数理解析研究所講究録 1327 巻 2003 年 96-102



# Construction of a non-commutative meta-thin scheme whose thin residue is an elementary abelian $p$-group of rank 2

Bang Sejeong*
平坂　貢 (Mitsugu Hirasaka),†

2002年12月17日

## 1　謝辞

講演終了後、宗政先生と吉荒先生から「講演の冒頭で紹介した数列は差集合と関係があるのではないか?」とのご指摘を頂いた。発表前そしてご指摘を頂いた後でも「順序を考慮しない差集合とは似て非なるもの」という身勝手な決め付けで思考停止状態に陥っていたのだが、講演の翌日、平峰先生から「その紹介した数列と差集合が同値」を示したノートをいただいた。またその日の夕方に花木先生から、「あなたの講演はアソシエーションスキームの拡大のはしりみたいなものだから、変な条件は付けずに一般の場合で群の拡大みたいなことをやったらどう?」という励ましをいただいた。大変有難いアドバイスを下さった方々と、この研究集会への誘いをかけていただいた坂内英一先生にこの場を借りて感謝の言葉を大書してお礼申上げます。

*共同研究者、POSTECH, Com$^2$MaC 所属
†講演者釜山国立大学数学科所属

## 2 序

本講究録は上記のアドバイスを吟味した上で講演で話した内容を整理再構成したものになっている。本講究録とは異なり実際の講演は英語で行った。

次のような条件を満たす群 $G$ 上の数列 $(a_i \mid i \in \mathbb{Z}_n)$ の存在を考える：

1. $\Pi_{i=1}^{n} a_i = \mathrm{id}_G$
2. $\{\Pi_{i=j}^{j+l} a_i \mid 1 \leq j \leq n, 0 \leq l \leq n-2\}$ は異なる $n(n-1)$ 個の元からなる $G$ の部分集合である。

謝辞に記したようにこのような数列は群 $G$ の位数が $n(n-1)+1$ に等しい時に、$\{\Pi_{i=1}^{j} a_i \mid 1 \leq j \leq n\} \subseteq G$ は差集合になる。

身近な例を挙げると、$G = \mathbb{Z}_m$, $m = 7, 13, 21$ の場合にはそれぞれ $(1,2,4)$, $(1,2,6,4)$, $(1,5,2,10,3)$ が上の条件を満たす数列であり、$\{1,3,0\}$, $\{1,3,9,0\}$, $\{1,6,8,18,0\}$ が導かれる差集合になる。

上のような数列を用いてあるアソシエーションスキームの族の構成法を示すのが本講演の主題である。次節で必要な記号と定義を準備した後、本講演の動機を示そう。

## 3 記号と定義

記号に関しては [1] で与えられているものを使用する。

**定義 3.1.** $X$ を有限集合として $G$ を $X \times X$ の空集合を含まない分割とする。よって $G$ の元は $X$ 上の二項関係とみなされる。$(X, G)$ は次の三つの条件を満たすときに**アソシエーションスキーム**と呼ばれる (以下、**スキーム**と略す)。

1. 対角集合 $1_X := \{(x,x) \mid x \in X\}$ は $G$ に属する。
2. 任意の $G$ の元 $g$ の転置 $g^* := \{(x,y) \mid (y,x) \in g\}$ は $G$ に属する。
3. 任意の $G$ の元 $d$, $e$ に対して、その隣接行列の積 $A_d A_e$ は $G$ の隣接行列達の和で表せる。すなわち $A_d A_e = \sum_{f \in G} a_{def} A_f$、ただし $A_f$ は $f \in G$ に関する隣接行列である。

上の定義から $\{A_f\}_{f \in G}$ で張られる複素数体上のベクトル空間は全行列代数の半単純な部分代数をなし、$\{A_f\}_{f \in G}$ は基底となり構造定数 $\{a_{def}\}_{d,e,f \in G}$ を持つことがわかる。この構造定数の中で $\{a_{gg^*1_X}\}_{g \in G}$ はよく用いられる

ので特別に $n_g := a_{gg^*1_X}$ と記され、$g$ の**次数**と呼ばれる。$n_g$ は有向正則グラフ $(X,g)$ の次数であり、$A_g$ の行和、列和と等しい数である。

