数理解析研究所講究録 1324 巻 2003 年 197-206

Automorphic L-functions via Novodvorsky's integrals

東京大学数理科学 森山 知則
(Tomonori Moriyama)

§0. 序

本稿では，次数2の非正則 Siegel 尖点形式 F に付随する，4次の Euler 積を持つ保型的 L-関数 (spinor L-関数と呼ばれる) $L(s,F)$ について得た結果を述べる。より詳しくは，F が Fourier 展開についてのある条件 (通常 "generic" と呼ばれる条件である) を満たし，かつ無限素点で**非正則**な離散系列表現を生成する場合に，F の spinor L-関数が全 s-平面に整型に解析接続され期待される関数等式を満たすことを証明した筆者の結果 [Mo-3] を解説する。

Siegel 尖点形式 F に，上記のような仮定を課す理由を説明しよう。問題の L-関数を調べるために，我々は，Novodvorsky による spinor L-関数の積分表示 (Novodvorsky のゼータ積分) を用いる。この積分表示は，$GL(2)_{\mathbf{A}}$ 上の保型形式に付随した L-関数の Hecke-Jacquet-Langlands の積分表示理論 (§1 参照) の一般化である。この Novodvorsky の方法が適用できるための条件が，上述の「generic」なる仮定である。保型形式 F が無限素点で生成する表現は，F を generic とするとかなり限定される (たとえば，F が**正則な**次数2の Siegel 保型形式 F は決して generic にはなり得ない)。

多変数保型形式に付随した L-関数の積分表示理論は，対象とする保型形式の個性に応じた方法が各種知られている ([B-2] や [Ge-Sha] に 1980 年代後半までの結果がまとめられている)。しかしながら，最も興味ある場合である有界対称領域上の保型形式について，その L-関数の関数等式を証明した論文は，ほとんどが正則な保型形式を扱っている。これは次のことに起因する。保型的 L-関数の関数等式をその積分表示理論を使って証明しようとすると，保型形式を (一般化された意味で)Fourier 展開を記述するときに現れる実リー群上の特殊関数について詳しい情報を必要とする。この特殊関数が，正則保型形式の場合には指数関数などの比較的初等的な関数であるのに対し，非正則保型形式のときには捉まえがたいものだからである。ところが，1990 年代に入って，比較的小さな有界対称領域についてはこれらの特殊関数が詳細にわかるようになってきた ([O-2] とそこにある文献を参照)。本稿の状況では，問題の特殊関数は実リー群 $Sp(2,\mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数と呼ばれる関数である。 T.Oda([O-1]) は，F が無限素点で非正則な離散系列表現を生成するときに，この $Sp(2,\mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数が満たす方程式を構成しその積分表示を得ていた。最近になって，筆者は Whittaker 関数の Mellin-Barnes 型の積分による別の表示を得た ([Mo-2])。この新しい公式を用いることで，ゼータ積分の実素点における寄与をコントロールすることが可能となり，本稿の主結果を証明することが出来た。

なお，spinor L-関数の積分表示理論として，Andrianov の方法 ([An]) もあり，この手法でいくつかのクラスの非正則 Siegel 保型形式の関数等式を証明した論文として，[Ho], [Mi] がある。

今回の結果の大半は，2002 年1月に数理解析研究所で行われた研究集会「保型形式とそれに付随する Dirichlet 級数の研究」でも発表した ([Mo-4])。にもかかわらず，講演の機会を与えて下さった，栗原将人先生，田口雄一郎先生に感謝致します。

§1. 一変数の場合の復習

まず，保型的 L-関数の積分表示理論を一変数の場合に思い出す。

(1.1) Fourier 展開. まず $SL(2,\mathbf{R})$ 上の保型形式の定義を思い出す。Γ' を $SL(2,\mathbf{R})$ 離散部分群で $\Gamma'\backslash SL(2,\mathbf{R})$ が測度有限なものとする。C^∞- 関数 $\varphi: SL(2,\mathbf{R}) \to \mathbf{C}$ が，

(i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g) \quad \forall\gamma \in \Gamma', \forall g \in SL(2,\mathbf{R})$;
(ii) φ は右 $SO(2)$-有限 かつ $Z(\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}))$-有限。ここで，$Z(\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}))$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$ の普遍展開環 $U(\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}))$ の中心;
(iii) φ は緩増大，すなわちある $C > 0, M > 0$ が存在して $|\varphi(g)| \leqslant C||g||^M$ $(||g|| := \mathrm{tr}({}^tgg))$ となる，

をみたすとき，φ を $SL(2,\mathbf{R})$ 上の Γ' に関する保型形式 であるという。
$k > 0$ を正の整数とする。$SL(2,\mathbf{R})$ 上の保型形式 φ が 上半空間 $\mathfrak{h}_1 := \{x+\sqrt{-1}y \in \mathbf{C} | x \in \mathbf{R}, y > 0\}$ 上のウェイト k の正則尖点形式 φ_{dm} の持ち上げになっているとき，すなわち，

$$\varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (c\sqrt{-1}+d)^{-k}\varphi_{dm}((a\sqrt{-1}+b)(c\sqrt{-1}+d)^{-1}), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{R}),$$

