が満たされる事が分かる。
(Step 3) 後は、十分小さい $\delta > 0$ に対し、

$$\left|\alpha_p e(\theta_p) - p^{-it}\sum_{N\mathfrak{p}=p}\chi\lambda^m(\mathfrak{p})\right| < \delta$$

又は、

$$||\frac{1}{2\pi}\arg\lambda^m(\mathfrak{p})|| < \delta, \quad ||\theta_p - \frac{t}{2\pi}\log p|| < \delta$$

を満たす m,t がそれぞれ正の密度で存在することをいえばよい。前者は Lemma 2 から明らか。後者は $\{\log p\}$ の $\mathbb{Q}$ 上の一次独立性、即ち、素因数分解の一意性と、Kronecker-Weyl の定理から従う。

上記の証明では、(Step 2) において t についての二乗平均評価 (3) を用いたが、W.Duke [4] は量指標の巾 m についても、次のような二乗平均評価式が成り立つと予想している。

$$\sum_{||m||\le T}\left|\sum_{N\mathfrak{a}\le X} c(\mathfrak{a})\lambda^m(\mathfrak{a})\right|^2 \ll (T^{n-1} + X)\sum_{N\mathfrak{a}\le X} |c(\mathfrak{a})|^2$$

この不等式を仮定すると、(4) 式と同様にして不等式

$$\sum_{\|m\|\le T}\left|\log L(s,\chi\lambda^m)-\sum_{p\le M}\frac{1}{p^s}\sum_{N\mathfrak{p}=p}\chi\lambda^m(\mathfrak{p})\right|^2 \ll T^{n-1}M^{1-2\sigma}$$

が得られ、(Step 2) は m のみで考察しても成り立つ事が分かり、後は Lemma 2 を用いることにより、m のみについての普遍性、即ち小山氏の予想 (2) が成立することを注意しておく。

最後に χ-aspect について考える。この場合問題となるのは、類数

$$h(\mathfrak{q})=h_K\frac{\phi(\mathfrak{q})}{[U:U(\mathfrak{q})]}\qquad\left(\begin{array}{l} h_K : K \text{ の狭義絶対類数},\ \phi(\mathfrak{q}) : \text{Euler 関数} \\ U : K \text{ の単数群},\ U(\mathfrak{q})=\{\eta\in U\mid \eta\equiv 1 \pmod{\tilde{\mathfrak{q}}}\}\end{array}\right)$$

のノルム $N\mathfrak{q}$ による下からの評価である。 実際、t-aspect の二乗平均評価式 (3) に対応するものとして、

$$\sum_{\chi \pmod{\tilde{\mathfrak{q}}}}\left|\sum_{N\mathfrak{a}\le X}c(\mathfrak{a})\chi(\mathfrak{a})\right|^2 \ll (h(\mathfrak{q})+X)\sum_{N\mathfrak{a}\le X}|c(\mathfrak{a})|^2$$

が知られているが、これと $L(s,\chi)$ の近似関数等式を用いると、M：十分大と $0<d=d(\varepsilon,M)<1$ に対し、評価式

$$\sharp\left\{\chi \pmod{\tilde{\mathfrak{q}}}\mid \max_{s\in C}\left|\log L(s,\chi)-\sum_{N\mathfrak{p}\le M}\frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right|<\varepsilon\right\}=h(\mathfrak{q})+O(N\mathfrak{q}^{1-d})$$

が得られる。 今までと同様に、" 殆んど全ての χ について、$\log L(s,\chi)$ が有限の Dirichlet 多項式で近似できる" 事を証明する為には、十分小さい $\delta>0$ に対し、

$$h(\mathfrak{q})\gg N\mathfrak{q}^{1-\delta},\ \text{又は}\quad [U:U(\mathfrak{q})]\ll N\mathfrak{q}^{\delta} \tag{5}$$

くらいの評価が必要となる。

まず、K:虚二次体とするならば、単数群の有限性より、上の評価は明らかに成り立ち、従って、(Step 1)、 (Step 2) は成り立つ。 (Step 3)、即ち、

$$\|\theta_{\mathfrak{p}}-\frac{1}{2\pi}\arg\chi(\mathfrak{p})\|<\delta$$

を満たす類指標 χ の存在は、 指標の直交性

$$\sum_{\chi \pmod{\tilde{\mathfrak{q}}}}\chi(\mathfrak{a})=\begin{cases} h(\mathfrak{q}) & (\mathfrak{a}\equiv 1 \pmod{\tilde{\mathfrak{q}}}) \\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

