数理解析研究所講究録 1327 巻 2003 年 47-54

Fisher 行列と (n+1,m+1) 型超幾何関数

Fischer Matrices and $(n+1, m+1)$-Hypergeometric Functions

水川裕司 (Hiroshi Mizukawa)

北海道大学自然科学研究科
Division of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 060-0810, Japan *
e-mail: `mzh@math.okayama-u.ac.jp`

1 目的

この報告の目的は環積の指標と多変数の超幾何関数の関係を探ることである．その一つの手段として Fischer 行列なるものを考えてゆく．

Fischer 行列とは，B. Fischer が有限群 G, N に対して N の G による拡大の既約指標を計算するために導入された物である [6].

その典型的な場合として環積が上げられるが，このケースにおいては List-Mahnoud がその計算法について調べている [10].

そして Almestady-Morris がとくに複素鏡映群の場合でこれに関し，組合せ論的な側面の研究をしている [2].

ここでの我々の目標は環積の場合にこの Fischer 行列を用い指標を計算することで多変数の超幾何関数型の直交多項式を見つけることである．

そして，多変数の超幾何関数と環積のなすゲルファントペアに関しては，[1, 12, 13] などで調べられている．

ここで扱う超幾何関数は次で定義されるものである．

Definition 1.1. **$(n+1, m+1)$-hypergeometric functions**
$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_{m-n-1}) \in \mathbb{C}^{m-n-1}$ そして変数を $X = (x_{ij})_{\substack{1 \le i \le n, \\ 1 \le j \le m-n-1}}$ と置く．このとき

$$F(\alpha, \beta; \gamma; X) = \sum_{(a_{ij}) \in M_{n,m-n-1}(\mathbf{N}_0)} \frac{\prod_{i=1}^{n} (\alpha_i)_{\sum_{j=1}^{m-n-1} a_{ij}} \prod_{i=1}^{m-n-1} (\beta_i)_{\sum_{j=1}^{n} a_{ji}}}{(\gamma)_{\sum_{i,j} a_{ij}}} \frac{\prod x_{ij}^{a_{ij}}}{\prod a_{ij}!}.$$

を $(n+1, m+1)$ 型超幾何関数とよぶ．

---

*Current Address : Department of Mathematics, Faculty of Science, Okayama University, Okayama 700-8530, Japan

2 環積の共役類

まずは環積の定義から始める．G を有限群，S_n を n 次の対称群とする．このとき対称群は G の n 個の直積に順番の入れ換えで作用する；すなわち，$\sigma \in S_n$ そして，$(g_1, g_2, \cdots, g_n) \in G^n$ と置いたとき作用 θ を，

$$\theta(\sigma) \cdot (g_1, g_2, \cdots, g_n) = (g_{\sigma^{-1}(1)}, g_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, g_{\sigma^{-1}(n)})$$

と定める．この作用から作られる半直積群を

$$G \wr G_n = G^n \rtimes_\theta S_n$$

とかく．

さて，これから $G \wr S_n$ の共役類の記述を説明しよう [9, 11]．以下，$G_* = \{C_j\ ;\ 0 \leq j \leq c-1\}$ を G の共役類全体．$G^* = \{\chi_j\ ;\ 0 \leq j \leq c-1\}$ を G の既約指標全体とする．$G \wr S_n$ の元を一つ固定する．

$$(g_1, \cdots, g_n; \sigma) \in G \wr S_n,\ g_i \in G\ (1 \leq i \leq n),\ \sigma \in S_n.$$

さらに σ を巡回置換分解しておく．

$$\sigma = \cdots(\cdots)(i_1, i_2, \cdots, i_k)(\cdots)\cdots$$

この各サイクルごとに次のように G の元の積を作る．

$$(i_1, i_2, \cdots, i_k) \to g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_k}$$

