数理解析研究所講究録 1327 巻 2003 年 191-201

On Cohomology Rings of Generalized Quaternion Groups

速水 孝夫　東京理科大学 理学研究科
Takao Hayami　Faculty of Science, Science Univ. of Tokyo
眞田 克典　東京理科大学 理学部
Katsunori Sanada　Faculty of Science, Science Univ. of Tokyo

Introduction

可換環上の多元環に対する cohomology 論は Hochschild([6]), MacLane ([8]), Cartan and Eilenberg ([2]) らによって体系化され，現在に至るまで多くの研究がなされてきている．R を可換環，Λ を R 上有限生成で射影的な R 上の多元環とする．M を両側 Λ-加群としたとき，各次元 $n \geq 0$ に対する Hochschild cohomology $H^n(\Lambda, M)$ が定義される．さらに M が R 上の多元環 Γ であるとき，$H^*(\Lambda, \Gamma) := \bigoplus_{n\geq 0} H^n(\Lambda, \Gamma)$ に cup 積によって次数付き環としての構造を導入することができ，これを一般に Λ の Hochschild cohomology 環とよぶ．Hochschild cohomology 環については現在もさまざまな研究が行われているが，個々の多元環に対して Hochschild cohomology 環の構造を決定することは一般にかなり困難である．

G を有限群とする．群環 RG の Hochschild cohomology 環は興味深い対象の一つである．特に，$\Gamma = RG$ としたときの Hochschild cohomology 環 $H^*(RG, RG)$ を $HH^*(RG)$ とかく．G がアーベル群の場合，$HH^*(RG)$ は $RG \otimes_R H^*(G, R)$ に環として同型であることが知られている ([3], [7])．しかし，G がアーベル群でないときはこのような明確な記述を得ることは難しいと思われる．一方，加群としての同型 $HH^*(RG) \simeq \bigoplus_j H^*(G_j, R)$ は以前から知られていたが ([1, Theorem 2.11.2])，Siegel and Witherspoon はこの加法群としての同型が環同型になるように，右辺に特別な積が入れられることを示した ([10])．ここで，G_j は G の共役類の代表元の centralizer を表す．同時に彼らはこの特別な積を用いて，$\mathbb{F}_3S_3, \mathbb{F}_2A_4$, $\mathbb{F}_2D_{2^n}$ の Hochschild cohomology 環の構造を決定している．しかしながら，G が非可換群の場合の整係数群環 $\mathbb{Z}G$ の Hochschild cohomology 環 $HH^*(\mathbb{Z}G)$ に関しては，その構造を明確にしている研究は見当たらない．

M を両側 $\mathbb{Z}G$-加群とし，これを共役によって G-加群とみなし ${}_\psi M$ と記す．このとき，加法群としての同型 $H^n(\mathbb{Z}G, M) \simeq H^n(G, {}_\psi M)$ は cup 積を保存する．ここで，$H^n(G, {}_\psi M)$ は群 G の M を係数加群とする cohomology 群とする．e を $\mathbb{Q}G$ の中心的ベキ等元とする．このとき，環同型 $H^*(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}Ge) \simeq H^*(G, {}_\psi\mathbb{Z}Ge)$ が存在する．特に $e = 1$ の場合，環同型 $HH^*(\mathbb{Z}G) \simeq H^*(G, {}_\psi\mathbb{Z}G)$ を得る．ところで，有限群の cohomology 論における「周期性」の理論は最も完成されている理論の一つであり，$H^n(G, -)$ が周期をもつための必要十分条件は「G のすべてのシロー部分群が巡回群または一般四元数群である」という事実がよく知られている．実際，巡回群および一般四元数群については，周期がそれぞれ 2, 4 の resolution が存在することが知られており，これらを用いればその cohomology を計算することが原理的には可能である．今回は G が一般四元数群のとき，G の cohomology

環 $H^*(G, {}_\psi\mathbb{Z}Ge)$，したがって群環 $\mathbb{Z}G$ の Hochschild cohomology 環 $H^*(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}Ge)$ を中心に考察する ([4], [5]).

1. Hochschild cohomology と group cohomlogy

R を可換環，Λ を R 上有限生成で射影的な R 上の多元環とし，M を左 Λ^e-加群 (即ち両側 Λ-加群) とする．(P, d) を Λ のある Λ^e-projective resolution

$$(P, d) : \cdots \to P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda \to 0$$

とすると，これから complex

$\left(\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(P, M), d^\#\right)$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(P_0, M) \xrightarrow{d_1^\#} \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(P_1, M) \xrightarrow{d_2^\#} \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(P_2, M) \xrightarrow{d_3^\#} \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(P_3, M) \to \cdots$$

が得られる．このとき，各次元 $n \geq 0$ に対する Λ の M を係数加群とする Hochschild cohomology が定義される: $H^n(\Lambda, M) = \mathrm{Ker}\ d_{n+1}^\# / \mathrm{Im}\ d_n^\#$. さらに N を両側 Λ-加群とするとき，Hochschild cohomology には cup 積が定義される:

$$\smile : H^p(\Lambda, M) \otimes_R H^q(\Lambda, N) \longrightarrow H^{p+q}(\Lambda, M \otimes_\Lambda N).$$