となっているとき φ も正則尖点形式であると呼ぼう。以下，簡単のため $\Gamma' := SL(2,\mathbf{Z})$ とする。正則尖点形式 φ_{dm} の Fourier 展開 $\varphi_{dm}(z) = \sum_{l=1}^\infty a_l e^{2\pi\sqrt{-1}lz}$, $(z \in \mathfrak{h}_1)$ を**群論的に再構成**しよう。周期 1 の 周期関数 $\mathbf{R} \ni x \mapsto \varphi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g) \in \mathbf{C}$ に Fourier 逆変換公式を適用して，次のような φ の Fourier 展開を得る:

$$\varphi(g) = \sum_{l \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}} W_{\varphi,l}(g), \quad W_{\varphi,l}(g) := \int_0^1 \varphi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g)\exp(-2\pi\sqrt{-1}lx)dx.$$

今，φ は尖点形式なので $l = 0$ に対応する項は現れないことに注意する。

$$\sigma_\varphi := \mathbf{C}\text{-span}\{R(g_1)\varphi | g_1 \in SL(2,\mathbf{R})\}, \qquad [R(g_1)\varphi](g) := \varphi(gg_1), \quad g, g_1 \in SL(2,\mathbf{R}),$$

によって σ_φ を定めれば，σ_φ は右移動 R によって $SL(2,\mathbf{R})$ の表現となる。この表現 σ_φ(の $L^2(\Gamma'\backslash SL(2,\mathbf{R}))$ における完備化) は極小 $SO(2)$-type k を持つ $SL(2,\mathbf{R})$ の離散系列表現 D_k^+ で，φ はその最低ウェイトベクトルになっている。このことと，「Whittaker 模型の一意性」なる事実 ([Wa, Theorem 8.8], [Sh, Theorem 3.1]) から，ある $SL(2,\mathbf{R})$ 上の関数 $W_\varphi^{(\infty)}$ と複素数列 $a(l)$ $(l = 1, 2, \cdots)$ が存在して

$$W_{\varphi,l}(g) = a(l)W_\varphi^{(\infty)}(\begin{pmatrix} \sqrt{l} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{l} \end{pmatrix} g), \qquad g \in SL(2,\mathbf{R}),$$

と書けることがわかる。$W_\varphi^{(\infty)}$ は離散系列表現 D_k^+ に属す Whittaker 関数と呼ばれる。さらに，φ が最低ウェイトベクトルになっていることから，

$$W_\varphi^{(\infty)}(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}y^{k/2}e^{-2\pi y}e^{\sqrt{-1}k\theta},$$

であることがわかる。一方，$l < 0$ ならば，φ が緩増大であることを用いると $W_{\varphi,l} \equiv 0$ であることが出る。こうして

$$\varphi(g) = \sum_{l=1}^\infty a(l)W_\varphi^{(\infty)}(\begin{pmatrix} \sqrt{l} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{l} \end{pmatrix} g)$$

なる Fourier 展開を得る。これは，φ_{dm} の通常の Fourier 展開 $\varphi_{dm}(z)=\sum_{l=1}^{\infty}a_l e^{2\pi\sqrt{-1}lz}$, $(z\in\mathfrak{h}_1)$ と実質的に同じもので，$a(l)=l^{-k/2}a_l\ (l=1,2,\cdots)$ となっている。

(1.2) L-関数. まず，φ を

$$\varphi(\gamma z_\infty u_f g_\infty)=\varphi(g_\infty),\gamma\in GL(2)_{\mathbf{Q}},\ z_\infty>0,\ u_f\in GL(2,\widehat{\mathbf{Z}}),\ g_\infty\in SL(2,\mathbf{R}),$$

を満たすようにアデール群 $GL(2)_{\mathbf{A}}$ 上の関数として拡張する。φ の 大域的 Whittaker 関数を

$$W_\varphi(g):=\int_{\mathbf{Q}\backslash\mathbf{A}}\varphi(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}g)\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(-x)dx,\quad g\in GL(2)_{\mathbf{A}},$$

で定義する。ここで，$\mathbf{e}_{\mathbf{A}}:\mathbf{A}/\mathbf{Q}\to\mathbf{C}^{(1)}$ は $\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(x_\infty)=\exp(2\pi\sqrt{-1}x_\infty)\ (x_\infty\in\mathbf{R})$ により一意的に定まる $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ の指標である。φ_{dm} に付随した L-関数 $\widehat{L}(s,\varphi)$ の Hecke による積分表示 $\widehat{L}(s,\varphi)=\int_0^\infty\varphi_{dm}(\sqrt{-1}y)y^s d^\times y$ を，アデール群の上で書けば，

$$Z(s,\varphi):=\int_{\mathbf{Q}^\times\backslash\mathbf{A}^\times}\varphi(\begin{pmatrix}y&0\\0&1\end{pmatrix})|y|_{\mathbf{A}}^{s-1/2}d^\times y$$

