数理解析研究所講究録 1327 巻 2003 年 66-75

From $O_{10}^{+}(2)$ to J_4

Alexander A. Ivanov

Imperial College,
180 Queen's Gate,
London SW7 2BZ, UK

本稿では 直交群 $O_{2n}^{+}(2)$ と Dual polar graph $D^{+}(2n,2)$ について述べる. さらに, 直交群 $O_{10}^{+}(2)$ と散在型単純群 J_4 の amalgam による特徴付けについて述べる.

本稿において, ベクトル空間は $\mathbb{F}_2$ 上で考える.

1 序

まず, 直交群 $O_{2n}^{+}(2)$ とそれに付随する Dual polar graph $D^{+}(2n,2)$ について述べる. いくつかの基本的な定義を与え, n が小さい場合について詳しく調べる. その後で amalgam の定義を述べることにする.

定義 1.1. V を $2n$ 次元の $\mathbb{F}_2$ 上のベクトル空間として, f を V 上の非退化 *symplectic* 双線型形式とする. 特に, $x \in V$ に対して $f(x,x)=0$ である. このとき, V から $\mathbb{F}_2$ への写像 Q で, $Q(x+y)=Q(x)+Q(y)+f(x,y)$ を満たすものを f に付随する二次形式と呼ぶ. V の非零元 x が $Q(x)=0$ を満たすときに x を等方的な元という.

注意 1.2. f に対して Q が存在するが一意には定まらない.

定義 1.3. V をベクトル空間として, Q を二次形式とする. V の部分空間 U が Q に関して等方部分空間であるとは任意の $x \in U$ に対して $Q(x)=0$ が成り立つことである. また, *Witt index* とは 極大な等方部分空間の次元である. V の次元を $2n$ としたとき, *Witt index* が n であるような Q を $+$ タイプ, $n-1$ であるような Q を $-$ タイプと呼ぶ.

Γ をグラフとしたとき, $V(\Gamma)$ で頂点集合を, $E(\Gamma)$ で辺集合を表すことにする.

定義 1.4. V を $\mathbb{F}_2$ 上の $2n$ 次元ベクトル空間, Q を $+$ タイプの二次形式とする. このとき, 頂点集合を極大な等方部分空間全体, 辺集合を $\{\{U,W\} \mid U,W \in V(\Gamma), \dim(U \cap W)=n-1\}$ として得られるグラフを *Dual polar graph* と呼び $D^{+}(2n,2)$ と表す.

V を $\mathbb{F}_2$ 上の $2n$ 次元ベクトル空間, Q を非退化 symplectic 双線型形式 f に付随する二次形式とする. $Sp(V,f)$ で V 上の正則な線型変換で f を保つもの全体のなす $GL(V)$ の部分群を表すとする. ただし, $g \in GL(V)$ が f を保つとは任意の $v, w \in V$ に対して $f(v,w) = f(v^g, w^g)$ が成り立つことである. V 上の非退化 symplectic 双線型形式は同型を除いて一つであり (注意 1.8 参照), よって $Sp(V,f) = Sp_{2n}(2)$ と書く. また, $O(V,Q)$ でベクトル空間 V 上の正則な線型変換で二次形式 Q を保つもの全体のなす $GL(V)$ の部分群を表すとする. ただし, $g \in GL(V)$ が Q を保つとは任意のの $x \in V$ に対して $Q(x) = Q(x^g)$ が成り立つことである. タイプが同じ二次形式 Q, Q' に対して $O(V,Q) \cong O(V,Q')$ であり (命題 1.7 参照), よって Q が ε タイプのときに $O(V,Q) = O_{2n}^{\varepsilon}(2)$ と書く. ここで, f の値は Q によって決まることから $O_{2n}^{\varepsilon}(2) \subseteq Sp_{2n}(2)$ を得る.

等方部分空間 U と $g \in O_{2n}^{\varepsilon}(2)$ に対して $U^g = \{u^g | \ u \in U\}$ も等方部分空間である. よって, G は Γ に自然に作用する. また, $\mathbb{F}_2$ 上のベクトル空間 V を考えているので $GL(V) \cong GL_{2n}(2) = SL_{2n}(2) \cong PSL_{2n}(2) \cong L_{2n}(2)$ である.