これを $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ の**サイクル積**という．ここで，$m_k(C_i)$ を
σ の長さ k のサイクルのうち，そのサイクル積が共役類 C_i に入るものの個数,
とする．そしてこれを k の重複度として持つような分割を

$$\rho(C_i) = (1^{m_1(C_i)} 2^{m_2(C_i)} \ldots k^{m_k(C_i)} \ldots)$$

定義する．このようにして $(g_1, \cdots, g_n; \sigma) \in G \wr S_n$ にたいして c 個（これは共役類の数であった）の分割の組

$$\rho = (\rho(C_0); \rho(C_1); \cdots; \rho(C_{c-1}))$$

が得られた．これを $(g_1, \cdots, g_n; \sigma) \in G \wr S_n$ の**タイプ**と呼ぶ．このとき次が成り立つ．

Proposition 2.1. $G \wr S_n$ の元 x と y が共役であることの必要十分条件は x と y のタイプが一致することである．

ここで,

$$\sum_{i=0}^{c-1} |\rho(C_i)| = n$$

に注意しておく．

3 環積のFischer行列

ここでは，Fischer 行列を導入する．

いま，G^n の既約指標 χ に対して，$G \wr S_n$ の作用を $\chi^g(x) = \chi(gxg^{-1})$, $g \in G \wr S_n$, $x \in G^n$ で定義しておく．この作用による $G \wr S_n$-軌道の代表元は次のように書けることが容易にわかるであろう；

$$\{\chi_0^{k_0}\chi_1^{k_1}\cdots\chi_{c-1}^{k_{c-1}}\ ;\ \sum_{i=0}^{c-1} k_i = n\}$$

ここで $G^* = \{\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_{c-1}\}$ とした．inertia group とは

$$I_\chi = \{g \in G \wr S_n\ ;\ \chi^g = \chi\}$$

で定義される $G \wr S_n$ の部分群である．

さらに，いま $\chi = \chi_0^{k_0}\chi_1^{k_1}\cdots\chi_{c-1}^{k_{c-1}}$ と置くと，

$$I_\chi \cong \prod_{i=0}^{c-1} G \wr S_{k_i}$$

である．また，

$$\bar{I_\chi} = I_\chi/G^n \cong \prod_{i=0}^{c-1} S_{k_i}$$

と置く．

以下少し面倒くさいが，必要な記号を用意する．

- K … S_n の共役類
- $\{K_1, K_2, \cdots, K_t\}$ … $G \wr S_n$ の共役類のうち自然な projection で K に入るもの
- $\{L_1, L_2, \cdots, L_s\}$ … $\bar{I_\chi}$ の共役類のうち K に含まれるもの，ここで $\bar{I_\chi}$ は S_n の部分群と見ている．
- $\{L_{ji}\}$ … L_{ji} を I_χ の共役類のうち共役類のうち自然な projection で L_i に入るもので定義

$$\begin{array}{ccccc} G \wr S_n & \xrightarrow{\text{p}} & S_n \supset \bar{I_\chi} & \xleftarrow{\text{p}} & I_\chi \\ K_* & \xrightarrow{\text{p}} & K \supset L_* & \xleftarrow{\text{p}} & L_{**} \end{array}$$

そして以下のように元を取っておこう．

$$u \in K_m,\ \tilde{u}_i \in L_i,\ u_{ij} \in L_{ij}$$

そして，β を $\bar{I_\eta}$ の既約指標，$\hat{\eta}$ を η の I_η への extension とする．このとき，$G \wr S_n$ の既約指標は全て $\hat{\eta}\beta\uparrow$ の形をしており，次のように計算できる．

$$\begin{aligned} \hat{\eta}\beta\uparrow(u) &= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j}\frac{|C_{G\wr S_n}(u)|}{|C_{I_\eta}(u_{ij})|}(\hat{\eta}\beta)(u_{ji}) \\ &= \sum_{i=1}^{s}(\sum_{j}\frac{|C_{G\wr S_n}(u)|}{|C_{I_\eta}(u_{ji})|}\hat{\eta}(u_{ji}))\beta(\tilde{u}_i) \end{aligned}$$

ーー、

$$\phi_{im} = \sum_j \frac{|C_{G\wr S_n}(u)|}{|C_{I_\eta}(u_{ji})|}\hat{\eta}(u_{ji})$$

と置こう (注：m は K_m から，i は L_i から来ている)．さらに行列 F_η^K を

$$F_\eta^K = (\phi_{ij})_{1\le i\le s, 1\le j\le t}$$

と定義する．そして，G^n の既約指標の $G\wr S_n$ 軌道の代表系を簡単のために $\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_\ell\}$ としておく．これで準備が整った．

Definition 3.1. 行列 F^K を

$$F^K = \begin{pmatrix} F_{\eta_1}^K \\ F_{\eta_2}^K \\ \vdots \\ F_{\eta_\ell}^K \end{pmatrix}$$