この写像による $\alpha \otimes \beta$ の像を $\alpha \smile \beta$ で表すと，これは，α 及び β に関して双線形写像になっている．この cup 積は diagonal approximation $\Delta_{p,q} : P_{p+q} \to P_p \otimes_\Lambda P_q$ を用いて与えることができる．なお，cup 積は resolution のとり方に依存しない．さらに，L を両側 Λ-加群としたとき，次の associativity を満たす: $\alpha \in H^p(\Lambda, M)$, $\beta \in H^q(\Lambda, N), \gamma \in H^r(\Lambda, L)$ に対し $(\alpha \smile \beta) \smile \gamma = \alpha \smile (\beta \smile \gamma)$. Γ を R 上の多元環とし，Λ から Γ への R-準同型が存在するものとする．このとき，Γ を両側 Λ-加群とみなし，$H^*(\Lambda, \Gamma) := \bigoplus_{n \geq 0} H^n(\Lambda, \Gamma)$ に cup 積によって次数付き環としての構造を導入することができ，これを一般に Λ の Hochschild cohomology 環とよぶ．特に，$\Gamma = \Lambda$ としたときの Hochschild cohomology 環を $HH^*(\Lambda)$ とかく．$HH^*(\Lambda)$ は anti-commutative，つまり $\alpha \in HH^p(\Lambda), \beta \in HH^q(\Lambda)$ に対し $\alpha\beta = (-1)^{pq}\beta\alpha$ が成立する．

次に group cohomology の定義を述べる．G を有限群とし，$\mathbb{Z}G$ を整係数群環，A を任意の G-加群とする．(Z, d) を $\mathbb{Z}$ のある free resolution

$$(Z, d) : \cdots \to Z_3 \xrightarrow{d_3} Z_2 \xrightarrow{d_2} Z_1 \xrightarrow{d_1} Z_0 \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda \to 0$$

とすると，これから complex

$\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(Z, A), d^\#\right)$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(Z_0, A) \xrightarrow{d_1^\#} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(Z_1, A) \xrightarrow{d_2^\#} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(Z_2, A) \xrightarrow{d_3^\#} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(Z_3, A) \to \cdots$$

が得られる．このとき，各次元 $n \geq 0$ に対する G の A を係数加群とする group cohomology が定義される: $H^n(G,A) = \mathrm{Ker}\, d^{\#}_{n+1}/\mathrm{Im}\, d^{\#}_n$. また，$G$ の group cohomology にも cup 積が定義される:

$$\smile : H^p(G,A) \otimes H^q(G,B) \longrightarrow H^{p+q}(G, A \otimes B).$$

この写像による $\alpha\otimes\beta$ の像を $\alpha \smile \beta$ で表すと，これは α 及び β に関して双線形写像になっている．cup 積は diagonal approximation $\Delta_{p,q} : Z_{p+q} \to Z_p \otimes Z_q$ によって与えることができる．なお，cup 積は resolution のとり方に依存しない．さらに，associativity も成立する．G-加群 A が環であり，さらに条件 $\sigma \cdot (ab) = (\sigma \cdot a)(\sigma \cdot b)$ $\quad (\sigma \in G,\, a, b \in A)$ を満たすとき，cup 積によって，$H^*(G,A) = \bigoplus_{n\geq 0} H^n(G,A)$ に次数付き環としての構造を導入することができ，これを G の cohomology 環とよぶ．

M, N を両側 $\mathbb{Z}G$-加群とし，これを共役によって G-加群とみなしそれぞれ ${}_\psi M$, ${}_\psi N$ と記す．このとき，加法群としての同型 $H^n(\mathbb{Z}G, M) \simeq H^n(G, {}_\psi M)$ が存在し，これは cup 積を保存する．つまり，次の図式は可換となる:

$$\begin{array}{ccc} H^p(\mathbb{Z}G,M) \otimes H^q(\mathbb{Z}G,N) & \xrightarrow{\ \smile\ } & H^{p+q}(\mathbb{Z}G, M \otimes_{\mathbb{Z}G} N) \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \\ H^p(G,{}_\psi M) \otimes H^q(G,{}_\psi N) & \xrightarrow[\smile_\mu]{} & H^{p+q}(G, {}_\psi(M \otimes_{\mathbb{Z}G} N)). \end{array}$$

ただし，$\smile_\mu$ は $\mathbb{Z}G$-準同型 $\mu : M \otimes N \to M \otimes_{\mathbb{Z}G} N; a \otimes b \mapsto a \otimes_{\mathbb{Z}G} b$ から引き起こされる写像と通常の cup 積との合成写像を表す．したがって，特に環同型 $HH^*(\mathbb{Z}G) \simeq H^*(G, {}_\psi\mathbb{Z}G)$ が成り立つ．

e を $\mathbb{Q}G$ の中心的ベキ等元とする．このとき，環準同型 $\phi : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}Ge; x \mapsto xe$ (for $x \in G$) が存在し，この写像により $\mathbb{Z}$ 上の多元環 $\mathbb{Z}Ge$ を両側 $\mathbb{Z}G$-加群とみなすことができる．したがって Hochschild cohomology 環 $H^*(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}Ge)$ を考えることができ，このとき，環同型 $HH^*(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}Ge) \simeq H^*(G, {}_\psi\mathbb{Z}Ge)$ が存在する．特に $e = 1$ の場合，環同型 $HH^*(\mathbb{Z}G) \simeq H^*(G, {}_\psi\mathbb{Z}G)$ を得る．

2. 一般四元数群の Hochschild cohomology 環 ([4], [5])

$t \geq 2$ とし，$Q_t = \langle x, y | x^{2t} = 1, x^t = y^2, yxy^{-1} = x^{-1}\rangle$ を位数 $4t$ の一般四元数群とする．$\Lambda = \mathbb{Z}Q_t$ とおく．一般四元数群は周期 4 の特別な free resolution (Y, δ) を持つことが知られている ([2, Chapter XII, Section 7], [11, Chapter 3, Periodicity] 参照)．(X, d) を Q_t の standard resolution とする．Q_t の 2 つの resolution (X, d) と (Y, δ) の間の互いに逆向きな chain transformation を u,v とする．standard resolution (X, d) の diagonal approximation を Δ とかく．このとき，$(\Delta_Y)_{p,q} := (u_p \otimes u_q) \cdot \Delta_{p,q} \cdot v_{p+q}$ とおくと，$(\Delta_Y)_{p,q}$ は周期 4 の resolution (Y, δ) 上の diagonal approximation となる．

