数理解析研究所講究録 1324 巻 2003 年 47-57

p-adic analogue of Shintani's formula

京大 理 加塩 朋和 (Tomokazu Kashio)
Faculty of Science, Kyoto University

Introduction

Shimura's CM-period と (多重) ガンマ函数, 及び (総実代数体上の) L 函数の $s=0$ での微分とはそれぞれ関係がある. 例として the Chowla-Selberg formula と Yoshida's conjecture [14] を挙げる.

The Chowla-Selberg formula.

$$\pi p_K(\mathrm{id},\mathrm{id})^2 \sim \prod_{a=1}^{d-1}\Gamma\left(\frac{a}{d}\right)^{\omega_K\chi(a)/2h_K} = d\exp\left(\frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)}\right). \tag{0.1}$$

ここに K は判別式 $-d$ の虚 2 次体, p_K は Shimura's CM-period symbol, ω_K, h_K はそれぞれ K の類数と K に含まれる 1 のべき根の個数, χ は $K/\mathbf{Q}$ に対応する Dirichlet 指標とする. また $a,b\in\mathbf{C}, b\neq 0$ に対し $a\sim b$ は $a/b\in\overline{\mathbf{Q}}$ を意味する.

Yoshida's conjecture. F を総実な体, K を F 上 abelian な CM-field とする. $G=\mathrm{Gal}(K/F)$ と置き, $\tau\in G$ に対して

$$\prod_{\sigma\in J_K} p_K(\sigma,\tau\sigma) \sim \pi^{-[K:\mathbf{Q}]\mu(\tau)/2}\exp\left(\sum_{\chi\in\hat{G}_-}\chi(\tau)\frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)}\right). \tag{0.2}$$

d また τ が id, complex conjugation, その他の時, それぞれ $\mu(\tau)=1,-1,0$ とする.

ここで Yoshida's conjecture はより精密な形の予想を持つ. すなわち Shintani's formula (§1) を用いて右辺を多重ガンマ函数で表し, 分解することにより (大まかに言うと) CM-period を多重ガンマ函数で表しているのである. つまり the Chowla-Selberg formula の一般化を与えている.

現在, この予想及び結果の p 進化について吉田敬之教授と共同で研究を行っており, いくつかの成果が得られた. ここでは Shintani's formula の p 進化について紹介したい.

1 Shintani's formula

この章では, 総実体上の partial zeta 函数の $s=0$ での微分を多重ガンマ函数で表した Shintani's formula について復習しよう [13]. r を正整数とする. $a_i, x \in \mathbf{R}^+$ に対して r 重 Riemann zeta 函数を

$$(1.1) \qquad \zeta_r(s,(a_1,\ldots,a_r),x) = \sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}\left\{x+\sum_{i=1}^{r}a_im_i\right\}^{-s}$$

で定義する. これは $\mathrm{Re}(s)>r$ で収束し全 s 平面有理型に解析接続される. 更に

$$\log\left(\rho_r\left((a_1,\ldots,a_r)\right)\right) = -\lim_{x\to 0}\left\{\left[\frac{d}{ds}\zeta_r(s,(a_1,\ldots,a_r),x)\right]_{s=0}+\log x\right\},$$

$$(1.2) \qquad \left[\frac{d}{ds}\zeta_r(s,(a_1,\ldots,a_r),x)\right]_{s=0} = \log\left(\frac{\Gamma_r\left(x,(a_1,\ldots,a_r)\right)}{\rho_r\left((a_1,\ldots,a_r)\right)}\right)$$

と置くと $\Gamma_r\left(x,(a_1,\ldots,a_r)\right)$ は Barnes [1] によって導入された r 重ガンマ函数であり次を満たす.

$$(1.3) \qquad \log\left(\frac{\Gamma_1\left(x,(1)\right)}{\rho_1\left((1)\right)}\right) = -\log\left(\sqrt{2\pi}\right)+\log\left(\Gamma(x)\right).$$

更に多重zeta函数の拡張を行う. $A=(a_{i,j})$ を $n\times r$ 行列 $(a_{j,i}>0)$ とし, $x=(x_1,\ldots,x_r)$, $x_i\geq 0, x\neq 0$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_r)$, $\xi_i\in\mathbf{C}$, $|\xi_i|\leq 1$ とする.

$$(1.4) \qquad \zeta_r(s,A,x,\xi) = \sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}\xi^m\prod_{j=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{r}a_{j,i}(m_i+x_i)\right\}^{-s}$$