この次数に関する制限によって様々なスキームの族が定義される。例えば、次数が全て 1 となるスキームは**薄**と呼ばれ、薄スキームの隣接行列全体は行列の積に関して群をなす、すなわちその隣接行列全体がある有限群の正則表現となることと同値である。更に薄スキーム $(X,G)$ から群 $\{A_g \mid g \in G\}$ への対応は一対一であり、スキームとしての同型と群としての同型を一致させるものであり、逆写像である群全体から薄スキーム全体への一対一対応も存在する。この意味で群全体はスキーム全体に埋め込まれている。

よく知られているように、有限群 $\Gamma$ の部分群に関する右剰余類を考えた時、その有限群はその剰余類全体 $\Omega$ に可移に作用して、$\Omega \times \Omega$ 上に誘導される $\Gamma$ の軌道全体はスキームになる。この操作を薄スキーム全体に対して行うと、薄とは限らないスキームの族が現れる。このようにして得られるスキームは**群型**と呼ばれる。明かに薄スキームは群型であるし、距離可移グラフは群型のスキームを誘導する。

「群の部分群を持ってきて剰余を取りスキームを構成する」、この操作は薄スキームだけでなく一般のスキームにも適用することができる。そのために部分群と剰余類にあたる概念をスキーム上で準備しよう。

以下、$(X,G)$ はスキームであると仮定する。

**定義 3.2.** $H$ は $G$ の空でない部分集合とする。$\bigcap_{h\in H} h \subseteq X \times X$ が同値関係になるとき $H$ は**閉**と呼ばれ、その同値類全体は $X/H = \{xH \mid x \in X\}$ と記される。ただし $xH$ は $x$ を含む同値類である。$G$ 上の二項関係 $\backsim$ を、$d \backsim e \iff \exists x, x', y, y' \in X; (x,y) \in d, (x',y') \in e, x' \in xH, y' \in yH$ のように定義すると、$\backsim$ は $G$ 上の同値関係となるので、その同値類全体を $G/\!\!/H := \{g^H \mid g \in G\}$ で記す。ただし $g^H$ は $g$ を含む同値類である。このとき $(X/H, G/\!\!/H)$ は、$(xH, yH) \in g^H$ ただし $(x,y) \in g$ という定義によりスキームをなし、このスキームは $(X,G)$ の $H$ による**商**スキームと呼ばれる。

閉部分集合の例としては、$\{1_X\}$, $G$, $\{g \in G \mid n_g = 1\}$ などが挙げられる。特に三番目に挙げた例の隣接行列全体は群をなす。薄スキームとの関連から $\{g \in G \mid n_g = 1\}$ の中の閉部分集合もまた**薄**と呼ばれる。$\{g \in G \mid n_g = 1\}$ は $G$ の最大の薄閉部分集合であるが、その商が薄スキームとなるような最小の閉部分集合も唯一存在する。この閉部分集合を $G'$ と記す。（この記号は群論における交換子群の表記を想起させるために用

いた。なぜなら交換子群はその商がアーベル群になる最小の正規部分群という性質で特徴づけされているからである。)

**定義 3.3.** スキーム $(X, G)$ において、$G /\!\!/ H$ が薄になるような薄閉部分集合 $H$ が存在する時、$(X, G)$ は**超薄**(meta-thin) と呼ばれる。この条件は $G'$ が薄となることと同値である。

**定義 3.4.** $p$ を素数とする。$G$ の任意の元 $g$ の次数が $p$ 冪で $|X|$ もまた $p$ 冪である時、$(X, G)$ は $p$-スキームと呼ばれる。

$p$-スキームの例としては、$p$-群から誘導される薄スキームであり、$p$-スキーム同士の直積やリース積もまた $p$-スキームになる(スキームの直積やリース積に関しては [1] を参照)。