今回の目標は，周期 4 の resolution (Y, δ) 及び (Y, δ) 上の diagonal approximation (Δ_Y) を用いて，一般四元数群の cohomology における環構造を調べることにより，群環 Λ の Hochschild cohomology 環の構造を決定することである．

§2.1 では，Q_t の 2 つの resolution(X,d) と (Y,δ) の間の互いに逆向きな chain transformation u,v を具体的に与える．これらの chain transformation は周期 4 の resolution 上の diagonal approximation を与えるのに用いられる．

§2.2 では，係数加群を Λ 自身としたときの Hochschild cohomology 環 $HH^*(\Lambda)$ の構造を決定する．これは，環同型

$$HH^*(\Lambda) := \bigoplus_{n\geq 0} H^n(\Lambda,\Lambda) \xrightarrow{\sim} H^*(Q_t, {}_\psi\Lambda) := \bigoplus_{n\geq 0} H^n(Q_t, {}_\psi\Lambda)$$

の右辺における加群としての生成元を，周期 4 の resolution を用いて計算し，それらの間の cup 積を周期 4 の resolution 上の diagonal approximation によって計算することによって得られる．ここで，上の同型における右辺の ${}_\psi\Lambda$ は Λ を共役によって Q_t-加群とみなしたものである．また，埋め込み写像 $\mathbb{Z} \to {}_\psi\Lambda$ は cohomology 環の間の単射 $H^*(Q_t,\mathbb{Z}) \to H^*(Q_t, {}_\psi\Lambda)$ を引き起こす．この写像による $H^*(Q_t,\mathbb{Z})$ の元の像を考えることにより，cohomology 環 $H^*(Q_t,\mathbb{Z})$ の正確な記述も得ることができた．なお $t = 2^r$ のときは，$H^*(Q_{2^r},\mathbb{Z})$ の構造はよく知られている (例えば [11] 参照)．

§2.3 では，$t = 2^r$ $(r \geq 2)$ の場合に，$\mathbb{Q}Q_{2^r}$ のある単純成分の order Γ を係数加群とする，$\Lambda = \mathbb{Z}Q_{2^r}$ の Hochschild cohomology 環 $H^*(\Lambda,\Gamma) := \bigoplus_{n\geq 0} H^n(\Lambda,\Gamma)$ の構造を決定する ($r=1$ のときは，[9] 参照)．計算方法は §2.2 と同様である．$e = (1-x^{2^r})/2 \in \mathbb{Q}Q_{2^r}$ とおくと e は $\mathbb{Q}Q_{2^r}$ の中心的ベキ等元となる．そして，$\zeta = xe$, $i = x^{2^{r-1}}e$, $j = ye$, $K = \mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})$ とおくと $\mathbb{Q}Q_{2^r}e$ は K 上の quaternion algebra となる．K の整数環を $R := \mathbb{Z}[\zeta+\zeta^{-1}]$ とすれば，$\Gamma := \Lambda e (= \mathbb{Z}Q_{2^r}e)$ は $\mathbb{Q}Q_{2^r}e$ の R-order となる．環準同型 $\psi : \Lambda \to \Gamma^e; x \mapsto \zeta\otimes(\zeta^{-1})^\circ, y \mapsto j\otimes(j^{-1})^\circ$ により，すなわち共役により Γ^e-加群 Γ を Q_{2^r}-加群とみなしそれを ${}_\psi\Gamma$ と記す．このとき環同型

$$H^*(\Lambda,\Gamma) := \bigoplus_{n\geq 0} H^n(\Lambda,\Gamma) \xrightarrow{\sim} H^*(Q_{2^r}, {}_\psi\Gamma) := \bigoplus_{n\geq 0} H^n(Q_{2^r}, {}_\psi\Gamma)$$

の右辺における加群としての生成元を，周期 4 の resolution を用いて計算し，それらの間の cup 積を周期 4 の resolution 上の diagonal approximation によって計算し，$H^*(\Lambda,\Gamma)$ の構造を決定する．

2.1. Q_t の resolutions 及び chain transformations

一般四元数群は次のような周期 4 の特別な $\mathbb{Z}$ の Λ-free resolution を持つことが知られている ([2, Chapter XII, Section 7], [11, Chapter 3, Periodicity] 参照):

$$\begin{aligned}
(Y,\delta):\quad & \cdots \to \Lambda^2 \xrightarrow{\delta_1} \Lambda \xrightarrow{\delta_4} \Lambda \xrightarrow{\delta_3} \Lambda^2 \xrightarrow{\delta_2} \Lambda^2 \xrightarrow{\delta_1} \Lambda \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,\\
& \delta_1(c_1,c_2) = c_1(x-1) + c_2(y-1),\\
& \delta_2(c_1,c_2) = (c_1L + c_2(xy+1), -c_1(y+1) + c_2(x-1)),\\
& \delta_3(c) = (c(x-1), -c(xy-1)),\\
& \delta_4(c) = cN.
\end{aligned}$$

ここで，$L = x^{t-1} + x^{t-2} + \cdots + 1$ $(\in \Lambda)$, $\Lambda^2 = \Lambda \oplus \Lambda$, $N = \sum_{w \in Q_t} w$ $(\in \Lambda)$ とする．

(X, d) を Q_t の standard resolution とする．以下，(Y, δ) と (X, d) の間の互いに逆向きの chain transformations を構成する．X_i $(i \geq 0)$ の基底に対して notation $*$ を次のように導入する:

$$\sigma_0[\sigma_1] * \sigma_2[\cdot] := \sigma_0[\sigma_1\sigma_2] \ (\in (X_G)_1),$$
$$\sigma_0[\sigma_1] * \sigma_2[\sigma_3|\ldots|\sigma_i] := \sigma_0[\sigma_1\sigma_2|\sigma_3|\ldots|\sigma_i] \ (\in (X_G)_{i-1}).$$

ただし，$\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_i \in Q_t$.