を考える. ここで $\xi^m=\prod_{i=1}^{r}\xi_i^{m_i}$ とする. これは $\mathrm{Re}(s)>r/n$ で収束し全 s 平面有理型に解析接続される. 今 $\zeta_r(s,A,x)=\zeta_r(s,A,x,(1,\ldots,1))$ と置こう. すると

$$(1.5) \qquad \left[\frac{d}{ds}\zeta_r(s,A,x)\right]_{s=0} = \sum_{j=1}^{n}\log\left(\frac{\Gamma_r\left(x^tA_j,A_j\right)}{\rho_r(A_j)}\right)+\frac{(-1)^r}{n}\sum_{l}C_l(A)\prod_{i=1}^{r}\frac{B_{l_i}(x_i)}{l_i!}$$

が成り立つ. ただし l は $l=(l_1,\ldots,l_r)$, $l_1+\cdots+l_r=r$, $l_i\geq 0$ を満たすもの全体を走り, $B_l(x)$ は Bernoulli 多項式を表し, $A_j=(a_{j,1},\ldots,a_{j,r})$, $C_l(A)=\sum_{1\leq j,k\leq n, j\neq k}C_{l,j,k}(A)$ であり

$$C_{l,j,k}(A)=\int_0^1\left\{\prod_{m=1}^{r}(a_{j,m}+a_{k,m}u)^{l_m-1}-\prod_{m=1}^{r}a_{j,m}^{l_m-1}\right\}\frac{du}{u}$$

である.

次に総実体上の partial zeta 函数を考える. F を n 次の総実な体とし, $J_F=\{\sigma_i \mid i=1,2,\ldots,n\}$, F の無限素点全体を $\infty_1,\ldots,\infty_n$ と置く. F の整 ideal $\mathfrak{f}$ に対し, $C_{\mathfrak{f}}$ を

$\mathfrak{f}\infty_1\cdots\infty_n$ を法とする F の ideal 類群とする. また O_F を F の整数環, E_F^+ を総正単数群, $E_\mathfrak{f}^+ = \{u \in E_F^+,\ u \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}\}$ と書くことにする. $\mathfrak{c} \in C_\mathfrak{f}$ に対し partial zeta 函数を

$$\zeta_\mathfrak{f}(s, \mathfrak{c}) = \sum_{\mathfrak{g}} N\mathfrak{g}^{-s}$$

で定める. ただし $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{c}$ の類に含まれる整 ideal 全体を走る.

partial zeta 函数を上で拡張された多重 zeta 函数で表すために, cone 分解というものを考える. $x \in F$ に対して $x^{(i)} = \sigma_i(x)$ と書くことにする. すると $x \mapsto (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$ により F を $\mathbf{R}^n$ の部分環に埋め込むことが出来る. また $\mathbf{R}^n$ の中の r 個の一次独立なベクトル v_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ に対して $C(v_1, v_2, \ldots, v_r) = \{t_1v_1 + t_2v_2 + \cdots + t_rv_r \mid t_i \in \mathbf{R}^+\}$ と置き, $v_1, \ldots, v_r$ を basis とする r 次元の open simplicial cone と呼ぶ. すると次のことが言える.

Lemma 1. 有限集合 J 及び有限個の元 $v_{j,i} \in O_F$ $(j \in J, i = 1, 2, \ldots, r(j))$ が次のように取れる. すなわち各 j について $v_{j,1}, \ldots, v_{j,r(j)}$ は一次独立で, かつ

$$\mathbf{R}^{+n} = \bigsqcup_{j \in J} \bigsqcup_{u \in E_\mathfrak{f}^+} uC(v_{j,1}, v_{j,2}, \ldots, v_{j,r(j)}).$$

ただし $\bigsqcup$ は非交和を表す.

Lemma 2. 記号は上記の通りとし, 更に整 *ideal* $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a}^{-1} \in \mathfrak{c}$ となるように取る. 必要なら取り変えて $v_{j,i} \in \mathfrak{af}$ とする. $v_j = (v_{j,1}, v_{j,2}, \ldots, v_{j,r(j)})$ と置き, 次のように定義する.

$$\begin{aligned} R(\mathfrak{a}^{-1}, j) &= R(\mathfrak{a}^{-1}, C(v_j)) \\ &= \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_{r(j)}) \in \mathbf{Q}^{r(j)} \mid 0 < x_i \le 1, \sum_{i=1}^{r(j)} x_i v_{j,i} \in \mathfrak{a}, \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}\}, \end{aligned}$$

この時, $R(\mathfrak{a}^{-1}, j)$ は有限集合であり, 次が成り立つ.

$$\zeta_\mathfrak{f}(s, \mathfrak{c}) = N\mathfrak{a}^s \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} \zeta(s, A_{v_j}, x).$$

ただし A_{v_j} は (i, l) 成分を $v_{j,l}^{\sigma_i}$ とする $n \times r(j)$ 行列とする.