となる (Jacquet-Langlands のゼータ積分)。これは,「unfolding」 によって,

$$Z(s,\varphi)=\int_{\mathbf{A}^\times}\mathcal{W}_\varphi(\begin{pmatrix}y&0\\0&1\end{pmatrix})|y|_{\mathbf{A}}^{s-1/2}d^\times y,\quad \mathrm{Re}(s)\gg 0$$

と変形できる。さらに，φ_{dm} が Hecke-eigen form ならば，大域的 Whittaker 関数 $\mathcal{W}_\varphi(g)$ は，$\mathcal{W}_\varphi(g)=\prod_v\mathcal{W}_\varphi^{(v)}(g_v)$, $g=(g_v)\in GL(2)_{\mathbf{A}}$ と局所的な Whittaker 関数の積に分解するので，$Z(s,\varphi)$ も局所的な積分 (局所ゼータ積分) の積で書け，問題の L-関数のオイラー積表示を得る。特に，$\mathcal{W}_\varphi^{(\infty)}|_{SL(2,\mathbf{R})}=W_\varphi^{(\infty)}$ なので，実素点 $v=\infty$ での積分から正しいガンマ因子 $\Gamma_{\mathbf{C}}(s+(k-1)/2)$ が出てくる。

以上が，Jacquet-Langlands([J-L]) によって再構築された一変数保型形式の Hecke 理論の要点である。本稿で用いる，Novodvorsky のゼータ積分は，この $GL(2)$ のゼータ積分の $GSp(2)$ への一般化の一つである。$GSp(2)$ の場合には $\mathcal{W}_\varphi^{(\infty)}$ として「higher transcendental function」が現れるので局所ゼータ積分の計算はより難しくなることを注意しておこう。

§2. 主結果

問題とする保型形式とその Fourier 展開について幾つか準備した後，本稿の主定理を述べる。

(2.1) Siegel 尖点形式. G を階数 2 の実 simplectic 群とする：

$$G=Sp(2,\mathbf{R}):=\left\{g\in GL(4,\mathbf{R})\,\middle|\,{}^tgJ_4g=J_4=\begin{pmatrix}0&I_2\\-I_2&0\end{pmatrix}\right\}.$$

G の離散部分群 Γ として，$\Gamma:=Sp(2,\mathbf{Z})=G\cap SL(4,\mathbf{Z})$ をとる。$F:\Gamma\backslash G\to\mathbf{C}$ が G 上の Γ に関する保型形式とは，次を満たすことを言う：

(i) $F(\gamma g)=F(g)\quad\forall\gamma\in\Gamma,\forall g\in Sp(2,\mathbf{R})$;
(ii) φ は右 K-有限 かつ $Z(\mathfrak{sp}(2,\mathbf{R}))$-有限。ここで, $K:=Sp(2,\mathbf{R})\cap O(4)$ で，$Z(\mathfrak{sp}(2,\mathbf{R}))$ は $\mathfrak{sp}(2,\mathbf{R})$ の普遍展開環 $U(\mathfrak{sp}(2,\mathbf{R}))$ の中心;
(iii) φ は緩増大，すなわちある $C>0, M>0$ が存在して $|\varphi(g)|\leqslant C||g||^M$ $(||g||:=\mathrm{tr}({}^tgg))$ となる.

以下，F は次の仮定を満たすものとする：

仮定１． F は Hecke-eigen cusp form である。

仮定２． F は G の非正則な離散系列表現 $D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ $(1-\lambda_1<\lambda_2<0)$ を生成し，F は $D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ の極小 K-タイプ $\tau_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ の最低ウェイトベクトル v_0 に対応する。すなわち，

$$\Pi_F := \mathbf{C}\text{-span}\{R(g_1)F \mid g_1\in G\},\qquad [R(g_1)F](g) := F(gg_1)$$

によって Π_F を定めれば，Π_F は右移動 R によって G の表現となる。この表現 Π_F(の $L^2(\Gamma\backslash G)$ における完備化) が $D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ である。ここで用いた $Sp(2,\mathbf{R})$ の離散系列表現についての記号は，[O-1] と同じものでここでは説明を繰り返さない。ただ，ベクトル $v_0\in D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ は，前節の D_k^+ の最低ウェイトベクトルがそうであるように，$D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ の中のある特徴的な元であるとだけ言っておく。