Proposition 1. *Chain transformation* $v_n : Y_n \to X_n$ $(n \geq 0)$ は，以下のように帰納的与えることができる*:*

$$\begin{aligned}
&v_0(1) = [\cdot];\\
&v_{4k+1}(1,0) = [x] * v_{4k}(1), \quad v_{4k+1}(0,1) = [y] * v_{4k}(1);\\
&v_{4k+2}(1,0) = [L-1] * v_{4k+1}(1,0) - [y] * v_{4k+1}(0,1),\\
&v_{4k+2}(0,1) = [x] * v_{4k+1}(0,1) + [xy] * v_{4k+1}(1,0);\\
&v_{4k+3}(1) = [x] * v_{4k+2}(1,0) - [xy] * v_{4k+2}(0,1);\\
&v_{4k+4}(1) = [N] * v_{4k+3}(1) \qquad \text{for} \quad k \geq 0.
\end{aligned}$$

次に，任意の整数 $\iota \geq 0$ と $0 \leq \lambda, \mu < 2t$ に対して，

$$L_\iota = \begin{cases} x^{\iota-1} + x^{\iota-2} + \cdots + 1 & (\iota \geq 1) \\ 0 & (\iota = 0), \end{cases} \qquad P_\iota = Lxy - L_\iota(xy+1),$$

$$a_{\lambda,\mu} = \begin{cases} 1 & (\lambda + \mu \geq 2t) \\ 0 & (\lambda + \mu < 2t), \end{cases} \quad b_{\lambda,\mu} = \begin{cases} 0 & (\lambda \geq \mu) \\ -1 & (\lambda < \mu), \end{cases} \quad c_{\lambda,\mu} = \begin{cases} 1 & (\lambda - \mu \geq t) \\ 0 & (-t \leq \lambda - \mu < t) \\ -1 & (\lambda - \mu < -t) \end{cases}$$

とし，そしてさらに次のようにおく:

$$d^{0,q}_{\lambda,\mu} = a_{\lambda,\mu} \quad (\text{for } q = 0,1), \quad d^{1,q}_{\lambda,\mu} = \begin{cases} b_{\lambda,\mu} & (\text{for } q = 0) \\ c_{\lambda,\mu} & (\text{for } q = 1). \end{cases}$$

Proposition 2. *Chain transformation* $u_n : X_n \to Y_n$ $(0 \leq n \leq 3)$ は次の通り*:*

$$\begin{aligned}
&u_0 : [\cdot] \mapsto 1;\\
&u_1 : [x^i y^p] \mapsto (L_i, px^i);\\
&u_2 : [x^i y^p | x^j y^q] \mapsto px^{i-j}(-q, L_j) + d^{p,q}_{i,j}\left(1 - x^t y, Lxy\right);\\
&u_3 : [x^i | x^j y^p | x^k y^q] \mapsto d^{p,q}_{j,k} L_i \left(x^{t+1} y + 1\right)\\
&\qquad [x^i y | x^j | x^k y^q] \mapsto a_{j,k} P_i\\
&\qquad [x^i y | x^j y | x^k] \mapsto -x^{i-j} L_k + b_{j,k} P_i\\
&\qquad [x^i y | x^j y | x^k y] \mapsto (c_{j,k} - 1) P_i + x^{i-j} L_k xy - x^{i-j} L_j (xy+1).
\end{aligned}$$

ただし，$0 \leq i, j, k < 2t$, $p = 0, 1$, $q = 0, 1$.

2.2. Hochschild cohomology 環 $HH^*(\mathbb{Z}Q_t)$

このSectionでの目標は，[10]によって証明された同型は用いずに，位数$4t$の一般四元数群Q_tの整係数群環$\Lambda = \mathbb{Z}Q_t$のHochschild cohomology環$HH^*(\Lambda)(\simeq H^*(Q_t, {}_\psi\Lambda))$の構造を決定することである．すなわち，環同型$HH^*(\Lambda) \simeq H^*(Q_t, {}_\psi\Lambda)$の右辺における加群としての生成元を，周期4のresolutionを用いて計算し，それらの間のcup積を周期4のresolution上のdiagonal approximationを用いて計算することによって得られる．なお，$\mathbb{Z}$-加群としての構造は，加法群としての同型$HH^*(\Lambda) \simeq \bigoplus_j H^*(G_j, \mathbb{Z})$を使えば分ってしまうが，cup積を計算する際には加群としての生成元が必要になる．(G_jはQ_tの共役類の代表元のcentralizerを表す)

まず，周期4のresolution (Y, δ)にfunctor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, {}_\psi\Lambda)$をほどこし，同型$\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, {}_\psi\Lambda) \simeq \Lambda$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^2, {}_\psi\Lambda) \simeq \Lambda^2$を通すことにより，次のcomplexが得られる:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{Hom}_\Lambda(Y, {}_\psi\Lambda), \delta^\#\right) : 0 \to \Lambda \xrightarrow{\delta_1^\#} \Lambda^2 \xrightarrow{\delta_2^\#} \Lambda^2 \xrightarrow{\delta_3^\#} \Lambda \xrightarrow{\delta_4^\#} \Lambda \xrightarrow{\delta_1^\#} \cdots, \\
&\quad \delta_1^\#(\lambda) = ((x-1)\lambda, (y-1)\lambda), \\
&\quad \delta_2^\#(\lambda_1, \lambda_2) = (L\lambda_1 - (y+1)\lambda_2, (xy+1)\lambda_1 + (x-1)\lambda_2), \\
&\quad \delta_3^\#(\lambda_1, \lambda_2) = (x-1)\lambda_1 - (xy-1)\lambda_2, \\
&\quad \delta_4^\#(\lambda) = N\lambda.
\end{aligned}$$