さて, この Lemma と式 (1.5) より次を得る.

Shintani's formula. 記号は上記の通りとする. 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \left[\frac{d'}{ds}\zeta_\mathfrak{f}(s, \mathfrak{c})\right]_{s=0} &= \log(N\mathfrak{a})\zeta_\mathfrak{f}(0, \mathfrak{c}) \\ &\quad + \sum_{\sigma \in J_F} \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} \log\left(\frac{\Gamma_{r(j)}(x^t v_j^\sigma, v_j^\sigma)}{\rho_{r(j)}(v_j^\sigma)}\right) \\ &\quad + \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} \frac{(-1)^{r(j)}}{n} \sum_{l} C_l(A_{v_j}) \prod_{i=1}^{r(j)} \frac{B_{l_i}(x_i)}{l_i!}. \end{aligned}$$

2 p-adic multiple gamma functions

この章では, 古典的な多重ガンマ函数の定義 [1] に習い, p 進多重 zeta 函数 [3] の $s=0$ での微分により p 進多重ガンマ函数を定義する. p を素数, その上にある F の素 ideal を一つ固定して $\mathfrak{P}$ と置く. F には $\mathfrak{P}$ による位相が入っていると考え, 完備化した体を $F_{\mathfrak{P}}$ と置く. $|\ |_p$ は $|p|_p=1/p$ で正規化した p 進乗法付値を表すものとする. r を正整数とする. この時連続函数 $f(X)=f(X_1,\ldots,X_r):\mathbf{Z}_p^r\to F_{\mathfrak{P}}$ に対して

$$(2.1)\qquad J_X(f(X))=\lim_{l_1\to\infty}\lim_{l_2\to\infty}\cdots\lim_{l_r\to\infty}\frac{1}{p^{l_1+l_2+\cdots+l_r}}\sum_{n_1=0}^{p^{l_1}-1}\sum_{n_2=0}^{p^{l_2}-1}\cdots\sum_{n_r=0}^{p^{l_r}-1}f(n).$$

と定義する. これは必ずしも収束するとは限らない. $r=1$ の時以下の性質を持つ.

$$(2.2)\qquad x\in F_{\mathfrak{P}} \text{ に対して, } J_X((X+x)^m)=B_m(x).$$

$$(2.3)\qquad J_X\left(\binom{X}{m}\right)=\frac{(-1)^m}{m+1}.$$

ただし, 多項式環 $F_{\mathfrak{P}}[X]$ の元は $\mathbf{Z}_p^r$ 上の連続函数とみなし, $\binom{X}{0}=1$, $m\geq 1$ の時 $\binom{X}{m}=\frac{X(X-1)\ldots(X-m+1)}{m!}$ とする. 更に $\mathbf{Z}_p^s$ 上の連続函数 $f(X_1,\ldots,X_s)$ 及び $\mathbf{Z}_p^{r-s}$ 上の連続函数 $g(X_{s+1},\ldots,X_r)$ がある時

$$(2.4)\qquad \begin{aligned}&J_{X_1,\ldots,X_r}(f(X_1,\ldots,X_s)g(X_{s+1},\ldots,X_r))\\&=J_{X_1,\ldots,X_s}(f(X_1,\ldots,X_s))J_{X_{s+1},\ldots,X_r}(g(X_{s+1},\ldots,X_r)).\end{aligned}$$

ここで $a_i,a\in O_{F_{\mathfrak{P}}}$, $a_i\neq 0$ $(i=1,2,\ldots,r)$, $s\in\mathbf{Z}_p$ に対し p 進多重 zeta 函数を次で定義する.

$$(2.5)\quad \zeta_{p,r}(s,(a_1,a_2,\ldots,a_r),a)=\frac{(-1)^rJ_X\left(\theta_p^{(0)}(f(X))\,f(X)^r\left(\theta_p^{(-1)}(f(X))\,f(X)\right)^{-s}\right)}{(r-s)(r-1-s)\cdots(1-s)a_1a_2\cdots a_r}.$$

ただし記号は $f(X)=\sum_{i=1}^r a_iX_i+a$, θ_p は Teichmüller character, つまり $\theta_p:\mathrm{O}_{\overline{\mathbf{Q}_p}}\to\overline{\mathbf{Q}}$ で次で定められるものである. $|x|_p<1$ の時 $\theta_p(x)=0$, $|x|_p=1$ ならば $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大体 K で $K\ni x$ となるものを取り, f を O_K の剰余体と $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ との拡大次数と置く. この時 $\theta_p(x)=\lim_{l\to\infty}x^{p^{fl}}$ で定める. これを用いて, $|x|_p<1$ ならば $\theta_p^{(n)}(x)=0$, $|x|_p=1$ ならば $=(\theta_p(x))^n$ と定める. 更に $y\in 1+\overline{\mathfrak{P}}$ に対して y^s は $\sum_{k=0}^\infty\binom{s}{k}(y-1)^k$ で定義する. この p 進多重 zeta 函数は次の性質を持つ.