で定義し，**Fischer 行列**と呼ぶ．

4 Fischer 行列の計算，超幾何関数

さて，これからまずは $K = (1^n)$ つまり単位元からなる共役類について Fischer 行列を計算していこう．

$\eta = \chi_0^{k_0}\chi_1^{k_1}\cdots\chi_{c-1}^{k_{c-1}}$ として，$\bar{I}_\eta = S_{k_0}\times S_{k_1}\times\cdots\times S_{k_{c-1}}$ であることに注意．まず，上の $\{K_i\}$ に相当するものは，前章で紹介した共役類の定義から，

$$\{(1^{\ell_0}; 1^{\ell_1}; \cdots; 1^{\ell_{c-1}}) \mid \sum_{i=0}^{c-1}\ell_i = n\}$$

である事がわかるだろう，なぜなら，$(1^{\ell_0}; 1^{\ell_1}; \cdots; 1^{\ell_{c-1}})$ の意味するところは，$G\wr S_n$ の元で言うと，$(g_0, g_1, \cdots, g_{c-1}; 1)$ の形で，$\ell_i = \sharp\{g_i \in C_i\}$ のものだからである．

また，$\eta = \chi_0^{k_0}\chi_1^{k_1}\cdots\chi_{c-1}^{k_{c-1}}$ なので，上記の L_i に相当するものは $\bar{I}_\eta$ の単位元からなる共役類

$$(1^{k_0}, 1^{k_1}, \cdots, 1^{k_{c-1}})$$

である．最後に上記 $\{L_{ji}\}$ に当たる物の計算をしよう．始めに答えを書くと，

$$\{(1^{a_{00}}, 1^{a_{10}}, \cdots, 1^{a_{c-10}}) : (1^{a_{01}}, 1^{a_{11}}, \cdots, 1^{a_{c-11}})0 : \cdots : (1^{a_{0c-1}}, 1^{a_{1c-1}}, \cdots, 1^{a_{c-1c-1}})\ ; *\}$$

ここで，$* = \sum_{i=0}^{c-1} a_{ij} = k_j, \sum_{j=0}^{c-1} a_{ij} = \ell_i$，$\sum_{i=0}^{c-1}\ell_i = n$ である．なぜなら，条件 $\sum_{i=0}^{c-1} a_{ij} = k_j$ は，$\{K_i\}$ の時と同じで，条件 $\sum_{j=0}^{c-1} a_{ij} = \ell_i$，$\sum_{i=0}^{c-1}\ell_i = n$ は，これが，上で決めた $G\wr S_n$ の共役類 $(1^{\ell_0}; 1^{\ell_1}; \cdots; 1^{\ell_{c-1}})$ に含まれてい無いといけないから．

これらによってパラメーターを上の $\ell_i, k_i,\ 0 \le i \le c-1$ を用いて Fischer 行列は

$$F^{(1^n)} = (\phi_{(k_0,k_1,\cdots,k_{c-1}),(\ell_0,\ell_1,\cdots,\ell_{c-1})})_{\sum k_i=\sum \ell_i=n}$$

と書ける.

さて，これより行列の要素の計算をしよう．必要な量はすべて Macdonald の本 [11] の一章の Appendix B に書いてあるので，導出についてはそちらを見ていただきたい．以下 $\chi_{ji}=\chi_j(g_i)$, $g_i \in C_i$ とし，"一般化された魔方陣"を

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(k_0,k_1,\ldots,k_m)}_{(\ell_0,\ell_1,\ldots,\ell_m)} = \left\{a=(a_{ij}) \in M(m+1,\mathbb{N}_0); \sum_{i=0}^{m} a_{ij} = k_j, \sum_{j=0}^{m} a_{ij} = \ell_i\right\}$$

としておく．

$$\phi_{(k_0,k_1,\cdots,k_{c-1}),(\ell_0,\ell_1,\cdots,\ell_{c-1})} = \sum_{A\in\mathcal{A}} \prod_{i=0}^{c-1} \binom{\ell_i}{a_{i0}, a_{i1}, \cdots, a_{ic-1}} \prod_{j=0}^{c-1} \chi_{j0}^{a_{0j}} \chi_{j1}^{a_{1j}} \cdots \chi_{jc-1}^{a_{c-1j}}$$