グラフ Δ に対して, いくつか言葉を定義する. $x, y \in \Delta$ に対して, x と y を結ぶ経路の最小の長さを $d_\Delta(x,y)$ で表し x と y の距離と呼ぶ. Δ の girth とは最小のサイクルの長さのことをいう. また, Δ の diameter を $\max\{d_\Delta(x,y) | \ x, y \in V(\Delta)\}$ と定義する. $x \in \Delta$, に対して, $\Delta_i(x) = \{y \in V(\Delta) | \ d_\Delta(x,y) = i\}$ とする. Δ が distance regular graph とは定数 b_i, c_i, $(i \geq 0)$ が存在し, 任意の $x \in \Delta$, $y \in \Delta_i(x)$ に対して次の関係式

$$b_i = |\Delta_1(y) \cap \Delta_{i+1}(x)|, \quad c_i = |\Delta_1(y) \cap \Delta_{i-1}(x)|,$$

を満たすことである. このとき, $a_i = |\Delta_1(y) \cap \Delta_i(x)|$ も x, y によらない定数である. 特に, Δ は valency $k = b_0$ をもつ regular graph になっている. ただし, regular graph とは各頂点から出ている辺の数が定数 (valency と呼ぶ) であるようなグラフである. また, $k_i = |\Delta_i(x)|$ に対し $k_{i+1} = k_i b_i / c_{i+1}$ が成立している. 一般に $D^+(2n,2)$ は distance regular graph であることが知られている (命題 2.1 参照).

$n = 1,2,3$ の場合に $O_{2n}^+(2)$ と $D^+(2n,2)$ を考察する. この章では以後, V を $\mathbb{F}_2$ 上の $2n$ 次元のベクトル空間, Q を非退化 symplectic 双線型形式 f に付随する二次形式とする.

$\underline{n=1 \text{ の場合}}$ V は 4 つの元の集合であり, $V = \{0, x, y, x+y\}$ とおく. f が symplectic なので, $v \in V$ に対して $f(v,v) = 0$ である. f が非退化であることから $f(x,y) = 1$ となり f の値が一意に決まる.

命題 1.5. $Sp_2(2) \cong L_2(2) \cong S_3$.

証明. $GL(V)$ は $\{x, y, x+y\}$ 上の置換群 S_3 と同型であり f も保つ. よって $GL(V) \cong L_2(2) \cong Sp_2(2) \cong S_3$ を得る. □

V 上の二次形式 Q は同型を除いて $Q(x) = Q(y) = Q(x+y) = 1$ となる $-$ タイプと, $Q(x) = Q(y) = 0$, $Q(x+y) = 1$ となる $+$ タイプの 2 通りだけであることがわかる. ε タイプの二次形式を持つ $\mathbb{F}_2$ 上の 2 次元ベクトル空間を B_2^{ε} と書く.

命題 1.6. $O_2^-(2) \cong Sp_2(2) \cong S_3$, $O_2^+(2) \cong S_2$.

証明. B_2^- の自己同型群は $Sp_2(2) \cong S_3$ であり, B_2^+ の自己同型群は x と y を置換する S_2 である. よって, $O_2^-(2) = S_3$, $O_2^+(2) = S_2$ である. □

2 次元ベクトル空間上の二次形式の分類を用いて $2n$ 次元ベクトル空間上の二次形式の分類をする.

命題 1.7. U を $\mathbb{F}_2$ 上の $2n$ 次元ベクトル空間とし, Q を非退化 *symplectic* 双線型形式 f に付随する二次形式とする. このとき, $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$, $\dim(U_i) = 2$ で $x \in U_i$, $y \in U_j$, $i \neq j$ に対して $f(x,y) = 0$ を満たす V の分解がある. さらに $U_i \cong B_2^+$ $(i < n)$, $U_n \cong B_2^+$ または $U_n \cong B_2^-$ となるような分解がある.

証明. $x \in U \setminus \{0\}$ をとる. f が非退化より $f(x,y) = 1$ となるような $y \in U$ がある. x, y が生成する 2 次元部分空間を U_1 とおく. このとき, f の U_1 上への制限 $f|_{U_1}$ は非退化で, Q の U_1 上への制限は $f|_{U_1}$ に付随する二次形式となっている. よって, $U_1 \cong B_2^+$ または $U_1 \cong B_2^-$ である. U_1 の直交補空間 $U_1^\perp$ を考えると, $f|_{U_1^\perp}$ は非退化あり, Q の $U_1^\perp$ 上への制限は $f|_{U_1^\perp}$ に付随する二次形式である. 同様の議論を繰り返すことにより $U = \bigoplus_{i=1}^n U_i$ で $k \neq l$ に対して $f(U_k, U_l) = 0$ となる分解が存在する. また, $B_2^+ \oplus B_2^+ \cong B_2^- \oplus B_2^-$ であることが簡単にわかる. したがって, 主張が示せた. □

注意 1.8. 命題 1.7 は非退化 symplectic 双線型形式は V 上で同型を除いて一意に定まることも意味している.