このcomplexのホモロジーを計算することにより，$H^n(Q_t, {}_\psi\Lambda)$の加群の構造が得られる．

Proposition 3. *$H^n(Q_t, {}_\psi\Lambda)$の$\mathbb{Z}$-加群としての構造は次の通り:*

$$H^n(Q_t, {}_\psi\Lambda) = \begin{cases}
\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}x^t \oplus \bigoplus_{i=1}^{t-1} \mathbb{Z}\,(x^i + x^{-i}) \oplus \mathbb{Z}My \oplus \mathbb{Z}Mxy & \text{for} \quad n = 0, \\[1ex]
\begin{aligned} &\mathbb{Z}/4t \oplus \mathbb{Z}x^t/4t \oplus \bigoplus_{i=1}^{t-1} \mathbb{Z}\left(x^i + x^{-i}\right)/2t \\ &\qquad \oplus \mathbb{Z}My/4 \oplus \mathbb{Z}Mxy/4 \end{aligned} & \text{for} \quad n \equiv 0 \mod 4, \quad n \neq 0, \\[1ex]
0 & \text{for} \quad n \equiv 1 \mod 4, \\[1ex]
\begin{cases}
\begin{aligned} &\mathbb{Z}(1,0)/2 \oplus \mathbb{Z}(0,1)/2 \oplus \mathbb{Z}(x^t,0)/2 \\ &\oplus \mathbb{Z}(0,x^t)/2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{t-1} \mathbb{Z}\,(x^i, 0)/2t \\ &\oplus \mathbb{Z}(y,y)/4 \oplus \mathbb{Z}(0,xy)/4 \end{aligned} & \text{for} \quad n \equiv 2 \mod 4,\ t \text{ even}, \\[1ex]
\begin{aligned} &\mathbb{Z}\left(\tfrac{t-1}{2}, 1\right)/4 \oplus \mathbb{Z}\left(\tfrac{t-1}{2}x^t, x^t\right)/4 \\ &\oplus \bigoplus_{i=1}^{t-1} \mathbb{Z}\,(x^i, 0)/2t \oplus \mathbb{Z}(y,y)/4 \\ &\oplus \mathbb{Z}(0,xy)/4 \end{aligned} & \text{for} \quad n \equiv 2 \mod 4,\ t \text{ odd},
\end{cases} \\[1ex]
0 & \text{for} \quad n \equiv 3 \mod 4.
\end{cases}$$

次に，これらの生成元が代表する元の cup 積を計算する．ここでは t が偶数の場合を考える．$H^0(Q_t, {}_\psi\Lambda)$ の生成元を次のようにおく:

$$A_0 = 1,\ B_0 = x^t,\ (C_i)_0 = x^i + x^{-i} \quad (1 \leq i < t),$$
$$D_0 = My,\ E_0 = Mxy.$$

ここで，A_0 は $H^*(Q_t, {}_\psi\Lambda)$ の単位元である．まず，これらの元の cup 積を計算する．特に，$H^0(Q_t, {}_\psi\Lambda)$ における cup 積は Λ の中心 $Z(\Lambda)$ における通常の積に一致する．そして，$H^2(Q_t, {}_\psi\Lambda)$ の生成元を次のようにおく:

$$(A_\alpha)_2 = (1,0),\ (A_\beta)_2 = (0,1),\ (B_\alpha)_2 = (x^t,0),\ (B_\beta)_2 = (0,x^t),$$
$$(C_i)_2 = \left(x^i, 0\right) \quad (1 \leq i < t),\ D_2 = (y,y),\ E_2 = (0,xy).$$

$H^0(Q_t, {}_\psi\Lambda)$ の生成元と，$H^2(Q_t, {}_\psi\Lambda)$ の生成元の cup 積は次の写像の合成によって計算できる:

$$\begin{aligned}\Lambda \otimes \Lambda^2 &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Lambda(Y_0, {}_\psi\Lambda) \otimes \mathrm{Hom}_\Lambda(Y_2, {}_\psi\Lambda)\\ &\xrightarrow{(\Delta_Y)^{\#}_{0,2}} \mathrm{Hom}_\Lambda\left(Y_2, {}_\psi\Lambda \otimes {}_\psi\Lambda\right)\\ &\xrightarrow{\text{natural}} \mathrm{Hom}_\Lambda\left(Y_2, {}_\psi\Lambda\right)\\ &\xrightarrow{\sim} \Lambda^2.\end{aligned}$$

ここで，$(\Delta_Y)^{\#}$ は周期 4 の resolution 上の diagonal approximation Δ_Y から誘導される写像を表す．

そして，$\mathbb{Z}$ は $\Lambda = \mathbb{Z}Q_t$ の Q_t-加群としての直和因子に同型であることから，埋め込み写像 $\mathbb{Z} \to {}_\psi\Lambda$ は complete cohomology 環の間の単射を引き起こす:

$$\hat{H}^*(Q_t, \mathbb{Z}) := \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} \hat{H}^r(Q_t, \mathbb{Z}) \to \hat{H}^*(Q_t, {}_\psi\Lambda) := \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} \hat{H}^r(Q_t, {}_\psi\Lambda).$$

$H^4(Q_t, {}_\psi\Lambda)$ の生成元 1 を A_4 とおくと，A_4 は $H^4(Q_t, \mathbb{Z})$ の位数 $4t$ の元 (complete cohomology 環における可逆元) の像であることが分かる．したがって，A_4 も $\hat{H}^*(Q_t, {}_\psi\Lambda)$ における可逆元となる．A_4 との cup 積は periodicity isomorphism

$$A_4 \smile - : H^r(Q_t, {}_\psi\Lambda) \xrightarrow{\sim} H^{r+4}(Q_t, {}_\psi\Lambda) \qquad (r \geq 0)$$