ここで，さらに G の指標表にその次数の逆数からなる対角行列を書けたものを

$$\tilde{T}(G) = (\chi_{ji}/\chi_{j1})$$

ただし $\chi_{j1}=\chi_j(1)$, と置く．するとこれは次のように書ける（この計算は文献 [12] 参照）．

$$\prod_{i=0}^{c-1} \chi_{i1}^{k_i} \times \binom{n}{k_0, \cdots, k_{c-1}} F((-k_0,-k_1,\cdots,-k_{c-1}),(-\ell_0,-\ell_1,\cdots,-\ell_{c-1}) : -n | J_c - \tilde{T}(G)).$$

これで $(c,2c)$-超幾何関数が出てきた．

これの直交性について見てみよう．まずは具体例を $S_3 \wr S_2$ で見よう．

$$\tilde{T}(S_3) = \begin{array}{c|ccc} & (1^3) & (2,1) & (3) \\ \hline (3) & 1 & 1 & 1 \\ (2,1) & 1 & 0 & -1/2 \\ (1^3) & 1 & -1 & 1 \end{array}.$$

さらに，既約表現と対応する inertia group は (x,y,z) でそれぞれ S_3 の既約表現 $(3),(2,1),(1^3)$ の重複度をあらわすことにして，

inertia gp.	(2,0,0)	(0,2,0)	(0,0,2)
	$((3)\otimes(3))\otimes(2)$	$((2,1)\otimes(2,1))\otimes(2)$	$((1^3)\otimes(1^3))\otimes(2)$
S_2	$((3)\otimes(3))\otimes(1^2)$	$((2,1)\otimes(2,1))\otimes(1^2)$	$((1^3)\otimes(1^3))\otimes(1^2)$

.

inertia gp.	(1,1,0)	(1,0,1)	(0,1,1)
$S_1 \times S_1$	$((3)\otimes(2,1))\otimes(1)\otimes(1)$	$((3)\otimes(1^3))\otimes(1)\otimes(1)$	$((2,1)\otimes(1^3))\otimes(1)\otimes(1)$

.

と書ける．これは[9] を見ていただきたい．そしてFischer行列を計算しよう．横に共役類 (ℓ_0,ℓ_1,ℓ_2) （$((1^3),(2,1),(3))$ の順），縦に表現 (k_0,k_1,k_2) （$((3),(2,1),(1^3))$ の順）を書くことにして，

	(2,0,0)	(0,2,0)	(0,0,2)	(1,1,0)	(1,0,1)	(0,1,1)
(2,0,0)	1	1	1	1	1	1
(0,2,0)	4	0	1	0	0	−2
(0,0,2)	1	1	1	−1	−1	1
(1,1,0)	4	0	−2	2	−1	1
(1,0,1)	4	0	−2	−2	1	1
(0,1,1)	2	2	2	0	0	2

となる．Fisher行列の要素の定義からこの表の各列に対応するinertia groupの次数を掛けて，“膨らました”ものが，$S_3 \wr S_2$ の前から6行分の指標表を与える．それを書いておこう

1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
4	0	1	0	0	−2
4	0	1	0	0	−2
1	1	1	−1	−1	1
1	1	1	−1	−1	1
4	0	−2	2	−1	1
4	0	−2	−2	1	1
2	2	2	0	0	2

これから第2直交関係を使うことで，超幾何の直交多項式が得られる．このストーリーを一般の場合に適用することで次の定理を得る．

Theorem 4.1.

$$\sum_{k_0+\cdots+k_{c-1}=n} (\chi_{01}^{k_0}\chi_{11}^{k_1}\cdots\chi_{c-11}^{k_{c-1}})^2 \binom{n}{k_0,\cdots,k_{c-1}} F(-k,-\ell;-n;\tilde{T}(G))\overline{F(-k,-\ell';-n;\tilde{T}(G))}$$

$$= \binom{n}{\ell_0,\cdots,\ell_{c-1}}^{-1} \frac{|G|^n}{\prod_{i=0}^{c-1}|C_i|^{\ell_i}}\delta_{\ell\ell'}.$$

ここで，$\ell=(\ell_0,\ell_1,\cdots,\ell_{c-1})$，$k=(k_0,k_1,\cdots,k_{c-1})$ などとした．

この定理は田中太初氏との共同研究[13] によって得られた帯球関数のケースで，ゲルファントペアを $(G\times G\wr S_n, \Delta G\wr S_n)$ としたときのものである．ただし，ここで $\Delta G=\{(g,g);g\in G\}$ である．

そして一般の場合 $K=(1^{a_1}2^{a_2}\cdots n^{a_n})$ の Fischer行列を計算であるが．この場合はList-Mahmoud[10] によって次がしられている．

Theorem 4.2.

$$F^{m^k}=F^{1^k}$$

$K=(1^{a_1}2^{a_2}\cdots n^{a_n})$ に対して，

$$F^K=F^{1^{a_1}}\otimes F^{1^{a_2}}\otimes\cdots\otimes F^{1^{a_n}}$$

最初の主張については前の計算より明らかであろう.