注意 1.9. 定義 1.3 では, Q のタイプを Witt index によって定義した. $(B_2^+)^{\oplus n}$ の Witt index が n であることと $(B_2^+)^{\oplus n-1} \oplus B_2^-$ の Witt index が $n-1$ であることが確かめられる. したがって Q は $V \cong (B_2^+)^{\oplus n}$ の場合が $+$ タイプ, $V \cong (B_2^+)^{\oplus n-1} \oplus B_2^-$ の場合が $-$ タイプとなる. 特に, 二次形式 Q が $+$ タイプ, $-$ タイプのどちらかであるかは V の等方的な元の個数で判別できる.

今後, 使う記号を定義する. Ω を n 点集合として, $S(\Omega) = S_n$ を Ω 上の対称群とする. $P(\Omega) = \{A|\ A \subset \Omega\}$ を冪集合とすると, $|P(\Omega)| = 2^n$ である. $A, B \in P(\Omega)$ に対して, $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ と定義することで $P(\Omega)$ は $\mathbb{F}_2$ 上の n 次元ベクトル空間とみなせる. $P^c(\Omega) = \{\Omega, \phi\}$, $P^e(\Omega) = \{A|\ |A| \equiv 0\ (2)\}$ とおくと, これらは $P(\Omega)$ の部分空間である. このとき, $\dim P^c(\Omega) = 1$, $\dim P^e(\Omega) = n-1$ である. $P^h(\Omega) = (P^e(\Omega) + P^c(\Omega))/P^c(\Omega)$ を *heart* と呼ぶ. $P^c(\Omega) \subset P^e(\Omega)$ である必要十分条件は $|\Omega| \equiv 0\ (2)$ である. よって $|\Omega| \equiv 0\ (2)$ のとき $\dim P^h(\Omega) = n-2$ であり, $|\Omega| \equiv 1\ (2)$ のとき $\dim P^h(\Omega) = n-1$ である. $S(\Omega)$ は $P^c(\Omega)$ の各元を固定し, $P^e(\Omega)$ を保つ. よって $S(\Omega)$ は $P^h(\Omega)$ へ自然に作用する.

$\underline{n = 2\ の場合}$ Ω を 6 点集合とする. $A \subset \Omega$ に対して $\bar{A} = \Omega \setminus A$ と定義する. $P^h(\Omega) = \{\{A, \bar{A}\}|\ |A| \equiv 0\ (2)\}$ であり, $\dim(P^h(\Omega)) = 4$ である. $\{A, \bar{A}\} \in P^h(\Omega) \setminus \{\Omega, \phi\}$ に対して

$|A|=2$ または $|\bar{A}|=2$ である. よって, $\{A,\bar{A}\}\in P^h(\Omega)$ に対して $|A|=0$ または $|A|=2$ と仮定してよい. ここで,

$$f(\{A_1,\bar{A}_1\},\{A_2,\bar{A}_2\}) = \begin{cases} 1 & \text{if } |A_1\cap A_2|\equiv 1\ (2), \\ 0 & \text{if } |A_1\cap A_2|\equiv 0\ (2), \end{cases}$$

と定めると well-defined であり, $P^h(\Omega)$ 上の非退化 symplectic 双線型形式となる.

命題 1.10. $Sp_4(2)\cong S_6$, $O_4^+(2)\cong S_3\wr S_2$, $O_4^-(2)\cong S_5$.

証明. $S(\Omega)$ が $P^h(\Omega)$ 上に忠実に作用し, f を保つことは簡単にわかる. よって $S_6\subset Sp_4(2)$ である. 位数を比較することで $Sp_4(2)\cong S_6$ を得る.

次に, f に付随する二次形式を考える.

(1) $-$ タイプ. $\alpha\in\Omega$ を固定して,

$$Q_-(\{A,\bar{A}\}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha\notin A, \\ 0 & \text{if } \alpha\in A, \end{cases}$$

と定めると f に付随する二次形式となる. このとき $P^h(\Omega)$ の Q_- に関する等方的な元は 5 個である. したがって, Q_- は $-$ タイプである. また $O_4^-(2)$ は $S(\Omega)$ の α の固定部分群であり, よって $O_4^-(2)\cong S_5$ を得る.

(2) $+$ タイプ. $C\subset\Omega$, $|C|=3$ に対して

$$Q_+(\{A,\bar{A}\}) = \begin{cases} 1 & \text{if } A\subset C, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

と定めると f に付随する二次形式になる. このとき $P^h(\Omega)$ の Q_+ に関して等方的な元の数は 9 個である. したがって, Q_+ は $+$ タイプである. また, $O_4^+(2)$ は $\{C,\bar{C}\}$ を保つ $S(\Omega)$ の部分群であり, よって $O_4^+(2)\cong S_3\wr S_2$ を得る. □

さらに, $D^+(4,2)$ は完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ であることもわかる.