を引き起こす．また，$H^4(Q_t, {}_\psi\Lambda)$ の元は A_4 と $H^0(Q_t, {}_\psi\Lambda)$ の元 $A_0, B_0, (C_i)_0$ $(1 \leq i < t), D_0, E_0$ によって表示することができるので，$H^2(Q_t, {}_\psi\Lambda)$ の生成元の積との関係が得られる．以上をまとめることによって次の定理を得た．(t が奇数のときも同様に計算することができる)

Theorem 1. Q_t を位数 $4t$ の一般四元数群とし $\Lambda = \mathbb{Z}Q_t$ とおく．

(i) t が偶数のとき，$H^*(Q_t, {}_\psi\Lambda)(\simeq HH^*(\Lambda))$ は *commutative* であり，$\mathbb{Z}$ 上次の元で生成される．

$H^0(Q_t, {}_\psi\Lambda)$	$A_0,\ B_0,\ (C_i)_0,\ D_0,\ E_0,$	$(1 \le i < t)$
$H^2(Q_t, {}_\psi\Lambda)$	$(A_\alpha)_2,\ (A_\beta)_2,\ (B_\alpha)_2,\ (B_\beta)_2,\ (C_i)_2,\ D_2,\ E_2,$	$(1 \le i < t)$
$H^4(Q_t, {}_\psi\Lambda)$	A_4	

特に，$H^{4k+l}(Q_t, {}_\psi\Lambda)$ の元は $(A_4)^k X_l \quad (X_l \in H^l(Q_t, {}_\psi\Lambda),\quad l = 0, 2)$ の形で表示できる．ただし，A_0 は単位元を表す．(生成元の間の関係式は省略)

(ii) t が奇数のとき，$H^*(Q_t, {}_\psi\Lambda)(\simeq HH^*(\Lambda))$ は *commutative* であり，$\mathbb{Z}$ 上次の元で生成される．

$H^0(Q_t, {}_\psi\Lambda)$	$A_0,\ B_0,\ (C_i)_0,\ D_0,\ E_0,$	$(1 \le i < t)$
$H^2(Q_t, {}_\psi\Lambda)$	$A_2,\ B_2,\ (C_i)_2,\ D_2,\ E_2,$	$(1 \le i < t)$
$H^4(Q_t, {}_\psi\Lambda)$	A_4	

特に，$H^{4k+l}(Q_t, {}_\psi\Lambda)$ の元は $(A_4)^k X_l \quad (X_l \in H^l(Q_t, {}_\psi\Lambda),\quad l = 0, 2)$ の形で表示できる．ただし，A_0 は単位元を表す．(生成元の間の関係式は省略)

また，cohomology 環の間の単射 $H^*(Q_t, \mathbb{Z}) \to H^*(Q_t, {}_\psi\Lambda)$ による $H^*(Q_t, \mathbb{Z})$ の元の像を考えることにより，cohomology 環 $H^*(Q_t, \mathbb{Z})$ の正確な記述も得ることができる:

Theorem 2. (i) t が偶数のとき，

$$H^*(Q_t, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}[A, B, C]/(2A, 2B, 4tC, A^2, B^2 - 2tC, AB - 2tC), & t \equiv 0 \mod 4, \\ \mathbb{Z}[A, B, C]/(2A, 2B, 4tC, A^2, B^2, AB - 2tC), & t \equiv 2 \mod 4. \end{cases}$$

ただし，$\deg A = \deg B = 2,\ \deg C = 4$ とする．
(ii) t が奇数のとき，

$$H^*(Q_t, \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}[X, Y]/(4X, 4tY, X^2 - tY), & t \equiv 1 \mod 4, \\ \mathbb{Z}[X, Y]/(4X, 4tY, X^2 - 3tY), & t \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

ただし，$\deg X = 2,\ \deg Y = 4$ とする．

なお，$t = 2^r$ のときは，$H^*(Q_{2^r}, \mathbb{Z})$ の構造はよく知られている (例えば [11] 参照)．

2.3. Hochschild cohomology 環 $H^*(\mathbb{Z}Q_{2^r}, \Gamma)$

この Section では，$t = 2^r$ $(r \ge 2)$ の場合に，$\mathbb{Q}Q_{2^r}$ のある単純成分の order Γ を係数加群とする，$\Lambda = \mathbb{Z}Q_{2^r}$ の Hochschild cohomology 環 $H^*(\Lambda, \Gamma) := \bigoplus_{n \ge 0} H^n(\Lambda, \Gamma)$ の構造を決定する ($r = 1$ のときは，[9] 参照)．その計算は §2.2 と同様な方法による．

$e = (1 - x^{2^r})/2$ は $\mathbb{Q}Q_{2^r}$ の中心的ベキ等元であり，$\zeta = xe$ とおくと，$\mathbb{Q}Q_{2^r}e$ は $K := \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ 上の quaternion algebra となる: $\mathbb{Q}Q_{2^r}e = K \oplus Ki \oplus Kj \oplus Kij \quad (i = x^{2^{r-1}}e,\ j =$

$ye)$. $R=\mathbb{Z}[\zeta+\zeta^{-1}]$, $\Lambda=\mathbb{Z}Q_{2^r}$ とおくと，$\Gamma:=\Lambda e=R\oplus R\zeta\oplus Rj\oplus R\zeta j$ は $\mathbb{Q}Q_{2^r}e$ の R-order となる．環準同型写像 $\psi:\Lambda\to\Gamma^e; x\mapsto\zeta\otimes(\zeta^{-1})^\circ, y\mapsto j\otimes(j^{-1})^\circ$ により Γ^e-加群 Γ を Q_{2^r}-加群とみなし，それを ${}_\psi\Gamma$ と記す．このとき環同型

$$H^*(\Lambda,\Gamma):=\bigoplus_{n\geq 0}H^n(\Lambda,\Gamma)\xrightarrow{\sim}H^*(Q_{2^r},{}_\psi\Gamma):=\bigoplus_{n\geq 0}H^n(Q_{2^r},{}_\psi\Gamma)$$