# 4 研究の動機

超薄スキームをリンカーンの演説風に述べると「群の群によるスキームになるための拡大」である。すなわち、群とは薄閉部分集合であり、その商もまた薄になり、なされた拡大は薄とは限らないスキームということである。本研究は群論における拡大理論の類似を行う際の初期段階に属するものである(謝辞で述べたようにこれは後付の動機である)。元来は $p$-スキームに関する次の考察が研究の動機になっている。頂点数が $p$-冪の薄スキームは定義から $p$-スキームである。更に任意の $p$-スキーム $(X, G)$ は $p$-群と同様に、閉部分集合の列 $H_0 < H_1 < H_2 < \cdots < H_n = G$ で、$H_i /\!\!/ H_{i-1}$ が位数 $p$ の巡回群と同型になるようなものが存在する。この観点から、「$p$-スキームと $p$-群とを比較した時に多くの類似点が見られるのではないか?」そうであれば、「位数 $p^3$ の群の同型類が容易に分類されるように頂点数が $p^3$ の $p$-スキームの分類も可能なのではないか?」と推測したのが研究の発端である。しかしながら実際に分類に取り組んで見ると、$p$ が大きくなるにつれて同型類の数も増えることがわかり、しかも自己同型群が可移でないものも数多く現れることがわかった。このように分類は頓挫してしまったのだが、そのかわりに、自己同型群が可移でない超薄スキームの無限系列の構成が可能ではないかと考えて本研究に至っている。

本講演録では特にスキーム $(X, G)$ における $G'$ がランク 2 の基本アーベル群で、$G /\!\!/ G'$ が任意の群であるときに、第一節で述べた数列を用いた構成法を紹介する。

# 5 構成法

本節においては、$(X,G)$ は超薄スキームで、それゆえ、$G/\!\!/N$ が薄になるような薄閉部分集合 $N$ が存在すると仮定する。更に $N$ はランク 2 の基本アーベル $p$-群 $C_p \times C_p$ と同型で、$G/\!\!/N$ が有限群 $K$ と同型であると仮定する。

任意の $u, v \in N$ で $\langle u,v\rangle = N$ となるものと任意の $\mu \in \mathbb{Z}_p$ に対して、$N$ 上の二項関係 $B^{\mu}_{u,v}$ を次のように定義する。

$$B^{\mu}_{u,v} := \{(u^{\alpha}v^{\beta}, u^{-\beta+\mu}v^{\gamma}) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Z}_p\}.$$

$B^{\mu}_{u,v}$ の隣接行列を $M^{\mu}_{u,v}$ と記す。そのとき次が成り立つ。

$$M^{\mu}_{u,v}M^{\nu}_{w,z} = \begin{cases} J_{p^2} & \text{if } \langle v\rangle \neq \langle w\rangle \\ pM^{\delta}_{u,z^{1/\nu}} & \text{if } w = v^{\epsilon} \text{ for } \epsilon \in \mathbb{Z}_p \end{cases}$$

ただし $\delta = \mu(-b+\nu)/(\epsilon a)$ で $u^{\mu} = v^a z^{b/\epsilon}$ である。

任意の $u \in N \times K$ に対して $t_u$ と $\tilde{N}$ を次のように定義する。

$$t_u := \{(v,w) \mid wv^{-1} = u\}, \tilde{N} := \{t_u \mid u \in N\}.$$

$\{k_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$ を $K$ 上の次の条件を満たす数列とする。

$$\Pi_{i=1}^{n} k_i = \mathrm{id}_K, |\{\Pi_{i=j}^{j+l} k_i \mid 1 \leq j \leq n, 0 \leq l \leq n-2\}| = n^2 - n.$$

任意の $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ に対して、$N$ 上の列 $(v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n)$ を、$\{v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$ が異なる $n$ 個の元で、任意の異なる二元が $H$ の基底になるように選ぶ。

任意の $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ に対して、$\mathbb{Z}_p$ 上の数列 $(\delta_{ik} \mid k \in K)$ を任意に選ぶ。

これらの $(v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n)$ と $(\delta_{ik} \mid k \in K)$ を用いて、$N \times K$ 上の二項関係の集合 $\{g_i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ を次のように定義する。

$$g_i \subseteq \bigcup_{u \in Hk_i} t_u, g_i \cap (Hk \times Hk_ik) = B^{\delta_{ik}}_{v_i,v_{i+1}} \text{ for all } k \in K.$$

$N \times K$ 上の二項関係 $g_n$ は次のように定義される。

$$p^{n-2}A_{g_n} = (A_{g_1}A_{g_2}\cdots A_{g_{n-1}})^T.$$

任意の $j \in \mathbb{Z}_n$ と任意の $l \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ に対して、$N \times K$ 上の二項関係 $g_{[j,j+k]}$ を次のように定義する。

$$p^{k-1} A_{g_{[j,j+k]}} = \Pi_{i=j}^{j+k} A_{g_i}.$$

簡便のために $S := \{g_{[j,j+k]} \mid 1 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq n-2\}$ としておく。