Lemma 3. $a_i,a\in O_{F_{\mathfrak{P}}}$, $a_i\neq 0$ $(i=1,2,\ldots,r)$, $s\in\mathbf{Z}_p$ に対し p 進多重 *zeta* 函数は収束し, $s=0$ で解析的である. 更に $a_i,a\in F$, $a_i,a>0$, $|a_i|_p,|a-1|_p<1$ $(i=1,2,\ldots,r)$, $k=0,1,2,\ldots$ に対して

$$\zeta_{p,r}(-k,(a_1,a_2,\ldots,a_r),a)=\zeta_r(-k,(a_1,a_2,\ldots,a_r),a).$$

次にp進r重ガンマ函数を次で定義する．$a_i, a \in O_{F_{\mathfrak{P}}}$, $a_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ に対して

$$L\Gamma_{p,r}(a, (a_1, a_2, \ldots, a_r)) = \left.\frac{d\zeta_{p,r}(s, (a_1, a_2, \ldots, a_r), a)}{ds}\right|_{s=0} \tag{2.6}$$

と置く．このp進r重ガンマ函数は次の性質を持つ．

Lemma 4. $L\Gamma_{p,r}((a_1, \ldots, a_r), a)$ は $a_i, a \in O_{F_{\mathfrak{P}}}$, $a_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ で連続であり，$a \in \mathbf{Z}_p$ に対して

$$L\Gamma_{p,1}(a, (1)) = \log_p(\Gamma_p(a)).$$

ここで $\log_p : \mathbf{C}_p^{\times} \to \mathbf{C}_p$ は Iwasawa p 進 log 函数を表しており，Γ_p は Morita p 進ガンマ函数であり $\Gamma_p(n) = (-1)^n \prod_{i=1, p\nmid i}^{n-1} i$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で定義され $\mathbf{Z}_p$ 上の連続函数に延ばしたものである．この定義と性質は古典的な多重ガンマ函数のそれを踏襲している．

3 p-adic zeta functions over totally real fields

この章ではp進 partial zeta 函数の構成を Cassou-Noguès [5] に習って行う．$\zeta_r(s, A, x)$ の形の多重 zeta 函数は（少なくとも簡単には）p進での類似を持たない．そのためまずはp進化できる形への変形を行う．記号は §1 と同じとする．$\mathfrak{c} \in C_{\mathfrak{f}}$ に対して整 ideal $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を次の様に取る．$\mathfrak{a}^{-1} \in \mathfrak{c}$ を固定する．それに対して open simplicial cones を Lemma 1,2 の様に取る．$\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{f}$ と互いに素であり，$\mathfrak{b} \neq (1)$ かつ $C_{\mathfrak{f}}$ の中で $\mathfrak{b} = 1$, 更に次を満たすものを取る．

(i) $(\mathfrak{b}, \mathfrak{D}) = 1$,
(ii) $(\mathfrak{b}, (v_{i,j})) = 1$ for all $j \in J, i = 1, 2 \ldots, r(j)$,
(iii) $O_F/\mathfrak{b} \simeq \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$.

ここで $\mathfrak{D}$ は F の共役差積，b は $\mathfrak{b} \cap \mathbf{Z}$ の正整数の生成元とする．次に

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(s, \mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{b}) = (N\mathfrak{b}^{1-s} - 1)\zeta_{\mathfrak{f}}(s, \mathfrak{c}) \tag{3.1}$$

と置こう．$\mathbf{e}(x) = \exp(2\pi i x)$ と表すことにする．次の Lemma 及び Theorem が成り立つ．

Lemma 5. $\nu \in \mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$ を次を満たすように取れる．$Tr(\nu) = c/b$, $0 \neq c \in \mathbf{Z}$, $(b, c) = 1$ であり，かつ

$$\text{各 } i, j \text{ に対して } \mathbf{e}(Tr(v_{i,j}\nu)) \text{ は } 1 \text{ の原始 } b \text{ 乗根},$$

$$\sum_{\mu=0}^{b-1} \mathbf{e}(Tr(\alpha\mu\nu)) = \begin{cases} 0 & \alpha \in O_F, \notin \mathfrak{b} \text{ の時}, \\ N\mathfrak{b} = b & \alpha \in \mathfrak{b} \text{ の時}. \end{cases}$$

