数理解析研究所講究録 1327 巻 2003 年 114-118

On the work of Tosiro Tsuzuku (1929-2002) on finite permutation groups

坂内 英一　九大・数理
Eiichi Bannai, Kyushu University
bannai@math.kyushu-u.ac.jp

2002 年 9 月 16 日に亡くなられた都筑俊郎先生への追悼の意味も込めて、都筑先生の数学上の仕事、特に有限置換群に関係した部分についての短い解説を試みたいと思います。先生の最後に書かれた論文が 1975 年頃であり、また 1979 年頃から病気で入退院をくり返されていたことなどもあって、若い世代の方々の中には、元気でいらっしゃったころの先生および先生の仕事を直接に御存知ない方も多いかもしれないと思います。我々の世代は、特に私自身も仕事を始めるのに際して、強い影響を受けています。

都筑先生の簡単な略歴を述べますと、1929 年 10 月 30 日生。1953 年 に名古屋大学理学部数学科を卒業され、1956-1968 年は名古屋大学に在職（1966 年教授）、1968-1993 年は北海道大学に在職されました。初期の仕事は環論（および２次形式）が主で中山正先生との共同の仕事があり、そのあと、置換群および置換群と有限幾何に関係した仕事があり、単行本「有限群と有限幾何」(岩波書店、1976)、とその英訳である”Finite Groups and Finite Geometries” (Cambridge University Press, 1982) は御存知の方も多いと思います。置換群に関係した論文としては次のものがあります。便宜上、 I, II, III の三つのグループに分類します。なお、置換群に限らない都筑先生の論文リストについては、T. Yoshida, Dedication. Hokkaido Math. J. 19 (1990), no. 3, 379–383 を参照して下さい。

I. （多重可移置換群の指標に関する論文）

[1] On multiple transitivity of permutation groups. Nagoya Math. J. 18 (1961), 93–109.
[2] A remark on decompositions of the permutation representation of a permutation group. Nagoya Math. J. 22 (1963), 79–82.

II.（ランク３置換群に関する論文）

[3] On primitive extensions of rank 3 of symmetric groups. Nagoya Math. J. 27 (1966), 171–177.
[4] Transitive extensions of certain permutation groups of rank 3. Nagoya Math. J. 31 (1968), 31–36.

III. （置換群と有限幾何に関する論文）

[5] A characterization of finite projective linear groups. Proc. Japan Acad. 40 (1964), 155–156.
[6] On doubly transitive permutation groups of degree $1+p+p^2$ where p is a prime number. J. Algebra 8 (1968), 143–147.
[7] On $LF_3(3)$. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I 22 (1972), 104–107.
[8] On a characterization of $\mathrm{PSL}_4(p)$. J. Math. Kyoto Univ. 13 (1973), 49–52.
[9] On a problem of D. G. Higman. Hokkaido Math. J. 4 (1975), no. 2, 300–302.

I の論文（多重可移置換群の指標に関する論文）についての解説。

良く知られているように、対称群 S_n の既約指標 χ は n の 分割 $(n_1, n_2. \cdots, n_l)$, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_l$, $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_l \geq 1$, と 1 対 1 に対応します。この n の分割は Young 図形でも表されます。分割 $(n_1, n_2. \cdots, n_l)$ に対応する既約指標を $\chi_{(n_1,n_2.\cdots,n_l)}$ で表します。この $\chi_{(n_1,n_2.\cdots,n_l)}$ の次元を

$$\dim \chi_{(n_1,n_2,\ldots,n_l)} = n_2 + n_3 + \cdots + n_l$$

と定義します。次の事実は良く知られています。

• $G(\subset S_n), n \geq 2,$ が集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上に 2 重可移に作用 $\Longleftrightarrow$ 置換指標 π が $\pi = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)}$ と分解される。（ここで $\chi_{(n)}$ は G の単位指標 1_G と一致する。）

• (Frobenius) $G(\subset S_n), n \geq 2r,$ が集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上に $2r$-重可移に作用 $\Rightarrow$ $\forall\chi =$ irreducible character of S_n with $\dim\chi \leq r$, $\chi|_G$ is irreducible.

論文 [1] の主定理は次の結果です。

定理（[1],1961）
(i) 上の Frobenius の定理の逆が成り立つ。すなわち、$G(\subset S_n), n \geq 2r,$ に対して、$\chi|_G$ is irreducible $\forall\chi =$ irreducible character of S_n with $\dim\chi \leq r \Rightarrow G$ は $2r$-重可移である。
(ii) $\chi = \chi_{(n-2,2)}$ または $\chi = \chi_{(n-2,1,1)}$ に対して、$\chi|_G$ is irreducible $\Rightarrow G$ は 3-重可移である。
(iii) $\chi_{(n-3,2,1)}|_G$=irreducible $\Rightarrow G$ は 4-重可移である。 また, $\chi = \chi_{(n-3,1,1,1)}|_G$ または $\chi = \chi_{(n-3,3)}|_G$= irreducible $\Rightarrow G$ は 5-重可移である。