次の主張は何を言っているかであるが，我々の言葉で言うと**環積の指標は** $(n+1, m+1)$ **型超幾何関数で生成されている**. と言う事だろう，そしてこのことはもう少し検証されるべきで，ここからもうすこし大きいクラスの超幾何が捕まえられるかもしれない．しかし残念ながら現時点では明示的な結果は得られていない．これにトライするためにも最後に少しデータを与えて終わろう．

一般の場合に $\{K_*\}, \{L_*\}, \{L_{**}\}$ を求めてみよう，$K = (1^n)$ のケースを繰り返し適用することで次のようになっていることがわかるであろう．ただし，inertia group を $S_{k_0} \times \cdots \times S_{k_{c-1}}$ としている．

1: K_* について．
$\lambda^i = (1^{b_{i1}} 2^{b_{i2}} \cdots n^{b_{in}})$ とおくと

$$\{(\lambda^0; \lambda^1; \cdots; \lambda^{c-1}) | \sum_{j=0}^{c-1} b_{ij} = a_j\}$$

となる．

2: L_* について．
$\mu^i = (1^{a_{i1}} 2^{a_{i2}} \cdots n^{a_{in}})$ とおくと

$$\{(\mu^0, \mu^1, \cdots, \mu^{c-1}) | \sum_{i=0}^{c-1} a_{ij} = a_j, \sum_{j=0}^{c-1} j a_{ij} = k_i\}$$

となる．

3: L_{**} について．
$\nu^{ij} = (1^{p_{ij1}} 2^{p_{ij2}} \cdots n^{p_{ijn}}), \underline{\nu}^i = (\nu^{0j}; \cdots; \nu^{c-1j})$ とおくと

$$\{(\underline{\nu}^0, \underline{\nu}^1, \cdots, \underline{\nu}^{c-1}) | \sum_{i=0}^{c-1} p_{i\ell m} = a_{\ell m}, \sum_{i=0}^{c-1} p_{\ell i m} = b_{\ell m}\}$$

となる．

参考文献

[1] H. Akazawa and H. Mizukawa, *Orthogonal polynomials arising from the wreath products of dihedral group,* Preprint, 2002

[2] M. Almestady and A. Morris, Fischer matrices for generalised symmetric groups—a combinatorial approach, Adv. Math. 168 (2002), no. 1, 29-55

[3] K. Aomoto and M. Kita *Theory of Hypergeometric Functions(in Japanese),* Springer Tokyo, 1994

[4] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I. Association Schemes,* The Benjamin/Cummings Publishing Co. CA, 1984

[5] C. Dunkl, A Krawtchouk polynomial addition theorem and wreath products of symmetric groups, Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), no. 4, 335-358

[6] B. Fischer, Clifford-matrices, Representation theory of finite groups and finite-dimensional algebras (Bielefeld, 1991), 1–16, Progr. Math., 95, Birkhauser, Basel, 1991

[7] I. M. Gelfand, General theory of hypergeometric functions (in Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 288 (1986), no. 1, 14-18

[8] I. M. Gelfand and S. I. Gelfand, Generalized hypergeometric equations (in Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 288 (1986), no. 2, 279-283

[9] G. James and A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 16, 1981

[10] R. List and I. M. I. Mahmoud, Fischer matrices for wreath products $G, w, Ssbn$, Arch. Math. (Basel) 50 (1988), no. 5, 394-401

[11] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd. ed.* , Oxford, 1995

[12] H. Mizukawa, *Zonal spherical functions on the complex reflection groups and* $(n+1, m+1)$*-hypergeometric functions,* to appear in Adv. Math

[13] H. Mizukawa and H. Tanaka $(n+1, m+1)$*-hypergeometric functions associated to character algebra,* preprint 2003

[14] D. Stanton, Some q-Krawtchouk polynomials on Chevalley groups, Amer. J. Math. 102, 625-662 (1980), no. 4

[15] M. Yoshida, *Hypergeometric Functions, My Love. Modular Interpretations of Configuration Spaces.* Aspects of Mathematics, E32. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1997