Theorem 6. $\xi_{j,i} = \mathbf{e}(Tr(v_{j,i}\nu))$, $\xi_x = \mathbf{e}(Tr(\nu \sum_{i=1}^{r(j)} x_i v_{j,i}))$ と置く時，

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(s, \mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{b}) = N\mathfrak{a}^s \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{j \in J} \sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} \xi_x^{\mu} \zeta_{r(j)}(s, A_{v_j}, x, (\xi_{j,1}^{\mu}, \ldots, \xi_{j,r(j)}^{\mu})).$$

$\zeta_r(s, A, x, \xi)$ の形の多重 zeta 函数は（ある条件の下で）p 進化できる．これを見て行こう．P を r 変数の関数とする．この時 r 変数の形式的ベキ級数を次の様に定める．

$$R(P)(T) = \sum_k \frac{\lambda_k(P)}{(1-T)^k}.$$

ここで $k = (k_1, \dots, k_r)$ は $k_i = 0, 1, \dots$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, $k \neq 0$ を満たす k 全体を走り，$T = (T_1, T_2, \dots, T_r)$, $(1-T)^k = (1-T_1)^{k_1}(1-T_2)^{k_2}\cdots(1-T_r)^{k_r}$,

$$\lambda_k(P) = \sum_{l_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{l_r=0}^{k_r} \left\{ {k_1 \atop l_1} \right\} \cdots \left\{ {k_r \atop l_r} \right\} P(-l_1, -l_2, \dots, -l_r),$$

$$\left\{ {a \atop b} \right\} = \begin{cases} (-1)^{b-1}\binom{a-1}{b-1} & a, b \geq 1 \text{ の時}, \\ 1 & a = 0 \text{ の時}, \\ 0 & a \geq 1, b = 0 \text{ の時}, \end{cases}$$

と置いた．この時次が成り立つ．

Lemma 7. $A \doteq (a_{i,j})$ は $n \times r$ 行列 $(a_{j,i} > 0)$, $x = (x_1, \dots, x_r)$, $x_i \geq 0, x \neq 0$, また各 i において $\xi_i \neq 1$ は 1 のべき乗根であるとする．この時 $k = 0, 1, \dots$ に対して

$$\zeta_r(-k, A, x, \xi) = R\Big(\prod_{j=1}^{n} \Big\{ \sum_{i=1}^{r} a_{j,i}(X_i + x_i) \Big\}^k\Big)(\xi).$$

ここで（ある種の）p 進多重 zeta 函数を定義する．p は odd prime とする ($p = 2$ でも条件を厳しくすれば同様の議論ができる)．$a_{j,i}, x_i \in O_{\mathfrak{P}}$ は $|a_{j,i}|_p$, $|\prod_{j=1}^{n}\{\sum_{i=1}^{r} a_{j,i}x_i\} - 1|_p < 1$ を満たす元, $\xi_i \neq 1$ は p がその位数を割らない 1 のべき乗根 ($j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, r$) としたとき

$$\zeta_{p,r}(s, A, x, \xi) = R\Big(\prod_{j=1}^{n} \Big\{ \sum_{i=1}^{r} a_{j,i}(X_i + x_i) \Big\}^{-s}\Big)(\xi) \tag{3.2}$$

と定義する．ただし右辺の収束は p 進位相で考える．この p 進 r 重 zeta 函数は次の性質を満たす．

Lemma 8. 上記の条件で $\zeta_{p,r}(s, A, x, \xi)$ は収束する．更に $a_{j,i}, x_i \in F$, $a_{j,i} > 0$, $x_i \geq 0$ と仮定すると $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\zeta_{p,r}(-k, A, x, \xi) = \zeta_r(-k, A, x, \xi)$$

が成り立つ．

このp進多重zeta函数を使ってp進partial zeta函数を構成する．(p)の上のprime idealは全て$\mathfrak{f}$を割っていると仮定する．この時

$$(3.3)\qquad \zeta_{p,\mathfrak{f}}(s,\mathfrak{a}^{-1},\mathfrak{b}) = \left(\theta_p^{(-1)}(N\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})\right)^s \sum_{\mu=1}^{c-1}\sum_{j\in J}\sum_{x\in R(\mathfrak{a}^{-1},j)} \xi_x^{\mu}\zeta_{p,r}(s,A_{v_j},x,\xi_j^{\mu}),$$

$$(3.4)\qquad \zeta_{p,\mathfrak{f}}(s,\mathfrak{c}) = \frac{\zeta_{p,\mathfrak{f}}(s,\mathfrak{a}^{-1},\mathfrak{b})}{(\theta_p^{(-1)}(N\mathfrak{b})N\mathfrak{b})^{1-s}-1}$$