厳密に言うと、上の (i) の論文 [1] における証明は完全でないことが知られています。すなわち、S_n の２つの相異なる既約指標を G に制限したとき G の指標として相異なるということが暗黙の内に仮定されていて、その仮定がいつ成り立つかはあきらかでありません。しかし結果自体はその後のいろいろな結果により成り立つことが分かっています。特に Livingstone-Wagner (Math. Zeit. 1965) はこの定理の方向での一番優れた結果と言えます。(i) の結果もそれから従います。また、P.M. Neumann (Proc. London Math. Soc., 1974)、J. Saxl (J. Algebra, 1975) も参照して下さい。現在では、有限単純群の分類を用いれば、$\chi =$ irreducible characters of S_n, $\chi|_G$=irreducible となるような χ と G の組は分類可能です。(J. Saxl (J. Algebra, 1987) 参照。）いずれにせよ、この論文 [1] は先駆

的な論文であり、永尾先生からもこの論文により Frobenius の結果を初めて知り、それは永尾先生の多重可移群の研究にも役立ったと伺いました。

私自身はこの結果が頭にあったことから、球面デザインの研究において類似な結果を得ました。準備として、次の良く知られた結果から出発します。

• 直交群 $O(n)$ の既約表現は任意のサイズのヤング図形 $(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ でその転置 $(k_1, k_2, \cdots, k_s)$ に対して、$k_1 + k_2 \le n$ となるものと 1 対 1 に対応します。

• ヤング図形 (i) に対応する $O(n)$ の既約表現を ρ_i とするとき、ρ_i は直交群 $O(n)$ の i-次の斉次調和多項式全体の作る空間 $Harm(i)$ への作用と一致します。従って、$\dim \rho_i = \dim Harm(i) = \binom{n-1+i}{i} - \binom{n-1+i-2}{i-2}$ となります。

定理 (Bannai,1979, J. Comb. Theory (A))
$G \subset O(n), |G| < \infty, n \ge 3, \rho_i|G = \text{irreducible}\ \forall i = 0, 1, \cdots, r \Rightarrow x^G = \{x^g | g \in G\} \subset S^{n-1}$ is a spherical t-design $\forall x \in S^{n-1}$. (ここで S^{n-1} は R^n における原点を中心とする単位球を表わす。)

極く最近、この結果は de la Harpe–Pache により、$\rho_i|G = \text{irreducible}\ \forall i = 0, 1, \cdots, r$ を弱めた、$\rho_r|G = \text{irreducible}$ と言う仮定だけから上と同じ結論が成り立つという形に拡張されています。(de la Harpe–Pache, to appear in Europ. J. Combinatorics.)

II の論文(ランク 3 置換群に関する論文)についての解説。

• 集合 Ω 上の可移置換群 G がランク 3 置換群であるとは、1 点の固定群 $G_a (a \in \Omega)$ が Ω 上に丁度 3 つの軌道 $(\{a\}, \Delta(a), \Gamma(a)\ )$ を持つことと定義します。

論文 [3] の主定理は次の通りです。

定理 ([3], 1966)
G を Ω 上のランク 3 可移置換群で、置換群 $(G_a, \Delta(a)) \cong (S_n, n \text{ letters})$, G_a acts faithfully on $\Delta(a) \Rightarrow n = 1, 2, 3, 5, 7$, and G are determined. ($n = 7$ の時 Hoffman-Singleton graph $U_3(5)/A_7$ が表われることに注意。)

この仕事は、ランク 3 置換群からの散在群の発見、ランク 3 置換群の一般論の進展の影響のもとに始まったと思われます。また、その後、$(G_a, \Delta(a))$ が 4-重可移群ならばどうなるか? 3-重可移群ならばどうなるか? という具合にいろいろと拡張されます。(Cameron, Noda, Bannai, Enomoto などの 1970 年代前半の仕事を参照。) また、ランク 3 に限らない一般のランク l の可移置換群の研究、距離可移グラフの研究、さらに、Moore graphs の研究, 距離可移グラフから群の存在をとりさった概念である距離正則グラフの研究へのひとつの motivation を与え、それらはさらに P- and Q-polynomial association schemes の分類問題へと導き、代数的組合せ論の成立にもつながる進展を導きます。当時のランク 3 置換群研究の力点は新しい未知の有限単純群を発見したいということにありましたが、現在の有限単純群の分類の完成以後の研究では、有限単純群の分類を用いて、ランク 3 置換群の完全な分類も得られています。(もちろん、ランク 2 置換群である 2 (多) 重可移群

の分類も有限単純群の分類を用いて成されています。)

以下、次のような状況が成り立っていると仮定します。G = 2-transitive on Ω, $H = G_a$ is transitive on $\Omega - \{a\}$, $H_b(b \in \Omega - \{a\})$ has 3 orbits $\{b\}, \Delta(b), \Gamma(b)$ on $\Omega - \{a\}$.