と、一様分布に関する Weyl の規準から示せ、 これから Theorem 3 が得られる。

一方、それ以外の場合だと、$h(\mathfrak{q})$ の $N\mathfrak{q}$ による自明でない一様な評価というのは残念ながら知られていない。しかしながら、北岡氏による合同類別による単数の

分布に関する研究 [6] がこの問題に対し有効なのでは、と考えている。例えば、[6] の Theorem 1 の系として、次が得られる。

Corollary (北岡) $K/\mathbb{Q}$ を n 次実 Galosi 体とする。このとき、正定数 C_K, C が存在し、

$$\sharp\left\{\mathfrak{p} : K \text{ の } n \text{ 次の素イデヤル} \;\middle|\; \begin{array}{l} p \leq x,\ \mathfrak{p}|p, \\ C_K(p-1)|h(\mathfrak{p}) \end{array}\right\} \sim C\int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

が成り立つ。

これはつまり、一定以上の割合の素イデヤル $\mathfrak{p}$ については、自明でない評価

$$h(\mathfrak{p}) \gg N\mathfrak{p}^{\frac{1}{n}}$$

が成立する事を意味する。目標とする評価 (5) と比較すると、これはかなり弱いものであるが、Theorem 3 における C についての条件、正確には stirip $\frac{2}{3} < \sigma < 1$ の幅を狭め、又、極限 $\lim_{N\mathfrak{q}\to\infty}$ の取り方を、このような素イデヤル $\mathfrak{p}$ に制限する事により、普遍性が成り立つであろうと考えられる。

References

[1] B.Bagchi, *The statistical behavior and universality properties of the Rieman zeta-function and other allied Dirichlet series*, Ph. D. Thesis, Calcutta, Indian Stastical Institute, (1981).

[2] H.Bohr, *Über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II Math.-phys. Kl., (1911), 409-428.

[3] H.Bohr, *Zur Theorie der Riemann'schen Zeta-funktion im kritischen Streifen*, Acta Math. 40(1915), 67-100.

[4] W.Duke, *Some problems in multidimentional analytic number theory*, Acta. Arith. 52(1989), 203-228.

[5] S.M.Gonek, *Analytic properties of zeta and L-functions*, Ph. D. Thesis. University of Michigan., (1979).

[6] 北岡 良之, *Distribution of units of an algebraic number field*, 数理解析研究所講究録 1274(2001), 157-162.

[7] S.Koyama and H.Mishou, *Universality of Hecke L-functions in the Grössencharacter-aspect*, Proc. Japan Acad., 78, Ser.A (2002).

[8] A.Laurinčikas - K.Matsumoto, *The universality of zeta-function attached to certain cusp forms*, Acta Arith., 98(2001), no.4, 345-359.

[9] K.Matsumoto, *The mean values and the universality of Rankin-Selberg L-functions*, Number theory (Turku, 1999), 201-221, de Gruyter, Berlin, 2001.

[10] H.Mishou, *The universality theorem for L-functions associated with ideal class characters*, Acta Arith., 98(2001), 395-410.

[11] H.Mishou, *The universality theorem for Hecke L-functions*, Acta Arith., to appear

[12] 見正 秀彦, 量指標を持つ *Hecke L*-関数の *Universality theorem*, 数理解析研究所講究録 1219(2001), 68-76.

[13] H.Mishou, *The universality theorem for Hecke L-functions in the* (m,t) *aspect*, preprint.

[14] A.Reich, *Werteverteilung von Zetafunktionen*, Arch. Math. 34(1980), 440-451.

[15] H.Nagoshi, *The universality of families of automorphic L-functions*, preprint.

[16] H.Nagoshi, *The universality of L-functions attached to eigenfunctions for* $SL(2,\mathbb{Z})$, preprint.

[17] S.M.Voronin, *On the distribution of nonzero values of the Riemann* ζ*-function*, Proc. Steklov Inst. Math. 128(1972), 153-175.

[18] S.M.Voronin, *Theorem on the "universality " of the Riemann zeta-function*, Math. USSR-Izv. 9(1975), 475-486.