と定義する．すると次の性質を持つ．

Theorem 9. 上記の条件で$k=0,1,2,\ldots\ k\equiv 0 \pmod{p^f-1}$に対して

$$\zeta_{p,\mathfrak{f}}(-k,\mathfrak{c}) = \zeta_{\mathfrak{f}}(-k,\mathfrak{c}).$$

ただしfは$O_F/\mathfrak{P}$と$\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$の拡大次数とする．更にχを$C_{\mathfrak{f}}$の*odd character,* またΘ_pを$\Theta_p(\mathfrak{c})=\theta_p(N(\mathfrak{c}))$で定義される*character*とする．すると$p$進$L$函数は

$$L_{p,\mathfrak{f}}(1-m,\chi) = L_{\mathfrak{f}}(1-m,\chi\Theta_p^{-m}),\ (1\le m\in\mathbf{Z})$$

で特徴付けられ，次で表せる．

$$L_{p,\mathfrak{f}}(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}}}\chi\Theta_p^{-1}(\mathfrak{c})\zeta_{p,\mathfrak{f}}(s,\mathfrak{c}).$$

4 the derivatives at s=0 of p-adic zeta functions

p進partial zeta函数の微分を計算する．中心となるアイデアはCassou-Noguès [4]が用いている，式(3.2)の形のp進多重zeta函数が項別微分できて分解できる，と言うことである．すなわち次のが成り立つ．

Lemma 10. $a_{j,i},x_i\in O_{\mathfrak{P}}$は$|a_{j,i}|_p,\ |\sum_{i=1}^r a_{j,i}x_i-1|_p<1$を満たす元，$\xi_i\neq 1$は$p$がその位数を割らない1のべき乗根$(j=1,\ldots,n,\ i=1,\ldots,r)$としたとき

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\zeta_{p,r}(s,A,x,\xi)|_{s=0} &= R(-\log_p(\prod_{j=1}^n\left\{\sum_{i=1}^r a_{j,i}(X_i+x_i)\right\}))(\xi)\\ &= \sum_{j=1}^n R(-\log_p(\left\{\sum_{i=1}^r a_{j,i}(X_i+x_i)\right\}))(\xi)\\ &= \sum_{j=1}^n\frac{d}{ds}\zeta_{p,r}(s,A_j,x,\xi)|_{s=0}\end{aligned}$$

このLemmaとconeの取替え等の操作，及び若干の計算により次の主定理を得る．

Theorem 11. $\mathfrak{f}, \mathfrak{c}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, v_{j,i}, b$ を上記の様に取る, $\alpha \in O_F$ は $\mathfrak{b} = (\alpha)$ となる元とする ここで新しく *open simplicial cones* $\{C(v_{j'}) | j' \in J'\}$ を次を満たすように取る.

(a) $v_{j',i} \in \mathfrak{af}$ であり各々総正である.

(b) $\{C(v_{j'}) \mid j' \in J'\}$ は $\{C(v_j) \mid j \in J\}$ の細分である.

(c) $u_{j'} \in E_{\mathfrak{f}}^{+}$ が存在し, $\{C(u_{j'}v_{j'}) \mid j' \in J'\}$ が $\{C((b/\alpha)v_j) \mid j \in J\}$ の細分となる.

この時

$$\left[\frac{d}{ds}\zeta_{\mathfrak{f}}(s, \mathfrak{c})\right]_{s=0} = \log(N\mathfrak{a})\zeta_{\mathfrak{f}}(0, \mathfrak{c}) + \sum_{\sigma \in J_F}\sum_{j \in J}\sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} \log\left(\frac{\Gamma_{r(j)}(x{}^t v_j^\sigma, v_j^\sigma)}{\rho_{r(j)}(v_j^\sigma)}\right) + T_0(\mathfrak{a}^{-1}, \{v_j\}_{j \in J}).$$

ただし

$$T_0(\mathfrak{a}^{-1}, \{v_j\}_{j \in J}) = \sum_{j \in J}\sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} \frac{(-1)^{r(j)}}{n} \sum_{l} C_l(\begin{pmatrix} v_j^{\sigma_1} \\ \vdots \\ v_j^{\sigma_n} \end{pmatrix}) \prod_{i=1}^{r(j)} \frac{B_{l_i}(x_i)}{l_i!}.$$

次に (p) の上の *prime ideal* は全て $\mathfrak{f}$ を割っていると仮定する. この時

$$\left[\frac{d}{ds}\zeta_{p,\mathfrak{f}}(s, \mathfrak{c})\right]_{s=0} = \log_p(N\mathfrak{a})\zeta_{p,\mathfrak{f}}(0, \mathfrak{c}) + \sum_{\sigma \in J_F}\sum_{j \in J}\sum_{x \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j)} L\Gamma_{p,r(j)}(x{}^t v_j^\sigma, v_j^\sigma) + T_p(\mathfrak{a}^{-1}, \{v_j\}_{j \in J}),$$