仮定３． F は generic である。

この「 generic 」なる用語の定義を述べよう。２つの正の整数の組 $(k,l)\in\mathbf{Z}_{>0}\times\mathbf{Z}_{>0}$ に対して次の積分

$$F_{k,l}(g) = \int_{(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^4} F\left(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & x_1 & x_2 \\ & 1 & x_2 & x_3 \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -x_0 & 1 \end{array}\right) g\right)\mathbf{e}(kx_0+lx_3)\,dx_3dx_2dx_1dx_0,$$

を考える。F が generic とは，ある (k,l) について積分 $F_{k,l}$ が消滅しないということである (今の場合，**仮定１，２** によって，$F_{1,1}$ が消滅しないと言っても同じことである)。§1 と同様に，Whittaker 模型の一意性から，(k,l) によらないある $Sp(2,\mathbf{R})$ 上の C^∞- 関数 $W_F^{(\infty)}$ と複素数 $c(k,l)$ たちが存在して，上の積分たちは，一斉に

$$F_{k,l}(g) = c(k,l)\times W_F^{(\infty)}\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\left(\begin{array}{cc|cc} kl & & & \\ & l & & \\ \hline & & k^{-1} & \\ & & & 1 \end{array}\right)g_\infty\right), \tag{2.1}$$

と書くことができる。ここで，$W_F^{(\infty)}$ は $Sp(2,\mathbf{R})$ の非正則な離散系列表現 $D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ に属す Whittaker 関数と呼ばれるものである。この関数の明示公式が次節で与えられるが，これが主定理の証明で決定的な役割を演ずる。複素数 $c(k,l)$ たちを <u>F の Fourier 係数</u>と呼ぶことにする。

(2.2) spinor L-関数. 次数２の Siegel 尖点形式 F が**仮定１**から**仮定３**を満たすものとする。このとき，F の Fourier 級数 $c(k,l)$ から，spinor L-関数 $L(s,F)$ が

$$L(s,F) := \sum_{l=1}^{\infty} c(1,l)\, l^{-s+3/2}$$

で定義される。今，F が尖点形式であることから，Fourier 級数たち $c(k,l)$ は有界である。従って上の Dirichlet 級数は $\mathrm{Re}(s)>5/2$ で絶対収束する。後でみるように，$L(s,F)$ は４次の Euler 積に分解することがわかる。さらに，ガンマ因子

$$L_\infty(s,F) := \Gamma_{\mathbf{C}}\Big(s+\frac{\lambda_1-1}{2}+\frac{\lambda_2}{2}\Big)\Gamma_{\mathbf{C}}\Big(s+\frac{\lambda_1-1}{2}-\frac{\lambda_2}{2}\Big)$$

を掛けて，完備化された L-関数 $\widehat{L}(s,F)$ を

$$\widehat{L}(s,F) := L_\infty(s,F) \times L(s,F)$$

で定義する。さて，我々の結果は次の通り：

定理 2.1. $\widehat{L}(s,F)$ は全 s-平面に**整型**に解析接続され，関数等式

$$\widehat{L}(s,F) = (-1)^{\lambda_1}\widehat{L}(1-s,F)$$

を満たす。

注意 2.2. ここで導入したガンマ因子および関数等式の符号 $(-1)^{\lambda_1}$ は，次節で見るように，局所ゼータ積分を計算すると自然に現れるものだが，これらは F の生成する $GSp(2,\mathbf{R})$ の表現から実数体 $\mathbf{R}$ 上の局所 Langlands 対応 ([La]) を通じて定まるもの ([Kn],[Ta]) と一致する。

§3. 証明の概略

序で述べたように，証明には Novodvorsky([No-1],[No-2, §1]) が 1970 年代中ごろに考案した $L(s,F)$ の積分表示を用いる。

(3.1) アデール群への拡張. まず，尖点形式 F をアデール群上の関数に拡張しよう。G を $\mathbf{Q}$ 上定義された similitude 付きの 2 次 simplectic 群とする：

$$\mathsf{G} = GSp(2) := \{g \in GL(4) \,\big|\, {}^t g J_4 g = \nu(g) J_4 \text{ for some } \nu(g) \in \mathbf{G}_m\}.$$

$\mathsf{G}_\mathbf{A}$ の勝手な元 g は

$$g = \gamma z_\infty u_f g_\infty, \quad \gamma \in \mathsf{G}_\mathbf{Q},\ z_\infty > 0,\ u_f \in GSp(2,\widehat{\mathbf{Z}}),\ g_\infty \in Sp(2,\mathbf{R}),$$

と書け，しかも $Sp(2,\mathbf{R}) \cap \mathsf{G}_\mathbf{Q} GSp(2,\widehat{\mathbf{Z}}) = Sp(2,\mathbf{Z})$ なので，F は $\mathsf{G}_\mathbf{A}$ 上の

$$F(\gamma z_\infty u_f g_\infty) = F(g_\infty),$$

を満たす関数に一意的に拡張される。位数 2 の元 $\eta \in \mathsf{G}_\mathbf{Q}$ を

$$\eta := \left(\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & -1 & & \\ 1 & & & \end{array}\right),$$