の右辺における加群としての生成元を，周期4の resolution を用いて計算し，それらの間の cup 積を周期4の resolution 上の diagonal approximation によって計算することにより，$H^*(\Lambda,\Gamma)$ の構造を決定する．さらに，$(\zeta+\zeta^{-1})^2$ は R において $2e$ の約数になることから，([5, Lemma 1] 参照) $\eta=2e/(\zeta+\zeta^{-1})\in R$ とおく．

§2.2 と同様に，周期4の resolution (Y,δ) に functor $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,{}_\psi\Gamma)$ をほどこし，さらに同型 $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,{}_\psi\Gamma)\simeq\Gamma$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^2,{}_\psi\Gamma)\simeq\Gamma^2$ を通して，次の complex が得られる:

$$\begin{aligned}
&\big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Y,{}_\psi\Gamma),\delta^\#\big):0\to\Gamma\xrightarrow{\delta_1^\#}\Gamma^2\xrightarrow{\delta_2^\#}\Gamma^2\xrightarrow{\delta_3^\#}\Gamma\xrightarrow{\delta_4^\#}\Gamma\to\cdots,\\
&\quad\delta_1^\#(\gamma)=((x-1)\gamma,(y-1)\gamma),\\
&\quad\delta_2^\#(\gamma_1,\gamma_2)=(L\gamma_1-(y+1)\gamma_2,(xy+1)\gamma_1+(x-1)\gamma_2),\\
&\quad\delta_3^\#(\gamma_1,\gamma_2)=(x-1)\gamma_1-(xy-1)\gamma_2,\\
&\quad\delta_4^\#(\gamma)=N\gamma.
\end{aligned}$$

この complex のホモロジーを具体的に計算することにより，$H^n(Q_{2^r},{}_\psi\Gamma)$ の加群の構造が得られる．

Proposition 4. $H^n(Q_{2^r},{}_\psi\Gamma)$ の R-加群としての構造は次の通り:

$$H^n(Q_{2^r},{}_\psi\Gamma)$$
$$=\begin{cases}
R & \textit{for}\quad n=0,\\
R/2^{r+1}(\zeta+\zeta^{-1}) & \textit{for}\quad n\equiv 0\mod 4,\ n\neq 0,\\
R(\zeta j-\eta j,0)/(\zeta+\zeta^{-1})\oplus R(0,e-\eta\zeta)/(\zeta+\zeta^{-1}) & \\
\qquad\oplus R(j-\eta\zeta j,j-\eta\zeta j)/(\zeta+\zeta^{-1}) & \textit{for}\quad n\equiv 1\mod 4,\\
R(2^{r-1}\eta\zeta,e)/(\zeta+\zeta^{-1})\oplus R(e,0)/(\zeta+\zeta^{-1}) & \\
\qquad\oplus R(\zeta,0)/2^r\eta\oplus R(j,j)/(\zeta+\zeta^{-1}) & \\
\qquad\oplus R(0,\zeta j)/(\zeta+\zeta^{-1}) & \textit{for}\quad n\equiv 2\mod 4,\\
R(e-\eta\zeta)/(\zeta+\zeta^{-1})\oplus Rj/(\zeta+\zeta^{-1})(e-\eta^2) & \\
\qquad\oplus R(\zeta j-\eta j)/(\zeta+\zeta^{-1}) & \textit{for}\quad n\equiv 3\mod 4.
\end{cases}$$

次に，これらの加群の生成元の cup 積を計算する．$H^1(Q_{2^r},{}_\psi\Gamma)$ の生成元を次のようにおく:

$$A=(\zeta j-\eta j,0),\ B=(0,e-\eta\zeta),\ C=(j-\eta\zeta j,j-\eta\zeta j).$$

これらの生成元の cup 積を周期 4 の resolution 上の diagonal approximation を用いて計算する．以下の写像の合成によって cup 積が計算できる:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2 \otimes \Gamma^2 &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Lambda(Y_1, {}_\psi\Gamma) \otimes \mathrm{Hom}_\Lambda(Y_1, {}_\psi\Gamma) \\
&\xrightarrow{(\Delta_Y)^\#_{1,1}} \mathrm{Hom}_\Lambda(Y_2, {}_\psi\Gamma \otimes {}_\psi\Gamma) \\
&\xrightarrow{\text{natural}} \mathrm{Hom}_\Lambda(Y_2, {}_\psi\Gamma) \\
&\xrightarrow{\sim} \Gamma^2.
\end{aligned}
$$

まず，A, B, C の cup 積を計算し，2 次元のものを表示すると次の通りである:

$$
\begin{gathered}
A^2 = (2^{r-1}\eta\zeta, e), \quad B^2 = (e, 0), \quad C^2 = (2^{r-1}\eta\zeta, e) + (e, 0), \\
AB = BA = (0, \zeta j), \quad AC = CA = 2^{r-1}\eta^2(\zeta, 0), \quad BC = CB = (j, j).
\end{gathered}
$$