任意の $g_{[j,j+k]} \in S$ と任意の $t_u \in \{t_u \mid u \in \langle v_j(v_{j+k})^{-1}\rangle\}$ に対して、$N \times K$ 上の二項関係 $g_{[j,j+k]}t_u$ を次のように定義する。

$$A_{g_{[j,j+k]}t_u} = A_{g_{[j,j+k]}} A_{t_u}.$$

簡便のために $L := \{\Pi_{i=j}^{j+l} k_i \mid 1 \leq j \leq n, 0 \leq l \leq n-1\}$ とする。任意の $k \in K - L$ に対して、$N \times K$ 上の二項関係 $h_k$ を次のように定義する。

$$A_{h_k} = \sum_{u \in Nk} A_{t_u}.$$

**命題 5.1.** 上で定義した $N \times K$ 上の二項関係の族、すなわち、

$$G := \tilde{N} \cup \{h_k \mid k \in K - L\} \cup \bigcup_{g_{[j,j+k]} \in S} \{g_{[j,j+k]}t_u \mid u \in \langle v_j(v_{j+k})^{-1}\rangle\}$$

ただし $L := \{\Pi_{i=j}^{j+l} k_i \mid 1 \leq j \leq n, 0 \leq l \leq n-1\}$ は、$G' \simeq N$ と $G /\!\!/ G' \simeq K$ を満たすスキーム $(N \times K, G)$ をなす。

# 6 応用

この構成法を $p$-スキームに対して応用して、群型ではないスキームを数多く構成することができる。

**補題 6.1.** $(X, G)$ は $p$-スキームで $|X| > 1$ を満たすものとする。もし $(X, G)$ が群型ならば、「任意の $h \in G$ に対して $A_g A_h = A_h A_g$」という条件を満たす $g \in \{g \in G \mid n_g = 1\} - \{1_X\}$ が存在する。

(証明) $p$-スキーム $(X, G)$ が「閉部分集合の列 $H_0 < H_1 < H_2 < \cdots < H_n = G$ で、$H_i /\!\!/ H_{i-1}$ が位数 $p$ の巡回群と同型になるようなものが存在する。」を満たすことから、$n$ 個のリース積

$$\mathcal{X}_p \wr \mathcal{X}_p \wr \cdots \wr \mathcal{X}_p$$

は $(X,G)$ の fusion スキームになることがわかる (fusion の定義は [1] を参照)、ただし $\mathcal{X}_p$ は $\mathbb{Z}_p$ と同型な薄スキームである。そしてその $n$ 個のリース積の自己同型群は $p$-群になる。スキームの自己同型群の定義から「$(Y,H)$ が $(Y,K)$ の fusion スキームならば、$\mathsf{Aut}(Y,K) \leq \mathsf{Aut}(Y,H)$」が成り立つので、$\mathsf{Aut}(X,G)$ もまた自明でない $p$-群である。よって $\mathsf{Aut}(X,G)$ には非自明な中心 $\alpha$ が存在する。このとき、$(x,x^\alpha)$ を含む $G$ の元が補題の結論を満たす二項関係になる。 □

上の補題の対偶を用いて、群型でない $p$-スキームを構成することが可能である。実際、$p$ が 7 以上の素数であれば、前節で述べた構成法において、$N=\langle u\rangle\times\langle v\rangle\simeq C_p\times C_p$、$K=\langle\xi\rangle\simeq C_p$ として、$K$ 上の数列を $(\xi,\xi^2,\xi^{-3})$ として、$N$ 上の数列を $(u,v,uv)$ として、$\mathbb{Z}_p$ 上の列を任意に持ってくれば、前節で述べた構成法によって、二項関係 $g_1,g_2$ が定義される。このとき、$\{t\in N\mid n_t=1, A_{g_1}A_t=A_tA_{g_1}\}=\langle uv\rangle$ であり、$\{t\in N\mid n_t=1, A_{g_2}A_t=A_tA_{g_2}\}=\langle u\rangle$ であるので、$\{t\in N\mid n_t=1, A_gA_t=A_tA_g \text{ for each } g\in G\}=\{1_X\}$ である。それゆえ、このように構成したスキームは群型ではない。

# 参考文献

[1] P.-H. Zieschang, An Algebraic Approach to Association Schemes, Lecture Notes in Mathematics 1628, *Springer,* 1996.