論文 [4] の主定理は次のようになります。

定理([4],1968)
(i) $\Delta(a)| = 1$ かつ H_b is regular (i.e., transitive and semi-regular) on $\Gamma(a)$ のとき、そのような G は分類される。($PSL(2,7)$ の 7 文字上の置換群が例として現われます。このとき、$|G| = n(n-1)(n-3), |H| = (n-1)(n-3), |\Omega| = n$ が成り立っています。この状況は後の、伊藤達郎一清田正夫の sharp permutation group の時, あるいは Jordan 群の分類の時にも特別な状況としてこの状況が現われます。)
(ii) 条件
・H is a Frobenius group with both kernel N and complement Q being abelian,
・H is faithful on $\Delta(b)$ and on $\Gamma(b)$,
・Q is semiregular on $\Gamma(b)$,
・$|\Delta(a)| \neq |\Gamma(a)|, |\Delta(b)| \geq 3$,
が全て成り立つような　G は分類される。($PSL(2,11)$ の 11 文字上の置換群が例として表われます。)

(既に述べたように、現在では2重可移群の分類は有限単純群の分類を用いて完全に分類されています。それでも、置換群特有の議論だけでどれだけのことが証明出来るかを知ることは現在でも無駄では無いと考えます。しかし、決して易しくはないようです。)

III の論文(置換群と有限幾何に関する論文)についての解説。

このクラスに属する論文のうち、結果として一番重要であり、かつ main stream に直結する仕事としては、次の [5] が挙げられると思います。

定理([5], 1964)
群 G とその部分群達の組 $G = (B, N, N/B \cap N \cong W)$ が A_n 型の Bruhat 分解を持てば、(すなわち, $W \cong W(A_n) \cong S_{n+1}$ ならば、) そのような G は分類される。

この Bruhat 分解というのは、本質的に Tits system あるいは BN-pair と呼ばれる概念と一致します。[5] はアナウンスメントだけで、full paper は出版されませんでした。多分一つの理由は、この結果は 一般のランク3以上の spherical buildings の分類を与える J. Tits の大定理の一部に含まれ、すでにそれについての Tits によるアナウンスメントが出ていたことによるかもしれないと想像しています。(Tits の主論文の発表はしばらく後になりました。Lecture Notes in Math 386 (Springer),1974, 参照 。 なお、阿部英一氏によっても A_n 型の場合に類似の結果が独立に得られています。) いずれにせよ、これらの結果は研究のレベルの高さを示していると思います。

III に属する他のいくつかの論文は、いずれも良い群を自己同型に持つ幾何的構造(デザイン)の特徴付けに関するものであると言えると思います。それぞれの論文はきれいな結果を与えています。初めに述べた本「有限群と有限幾何」(岩波書店、1976) 英訳

の"Finite Groups and Finite Geometries" (Cambridge University Press, 1982) 、もこの方向を目的としたものであろうと思われます。他に、正式な論文ではありませんが、1963年の箱根で開催された代数学シンポジウムの報告集での、Lie 型の単純群の素数次の置換表現を決定している都筑先生の記事からも、私は個人的には強い影響を受けました。なお、この都筑先生の仕事は伊藤昇先生の素数次の置換群との研究に触発されている部分も多いと思われ、また多重可移群とその表現の関係の考察においても伊藤昇先生の影響もあると思われます。また、都筑先生の２年間のイリノイ大学滞在を通じての鈴木通夫先生の影響も感じられます。特にランク３の置換群の研究はその場所、その時期、の影響を感じます。

最後に、非常に個人的な感想を述べます。1960 年代は有限群、また特に置換群論が大きく発展した時期と思います。まだ研究が始まったばかりという側面もあって、いろいろなことが実験的に試みられたように思います。都筑先生の仕事においても、良い群論的性質を持った対象の研究を置換群特有の方法で、いろいろと研究し、いろいろな方向への研究がそれからぐんぐんと発展してきた、ある意味で非常に置換群が面白かった良い時期でもあったと思います。有限単純群の分類に置換群的方法が役立つかもしれないと思われていた時期かもしれません。御存知のように、1980 年代の初めの有限単純群の分類の完成は群論に多くの変化をもたらしました。置換群の研究を片隅に追いやったとも言えます。都筑先生の仕事もその中に埋もれてしまっているという一面は否定できません。それが良い、悪いということではなく、牧歌的な状態ではいられなくなったことは事実で、またその牧歌的な時代に戻ることもできないことも確かと思います。現在の群論がどの方向に行くべきかも難しいのは確かです。（ただし、逆に先が見えないから現在が面白いとの見方も可能かもしれません。）いずれにせよ、各個人の仕事は時代によって乗り越えられてしまうとしても、その精神は引き継いでいきたいと思います。そのままの形ではなくても、別の形で、置換群の方法が再び有効になることを期待したいと思いますし、それは可能と思いますし、そのために努力したいと思います。都筑先生の仕事からいろいろな進展が生じたように、それから進展が得られるような新しさを持った仕事をしたいと思います。