ここで，$H^2(Q_{2^r}, {}_\psi\Gamma)$ の元は，$(\zeta, 0)$ が代表する元を除いて A, B, C の積により表示される．また，$H^2(Q_{2^r}, {}_\psi\Gamma)$ において $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ なる関係式が成立する．$H^2(Q_{2^r}, {}_\psi\Gamma)$ の $(\zeta, 0)$ が代表する元を D とおく．A, B, C, D の cup 積を計算し，3 次元のものを全て表示すると次の通りである:

$$
\begin{gathered}
A^2C = AC^2 = B^3 = ABC = BD = DB = 0, \\
A^2B = BC^2 = e - \eta\zeta, \quad C^3 = B^2C = AD = DA = (e - \eta^2)j, \\
A^3 = AB^2 = CD = DC = \zeta j - \eta j.
\end{gathered}
$$

$r = 2$ のときは，$H^3(Q_4, {}_\psi\Gamma)$ の元は全て A, B, C, D の積によって表示される．$r > 2$ のときは，$H^3(Q_{2^r}, {}_\psi\Gamma)$ の元は，j が代表する元を除いて A, B, C, D の積によって表示される．ここで，$H^3(Q_{2^r}, {}_\psi\Gamma)$ において j が代表する元を E とおくと，$H^4(Q_{2^r}, {}_\psi\Gamma)$ において次の関係式が成立する:

$$
\begin{gathered}
A^4 (= A^2B^2 = B^2C^2 = C^4 = ACD) = CE = EC = 2^{r+1}e, \\
D^2 = \left(\zeta + \zeta^{-1}\right)^2 - 4e, \ AE = EA = BE = EB = 0.
\end{gathered}
$$

以下，$H^4(Q_{2^r}, {}_\psi\Gamma)$ において e が代表する元を F とおく．このとき，$H^4(Q_{2^r}, {}_\psi\Gamma)$ において $A^4 = 2^{r+1}F$ 及び $D^2 = ((\zeta + \zeta^{-1})^2 - 4)F$ が成立する．

ここで，埋め込み写像 $\mathbb{Z} \to {}_\psi\Gamma; 1 \mapsto e$ は complete cohomology 環の間の単射を引き起こす:

$$
\hat{H}^*(Q_{2^r}, \mathbb{Z}) := \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \hat{H}^r(Q_{2^r}, \mathbb{Z}) \to \hat{H}^*(Q_{2^r}, {}_\psi\Gamma) := \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \hat{H}^r(Q_{2^r}, {}_\psi\Gamma).
$$

F は $H^4(Q_{2^r}, \mathbb{Z})$ の生成元, すなわち complete cohomology 環 $\hat{H}^*(Q_{2^r}, \mathbb{Z})$ における可逆元の像であることが分かるので，F も $\hat{H}^*(Q_{2^r}, \mathbb{Z})$ において可逆元であることが分かる．さらに，$H^5(Q_{2^r}, {}_\psi\Gamma)$ において等式 $DE = ED = (0, 0)$ が，$H^6(Q_{2^r}, {}_\psi\Gamma)$ において等式 $E^2 = (0, 0)$ が成立する．以上の生成元の間の関係式をまとめることにより，$H^*(\Lambda, \Gamma) (\simeq H^*(Q_{2^r}, {}_\psi\Gamma))$ の環構造が得られる:

Theorem 3. (i) $r=2$ のとき ($R=\mathbb{Z}[\sqrt{2}e]$),

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{Z}Q_4,\Gamma) \simeq R[A,B,C,D,F]/(&\sqrt{2}A,\sqrt{2}B,\sqrt{2}C,4\sqrt{2}D,8\sqrt{2}F,\\ &A^2+B^2+C^2, AC-4D,\\ &A^2C, AC^2, B^3, ABC, BD,\\ &A^4-8F, D^2+2F). \end{aligned}$$

ただし，$\deg A=\deg B=\deg C=1$, $\deg D=2$, $\deg F=4$ とする.

(ii) $r>2$ のとき ($R=\mathbb{Z}[\zeta+\zeta^{-1}]$),

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{Z}Q_{2^r},\Gamma) \simeq R[A,B,C,D,E,F]/(&(\zeta+\zeta^{-1})A,(\zeta+\zeta^{-1})B,(\zeta+\zeta^{-1})C,\\ &2^r\eta D,(e-\eta^2)(\zeta+\zeta^{-1})E,2^{r+1}(\zeta+\zeta^{-1})F,\\ &A^2+B^2+C^2, AC-2^{r-1}\eta^2 D,\\ &A^2C, AC^2, B^3, ABC, BD, A^4-2^{r+1}F,\\ &D^2+\left(4-(\zeta+\zeta^{-1})^2\right)F, DE, E^2). \end{aligned}$$

ただし，$\eta=2e/(\zeta+\zeta^{-1})$, $\deg A=\deg B=\deg C=1$, $\deg D=2$, $\deg E=3$, $\deg F=4$ とする.

参考文献

[1] D. J. Benson, *Representations and cohomology II: cohomology of groups and modules*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[2] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton NJ, 1956.

[3] C. Cibils and A. Solotar, *Hochschild cohomology algebra of abelian groups*, Arch. Math. **68** (1997), 17–21.

[4] T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of the integral group ring of the generalized quaternion group*, SUT J. Math. **38** (2002), 83 126.

[5] T. Hayami and K. Sanada, *Cohomology ring of the generalized quaternion group with coefficients in an order*, Comm. Algebra **30** (2002), 3611–3628.

[6] G. Hochschild, *On the Cohomology Groups of an Associative Algebra*, Ann. of Math. **46** (1945), 58–67.

[7] T. Holm, *The Hochschild cohomology ring of a modular group algebra: the commutative case*, Comm. Algebra **24** (1996), 1957–1969.

[8] S. MacLane, *Homology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1975.

[9] K. Sanada, *Remarks on cohomology rings of the quaternion group and the quaternion algebra*, SUT J. Math. **31** (1995), 85 92.

[10] S. F. Siegel and S. J. Witherspoon, *The Hochschild cohomology ring of a group algebra*, Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), 131 157.

[11] C. B. Thomas, *Characteristic classes and the cohomology of finite groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.