で定め，$\widetilde{F}(g) := F(g\eta)$ $(g \in \mathsf{G}_\mathbf{A})$ とおく。

(3.2) ゼータ積分. spinor L-関数の Novodvorsky の積分表示（ゼータ積分）は次で定義される。

定義 3.1. 尖点形式 F に付随する Novodvorsky のゼータ積分 $Z_N(s) := Z_N(s,F)$ を

$$Z_N(s,F) := \int_{\mathbf{A}^\times/\mathbf{Q}^\times}\int_{(\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{\oplus 3}} F\left(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_0 & x_1 & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & z & -x_0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} y & & & \\ & y & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)\right)$$
$$\times\, \mathbf{e}_\mathbf{A}(x_0)|y|_\mathbf{A}^{s-1/2} dx_0 dx_1 dz d^\times y,$$

で定義する。これは，任意の s で絶対収束し s の整関数を定める。

簡単な積分の変形によって，$Z_N(s,F)=Z_N(1-s,\tilde{F})$ がわかる。次の命題を述べるために F の 大域的 Whittaker 関数 を導入する。まず，G の極大冪単部分群 N として

$$\mathsf{N}:=\left\{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ \hline & & 1 & \\ & & * & 1 \end{array}\right)\in\mathsf{G}\right\},$$

をとり，$\mathsf{N}_{\mathbf{A}}$ のユニタリ指標 $\psi_{\mathbf{A}}:\mathsf{N}_{\mathbf{A}}\to\mathbf{C}^{(1)}$ を

$$\psi_{\mathbf{A}}(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & n_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -n_0 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & n_1 & n_2 \\ & 1 & n_2 & n_3 \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right))=\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(-n_0-n_3)\in\mathbf{C}^{(1)},$$

で定める。そうして，F の大域的 Whittaker 関数を

$$\mathcal{W}_F(g):=\int_{\mathsf{N}_{\mathbf{Q}}\backslash\mathsf{N}_{\mathbf{A}}}F(ng)\psi_{\mathbf{A}}(n^{-1})dn,\quad g\in\mathsf{G}_{\mathbf{A}},$$

で定義する。さて，今，F は Hecke-eigen であると仮定していることから

$$\mathcal{W}_F(g)=\prod_v\mathcal{W}_F^{(v)}(g_v),\qquad \text{for } g=(g_v)\in\mathsf{G}_{\mathbf{A}},$$

と局所 Whittaker 関数の積に分解することがわかる。ある種の「unfolding」によって，次が証明される (証明は，[B2, §3], [Mo-2, 付録 2] を参照)：

命題 3.2 (Basic identity). *無限素点における局所ゼータ積分 $Z_N^{(\infty)}(s,\mathcal{W}_F^{(\infty)})$ (定義は，すぐ下に与える) が $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ で絶対収束すると仮定する。このとき，積分*

$$\int_{\mathbf{A}^\times}\int_{\mathbf{A}}\mathcal{W}_F(\left(\begin{array}{cc|cc} y & & & \\ & y & & \\ \hline & & 1 & \\ & x & & 1 \end{array}\right))|y|_{\mathbf{A}}^{s-3/2}\,dx\,d^\times y. \tag{3.1}$$

は $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ で絶対収束して，$Z_N(s,F)$ に等しい。

この命題によって，$Z_N(s,F)$ も

$$Z_N(s)=\prod_v Z_N^{(v)}(s),\qquad Z_N^{(v)}(s):=\int_{\mathbf{Q}_v^\times}\int_{\mathbf{Q}_v}\mathcal{W}_F^{(v)}(\left(\begin{array}{cc|cc} y & & & \\ & y & & \\ \hline & & 1 & \\ & x & & 1 \end{array}\right))|y|_v^{s-3/2}\,dx\,d^\times y.$$

と局所因子の積に分解する。さて，§2 の記号を使うと，

$$\mathcal{W}_F^{(\infty)}|_{Sp(2,\mathbf{R})}=W_F^{(\infty)},\qquad c(k,l)=\prod_{p<\infty}\mathcal{W}_F^{(p)}(\left(\begin{array}{cc|cc} kl & & & \\ & l & & \\ \hline & & k^{-1} & \\ & & & 1 \end{array}\right))$$

であることは容易に確められる。これから，

$$L(s,F)=\prod_{p<\infty} Z_N^{(p)}(s),$$

であることがわかる。

ここで，$Z_N^{(p)}(s)$ が 4 次の Euler 因子になることを確認しておこう。F の $G_{\mathbf{Q}_p}$ による右移動たちは $\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p}$ の不分岐主系列表現を生成している。その佐武パラメータ (F における Hecke 作用素の固有値の情報を内包する量) を $A_p \in GSp(2,\mathbf{C})$ とする。(今，F は直交群 $SO_{3,2}$ 上の保型形式ともみなし得るので，$A_p \in Sp(2,\mathbf{C}) = {}^L SO_{3,2}$ である)。不分岐 Whittaker 関数の明示公式 ([C-S],[Ka]) を使うと，$Z_N^{(p)}(s)$ が次のように計算できる ([B2, §3],[Mo-4, 付録 2] を参照)：