ただし

$$T_p(\mathfrak{a}^{-1}, \{v_j\}_{j \in J}) = \frac{-b}{b-1}\sum_{\sigma \in J_F}\sum_{j' \in J', u_{j'} \neq 1}\sum_{x' \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j')} \log_p(u_{j'}^\sigma)\zeta_{r(j')}(0, v_{j'}^\sigma, x'{}^t v_{j'}^\sigma).$$

更に同じ記号を用いて

$$T_0(\mathfrak{a}^{-1}, \{v_j\}_{j \in J}) = \frac{-b}{b-1}{\sum_{\sigma \in J_F}}'\sum_{j' \in J', u_{j'} \neq 1}\sum_{x' \in R(\mathfrak{a}^{-1}, j')} \log(u_{j'}^\sigma)\zeta_{r(j')}(0, v_{j'}^\sigma, x'{}^t v_{j'}^\sigma)$$

と表せる.

ここで “$\{C(v_{j'}) \mid j' \in J'\}$ は $\{C(v_j) \mid j \in J\}$ の細分である” とは

$$\text{全射 } m : J' \to J \text{ が存在し } C(v_j) = \bigsqcup_{j' \in m^{-1}(\{j\})} C(v_{j'}) \text{ を満たす}$$

事とする ([14, §5]).

この Theorem は Ferrero-Greenberg の結果 [7, Proposition 1] を含んでいる. この結果を求めてみよう. $F=\mathbf{Q}$, $d\geq 1$ とすると次を同一視できる.

$$\begin{aligned} C_{(d)} &= (\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^{\times} \\ \overline{(a/b)} &\mapsto ab' \bmod d\mathbf{Z} \\ \overline{(a)} &\leftarrow\!\shortmid a \bmod d\mathbf{Z}. \end{aligned}$$

ここで $a,b=1,2,\ldots$ は $(a,d)=(b,d)=1$ となる数で $b'=1,2,\ldots$ は $bb'\equiv 1 \bmod d$ を満たす数とする. これにより conductor d の primitive Dirichlet character χ を $C_{(d)}$ の character とみなす. d は p で割れないとし, $\mathfrak{f}=(pd)$ と置く. $\{(a)\mid 1\leq a\leq pd-1,(a,pd)=1\}$ により $C_{(pd)}$ の元を表すことにする. $C(v^{(a)})$, $(v^{(a)}:=apd)$ で open simplicial cone を定義でき $\mathfrak{b}=(b)$, $(b\geq 1)$ としては $1\leq a\leq pd$ の範囲の a に対して $(b,a)=1$ であり, $b\equiv 1 \bmod pd$ である数を取ればいい. すると Theorem 11 により

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{ds}\zeta_{p,(pd)}(s,(a'))\right]_{s=0} &= \log_p(a)\zeta_{p,1}(0,apd,aa')+L\Gamma_{p,1}(aa',(apd)) \\ &= L\Gamma_{p,1}(a',(pd)), \end{aligned}$$

ただし a' は $1\leq a'\leq pd$, $aa'\equiv 1 \bmod pd$ を満たす数とする. 更に χ を conductor d の primitive Dirichlet character とすると次を得る.

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{ds}L_{p,(pd)}(s,\chi\theta_p)\right]_{s=0} &= \sum_{1\leq a\leq pd-1,(a,pd)=1} \chi((a'))\, L\Gamma_{p,1}(a',(pd)) \\ &= \sum_{1\leq a\leq d-1,(a,d)=1} \chi(a)L\Gamma_{p,1}(a,(d)) \\ &= \sum_{1\leq a\leq d-1,(a,d)=1} \chi(a)L\Gamma_{p,1}(a/d,(1))-\log_p(d)L_{p,(pd)}(0,\chi\theta_p). \end{aligned}$$

よって次を得た.

$$\left[\frac{d}{ds}L_{p,(pd)}(s,\chi\theta_p)\right]_{s=0} = \sum_{1\leq a\leq d-1,(a,d)=1} \chi(a)\log_p(\Gamma(a/d))-\log_p(d)L_{p,(pd)}(0,\chi\theta_p). \tag{4.1}$$

5 two applications

5.1 p-adic CM-periods

本来の目標である p 進 CM-period との関係について触れたい. すでに我々は簡単な場合の Yoshida's conjecture の p 進化を得ている. すなわち $F=\mathbf{Q}$, $K=\mathbf{Q}(\zeta_m)$, $(p,m)=1$ の場合である. ここで ζ_m は 1 の原始 m 乗根を表す. この時次が成り立つ.