命題 3.3. $Z_N^{(p)}(s)$ は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束して，定数倍を除いて，

$$Z_N^{(p)}(s) = \left[\det(1-A_p p^{-s})\right]^{-1},$$

である。

こうして，

$$Z_N(s,F) = Z_N^{(\infty)}(s) \times L(s,F), \qquad \mathrm{Re}(s) \gg 0$$

であることがわかった。$\mathbf{Q}$ の各素点 v に対して，$\eta \in \mathsf{G}_{\mathbf{Q}}$ の埋め込み $\mathsf{G}_{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathsf{G}_{\mathbf{Q}_v}$ による像を η_v で表し，$\widetilde{\mathcal{W}}_F^{(v)}(g_v) := \mathcal{W}_F^{(v)}(g_v\eta_v)$ $(g_v \in \mathsf{G}_{\mathbf{Q}_v})$ とすれば，

$$\mathcal{W}_{\tilde{F}}(g) = \prod_v \widetilde{\mathcal{W}}_F^{(v)}(g_v), \quad \forall g=(g_v)\in \mathsf{G}_{\mathbf{A}}; \qquad \mathcal{W}_F^{(p)}(g_p) = \widetilde{\mathcal{W}}_F^{(p)}(g_p) \quad \forall p<\infty,$$

である。したがって，次を証明すれば $\widehat{L}(s,F)$ の全 s-平面への（有理型）解析接続と関数等式が従う。

命題 3.4 (「局所関数等式」). 無限素点における局所 *Whittaker* 関数 $\mathcal{W}_F^{(\infty)}$ は次の (i) および (ii) を満たす：
(i) 局所ゼータ積分 $Z_N^{(\infty)}(s,W)$ および $Z_N^{(\infty)}(s,\tilde{W})$ は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束して，全 s-平面にゼロでない有理型関数として解析接続される；
(ii) 等式

$$\frac{Z_N^{(\infty)}(1-s,\tilde{\mathcal{W}}_F^{(\infty)})}{L_\infty(1-s,F)} = (-1)^{\lambda_1} \times \frac{Z_N^{(\infty)}(s,\mathcal{W}_F^{(\infty)}))}{L_\infty(s,F)}$$

が成立する。

(3.3) Whittaker 関数の明示公式. 命題 3.4 を証明するために $Z_N^{(\infty)}(s)$ を計算したいが，そのためには Whittaker 関数の明示公式を必要とする。Oda [O] は，ベクトル v_0 の離散系列表現 $D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ の中での特徴づけから，$Sp(2,\mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数 $\mathcal{W}_F^{(\infty)}$ の動径成分の満たす微分方程式系を構成し，それの Euler 型の積分表示を得た。さて，筆者は Whittaker 関数の類似物である新谷関数の研究中に Whittaker 関数 $\mathcal{W}_F^{(\infty)}$ 及び $\tilde{\mathcal{W}}_F^{(\infty)}$ の動径成分が次のような Mellin-Barnes 型の別の積分表示を持つことに気がついた。$C \in \mathbf{C}^\times$

を共通の定数として

(i) $\mathcal{W}_F^{(\infty)}\bigl(\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_1^{-1},a_2^{-1})\bigr)$

$$=C\times\exp(-2\pi a_2^2)\times\int_{L(\sigma_1)}(4\pi^3a_1^2)^{(-s_1+\lambda_1+1)/2}ds_1\int_{L(\sigma_2)}(4\pi a_2^2)^{(-s_2+\lambda_2)/2}ds_2$$
$$\times\Gamma\bigl(\frac{s_1+s_2-2\lambda_2+1}{2}\bigr)\Gamma\bigl(\frac{s_1+s_2+1}{2}\bigr)\Gamma\bigl(\frac{s_1}{2}\bigr)\Gamma\bigl(\frac{-s_2}{2}\bigr),$$

(ii) $\tilde{\mathcal{W}}_F^{(\infty)}\bigl(\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_1^{-1},a_2^{-1})\bigr)$

$$=C\times(-1)^{\lambda_1}2^{-\lambda_1+\lambda_2}\exp(-2\pi a_2^2)\times\int_{L(\sigma_1)}(4\pi^3a_1^2)^{(-s_1+\lambda_2+1)/2}ds_1\int_{L(\sigma_2)}(4\pi a_2^2)^{(-s_2+\lambda_1)/2}ds_2$$
$$\times(s_1)_{\lambda_1-\lambda_2}\times\Gamma\bigl(\frac{s_1+s_2-2\lambda_2+1}{2}\bigr)\Gamma\bigl(\frac{s_1+s_2+1}{2}\bigr)\Gamma\bigl(\frac{s_1}{2}\bigr)\Gamma\bigl(\frac{-s_2}{2}\bigr).$$

ここで (σ_1,σ_2) を

$$\sigma_1+\sigma_2+1>0 \quad \text{かつ} \quad \sigma_1>0>\sigma_2,$$

をみたすような任意に固定し，積分路 $L(\sigma_j)$ $(j=1,2)$ は $\sigma_j-\sqrt{-1}\infty$ から $\sigma_j+\sqrt{-1}\infty$ へ向かう垂直な路とした。

(3.4) $Z_N^{(\infty)}(s)$ の計算 (定理の証明の完結). 上の公式を局所ゼータ積分 $Z_N^{(\infty)}(s,\mathcal{W}_F^{(\infty)})$ および $Z_N^{(\infty)}(s,\tilde{\mathcal{W}}_F^{(\infty)})$ に代入して計算すると，これらは $\mathrm{Re}(s)>\frac{-\lambda_1-\lambda_2+1}{2}$ で絶対収束して，$C_1\in\mathbf{C}^\times$ を共通の定数として，

- $$\frac{Z_N^{(\infty)}(s,\mathcal{W}_F^{(\infty)})}{L_\infty(s,F)}=C_1\times\sum_{l=1}^{-\lambda_2}(-4\pi)^{-l}\frac{(l-1)!}{(-\lambda_2-l)!}\times\Gamma\bigl(\frac{s+l+\frac{\lambda_1+\lambda_2+1}{2}}{2}\bigr)^{-1}\Gamma\bigl(\frac{-s+l+\frac{-\lambda_1+3\lambda_2+3}{2}}{2}\bigr)^{-1};$$
- $$\frac{Z_N^{(\infty)}(s,\widetilde{\mathcal{W}}_F^{(\infty)})}{L_\infty(s,F)}=C_1\times(-1)^{\lambda_1}\times\sum_{l=1}^{-\lambda_2}(-4\pi)^{-l}\frac{(l-1)!}{(-\lambda_2-l)!}\times\Gamma\bigl(\frac{s+l+\frac{-\lambda_1+3\lambda_2+1}{2}}{2}\bigr)^{-1}\Gamma\bigl(\frac{-s+l+\frac{\lambda_1+\lambda_2+3}{2}}{2}\bigr)^{-1},$$

となることがわかる。これから，命題 3.4 の成立は明らかである。また，$\widehat{L}(s,F)$ が整関数となることは，F にリー環 $\mathfrak{sp}(2,\mathbf{R})$ を作用させて，F の生成する保型表現のなかで動かして議論することで証明される (詳しくは，[Mo-3]) を参照)。

§4. 諸注意

(1) ここで述べたような，L-関数の積分表示理論において，無限素点における寄与が $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ で絶対収束することは，Whittaker 関数等の挙動を一般的に考察することで証明されることもある（本稿の場合は無理のようである）。しかしながら，全 s-平面に有理型に解析接続されることとすることは，そのような Whittaker 関数の一般論だけ決して示すことのできないものである。従って，L-関数の解析接続という大域的な結果を得るためには，Whittaker 関数の明示的な形を決めることは不可欠であることを強調しておく。

(2) ここでは，簡単のため F が"full modular" の場合に定理を定式化したが，有限素点に

おける局所関数等式 ([TB,Theorem 2.1]) を用いれば，より一般の状況で同様の結果を証明できる。

(3) F が実素点で Jacobi 型放物型部分群から誘導した主系列表現を生成している場合にも本稿の主結果と同様の結果がなりたつ ([Mo-3])。このほかに，generic な尖点形式 F が実素点で生成する表現として現れ得るものが 2 系列ある。これらについては，局所 Whittaker 関数 $\mathcal{W}_F^{(\infty)}$ の明示公式が S. Niwa[Ni] や T. Ishii [I] によって部分的に得られているが，これらの公式を使って局所ゼータ積分 $Z_N^{(\infty)}(s)$ を計算することは今のところ成功していない。

(4) $F : \Gamma\backslash G \to \mathbf{C}$ から Fourier 係数を $c(k,l)$ を取り出す過程は次のような意味を持つ。N を代数群 N $(/\mathbf{Q})$ の $\mathbf{R}$-値点のなす群とする。$F_{k,l}$ の定義に現れる，$\mathbf{e}(kx_0+lx_3)$ はその指標である。F の N に沿っての Fourier 展開とは，一言で言えば，$\Gamma\backslash G$ を $\Gamma\backslash G = \cup_{g\in G} N\cap\Gamma\backslash Ng$ と「スライス」し F の挙動を N 方向とそれに横断的な方向とに分けて記述することである。N 方向に指標 $\mathbf{e}(kx_0+lx_3)^{-1}$ に伴って変化する部分が $F_{k,l}$ であり，$F_{k,l}$ たちを (2.1) のように正規化するときに現れる定数が Fourier 係数 $c(k,l)$ である。
序で述べたように，正則な Siegel 保型形式は generic でない ($c(k,l)=0$)。このことは，スライスする方向が，正則保型形式には適していないことを意味し，別の部分群にそっての Fourier 展開を考える必要がある ([An] 等)。このように，保型形式のタイプに応じて異なる Fourier 展開を考えねばならぬ点が，多変数の保型形式の研究を難しく，また面白くしているといえる。