$$\Omega_p^K(\mathrm{id},\tau)\sim \exp_p\left(\sum_{\chi}\frac{-\chi(\tau)}{[K:\mathbf{Q}]}\frac{L_p'(0,\chi\theta_p)}{L(0,\chi)}\right). \tag{5.1}$$

ただし χ は odd Dirichlet characters modulo m 全体を走り, Ω_p^K は Ogus [9] の定めた p 進 CM-period symbol に多少手を加えたものを使っている. L_p は Kubota-Leopoldt p 進 L 函数であり, σ_p は $\mathrm{Gal}(K/F)$ の元で $\zeta_m \mapsto \zeta_m^p$ と移すもの, $\exp_p$ は（拡張された）p 進指数函数としている. introduction にも書いた通り, 更なる一般化について（適当な p 進 CM-period の定義も含めて）吉田敬之教授と共同で研究中である.

5.2 the order at $s = 0$ of p-adic L-functions

K/F は abelian であるとし, その conductor を $\mathfrak{f}_0$ と置く. $\mathfrak{f}_0$ と p は互いに素であるとし, $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0 * \prod_{\mathfrak{p}|(p)} \mathfrak{p}$ と定める. χ を conductor $\mathfrak{f}_0$ の primitive, odd な character とする時, 次の予想がある.

(5.2) $$L_{p,\mathfrak{f}}(s, \chi\theta_p) \text{ の } s = 0 \text{ での order} = \#\{\mathfrak{p}|(p) \; |\chi(\mathfrak{p}) = 1\}.$$

ただし # は集合の元の個数を表す記号とする.（この予想はもっと精密な形を持つ.）自明な結果として次がある.

(5.3) $$L_{p,\mathfrak{f}}(s, \chi\theta_p) \text{ の } s = 0 \text{ での order} = 0 \Leftrightarrow \#\{\mathfrak{p}|(p) \; |\chi(\mathfrak{p}) = 1\} = 0.$$

更に Theorem 11 で与えられる式により, 次の事が証明できる.

(5.4) $$L_{p,\mathfrak{f}}(s, \chi\theta_p) \text{ の } s = 0 \text{ での order} \geq 2 \Leftarrow \#\{\mathfrak{p}|(p) \; |\chi(\mathfrak{p}) = 1\} \geq 2.$$

この問題も応用を研究中である.

References

[1] E. W. Barnes, The theory of the multiple gamma function, Trans. Cambridge Philos. Soc. 19 (1904), 374-425.

[2] P. Berthelot, A. Ogus, F-isocrystals and de`Rham cohomology, I, Inv. Math. 72, 159-199 (1983).

[3] P. Cassou-Noguès, Analogues p-adiques de quelques functions arithmétiques, Publ. Math. Bordeaux, p. 1-43, 1974-1975.

[4] P. Cassou-Noguès, Analogues p-adiques des fonctions Γ-multiples, Société Mathématique de France Astérisque 61 (1979) p. 43-55.

[5] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques, Inv. Math. 51, 29-59 (1979).

[6] P. Deligne, K. Ribet, Values of Abelian L-functions at negative integers over totally real fields, Inv. Math. 59 (1980), 227-286.

[7] B. Ferrero, R. Greenberg, On the Behavior of p-adic L-Functions at $s = 0$, Inv. Math. 50, 91-102 (1978).

[8] K. Iwasawa, Lectures on p-adic L-function, Princeton University Press and University of Tokyo Press (Annals of Mathematics Studies, 74), 1972.

[9] A. Ogus, A p-adic Analogue of the Chowla-Selberg Formula, p-adic Analysis (F. Baldassarri, S. Bosch and B. Dwork editors), Lecture Notes in Math. 1454; Springer-Verlag 1990. pp. 319-341.

[10] J.-P. Serre, Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques, Proc. 1972 Antwerp Summer School, Springer Lecture Notes in Math. 350, 191-268 (1973).

[11] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 23 (1976), 393-417.

[12] T. Shintani, On special values of L functions of algebraic number fields, Sûgaku 29 (1977), 204-216 (in Japanese).

[13] T. Shintani, On values at $s = 1$ of certain L functions of totally real algebraic number fields, Algebraic Number Theory, Proc. International Sympos., Kyoto, 1976, Kinokuniya, Tokyo, 1977, pp. 201-212.

[14] H. Yoshida, On absolute CM-periods II, Amer. J. Math. 120 (1998), 1199-1236.

[15] H. Yoshida, Lectures on absolute CM-periods, book manuscript, 2002.