References

[An] ANDRIANOV, A. N., Dirichlet series with Euler product in the theory of Siegel modular forms of genus two, Trudy Mat. Inst. Steklov. **112** (1971), 73-94,

[B1] BUMP, D., *Automorphic forms on* $GL(3,\mathbf{R})$, Lecture Notes in Mathematics **1083**, Springer-Verlag (1984).

[B2] BUMP, D., The Rankin-Selberg method: a survey. Number theory, trace formulas and discrete groups, 49-109, Academic Press, (1989).

[C-S] CASSELMAN, W. AND SHALIKA, J. A., The unramified principal series of p-adic groups. II. The Whittaker function. Compositio Math. 41 (1980), 207-231.

[G-S] GELBART, S AND SHAHIDI. F.,*Analytic properties of automorphic L-functions.* Academic Press, (1988).

[H] HORI, A., Andrianov's L-functions associated to Siegel wave forms of degree two, Math. Ann. **303** (1995), 195-226.

[I] ISHII, T.,On principal series Whittaker functions on $Sp(2,\mathbf{R})$, preprint (2002).

[J-L] JACQUET, H AND LANGLANDS, R. P.,*Automorphic forms on* $GL(2)$, Lecture Notes in Mathematics **114**, Springer-Verlag, (1970).

[Ka] KATO, S., P 進体上の Chevalley 群の class-1 Whittaker 函数, 東京大学修士論文 (1978).

[Kn] KNAPP, A., Local Langlands correspondence: the archimedean case, Proc. Symps. Pure Math. **55** Part 2, 393-410 (1994).

[La] LANGLANDS, R. P., On the classification of irreducible representations of real algebraic groups. In: *Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups,* Edited P. Sally and D. Vogan , American Mathematical Society., 101-170 (1989).

[Mi] MIYAZAKI, T., The generalized Whittaker functions for $Sp(2,\mathbf{R})$ and the gamma factor of the Andrianov L-functions, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **7**, 241-295 (2000).

[Mo-1] MORIYAMA, T., Spherical functions for the semisimple symmetric pair $(Sp(2,\mathbf{R}), SL(2,\mathbf{C}))$. Canad. J. Math. **54**, 828-865, (2002).

[Mo-2] MORIYAMA, T., A remark on Whittaker functions on $Sp(2,\mathbf{R})$, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **9**, 627-635 (2002)

[Mo-3] MORIYAMA, T., Entireness of the spinor L-functions for certain generic cusp forms on $GSp(2)$, preprint (2002), submitted.

[Mo-4] MORIYAMA, T., $Sp(2,\mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数と Novodvorsky のゼータ積分について, 数理解析研究所講究録 **1281**,「保型形式およびそれに付随するディイリクレ級数の研究」, 1-13, (2002).
[Ni] NIWA, S, Commutation relations of differential operators and Whittaker functions on $Sp_2(\mathbf{R})$, Proc. Japan Acad. **71** Ser A.(1995)
[No-1] NOVODVORSKY, M. E. , Theorie de Hécke pour certains groupes orthogonaux. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B **285** A93-A94 (1977).
[No-2] NOVODVORSKY, M. E. , Automorphic L-functions for symplectic group $GSp(4)$. Proc. Sympos. Pure Math. **33** Part 2, 87-95, (1979).
[O-1] ODA, T., An explicit integral representation of Whittaker functions on $Sp(2,\mathbf{R})$ for large discrete series representations, Tôhoku Math. J. **46**, 261-279 (1994).
[O-2] ODA, T., 保型形式の数論のための実解析, 数学 **50**, 350-357 (1998).
[Sh] SHALIKA, J. A. , The multiplicity one theorem for GL_n, Ann. of Math. **100**, 171–193 (1974).
[Ta] TATE, J., Number theoretic background. Proc. Sympos. Pure Math. **33** Part 2, 3-26, (1979).
[Wa] WALLACH, N., Asymptotic expansions of generalized matrix entries of representations of real reductive groups.. Lecture Notes in Mathematics **1024**, Springer-Verlag, 287-369, (1983).

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA MEGURO-KU, TOKYO 153-8914, JAPAN
E-mail address: `moriy-to@ms.u-tokyo.ac.jp`