注意 1.11. グラフ Δ を $V(\Delta)=\{v\in V \mid Q(v)\neq 0\}$, $E(\Delta)=\{\{x,y\}\mid f(x,y)=0\}$ と定義する. このとき, 二次形式が $+$ タイプのならば $\Delta=K_{3,3}$, $-$ タイプならば Δ は Petersen graph になる.

<u>$n=3$ の場合</u>

命題 1.12. $O_6^+(2)\cong S_8$.

証明. Ω を 8 点集合とする. $n=2$ の場合と同様に, $\mathbb{F}_2$ 上の 6 次元ベクトル空間 $P^h(\Omega)$ 上に非退化 symplectic 双線型形式 f を定義する. $S(\Omega)$ は f を保つので, $S_8 \subset Sp_6(2)$ を得る. 位数が一致しないので, $S_8 \subsetneq Sp_6(2)$ である. このとき,

$$Q(\{A, \bar{A}\}) = \begin{cases} 0 & \text{if } |A| \equiv 0 \ (4), \\ 1 & \text{if } |A| \equiv 2 \ (4), \end{cases}$$

と定めると f に付随する二次形式になる. Q に関して等方的な元を数えることで $+$ タイプであることがわかる. また, $S(\Omega)$ は Q を保つので, $S_8 \subset O_6^+(2)$ を得る. 位数を比較することで, $O_6^+(2) \cong S_8$ を得る. □

注意 1.13. n が奇数の場合に $O_{2n}^{\varepsilon}(2)$ について考える. $2n+2$ 点集合 Ω に対して $P^h(\Omega)$ が $\mathbb{F}_2$ 上の $2n$ 次元ベクトル空間となる. $P^h(\Omega)$ 上の二次形式 Q を命題 1.12 で定めたようにして得ることができる. そのとき Q は $n \equiv 3$ (4) のときに $+$ タイプ, $n \equiv 1$ (4) のときに $-$ タイプとなる. また $S(\Omega)$ が $P^h(\Omega)$ 上に自然と作用する. よって $S_{2n+2} \subset O_{2n}^{\varepsilon_n}(2)$ を得る. ただし, ε_n は n に対応するタイプである.

次に, 別の 6 次元ベクトル空間上の $+$ タイプの二次形式の構成を与え, Dual polar graph について考察する.

U を $\mathbb{F}_2$ 上の 4 次元ベクトル空間とする. グラフ $\Gamma(L_4(2))$ を, $V(\Gamma(L_4(2))) = \{W \subset U \mid \dim(W) = 1, 3\}$, $E(\Gamma(L_4(2))) = \{\{U_1, U_2\} \mid U_1 \subset U_2 \text{ or } U_2 \subset U_1\}$ と定義する.

命題 1.14. $D^+(6,2) = \Gamma(L_4(2))$.

証明. U を 4 次元ベクトル空間とする. このとき, $\bigwedge^2 U$ は $\mathbb{F}_2$ 上の 6 次元ベクトル空間となる. まず, $\bigwedge^2 U$ 上に $+$ タイプの二次形式を定義する. その後で, Dual polar graph $D^+(6,2)$ と $\Gamma(L_4(2))$ の頂点の間に一対一対応を与え, それがグラフの同型であることを示す.

$\bigwedge^2 U$ の非零元は $x \wedge y$, または $u \wedge v + x \wedge y$ と書ける. 前者は 35 個あり, 後者は 28 個あることがわかる. $\bigwedge^2 U$ 上に $Q(x \wedge y) = 0$, $Q(u \wedge v + x \wedge y) = 1$ と定義することで $+$ タイプの二次形式 Q を得る. 実際, $f(x,y) = Q(x+y) + Q(x) + Q(y)$ が非退化 symplectic 双線型形式になっていることが確かめらる. このとき Q は等方的な元の個数が 35 個なので $+$ タイプである.

さて, Q に関する $\bigwedge^2 U$ の極大な等方部分空間は 2 種類ある. 一つは U の 3 次元部分空間 W に対して定まる $T(W) = \{w_1 \wedge w_2 \mid w_i \in W\}$ で, もう一つは $u \in U \setminus \{0\}$ に対して定まる $T(u) = \{u \wedge v \mid v \in U\}$ である. よって, $\Delta = D^+(6,2)$ と $\Gamma = \Gamma(L_4(2))$ 頂点の間に自然に一対一対応がつく.

この対応がグラフとしての同型を与えていることを示す. そのためには, 次の 4 つの場合において辺が保たれることを確かめれば十分である.

(a) U の異なる 3 次元部分空間 X, Y と $T(X), T(Y)$ について.

Γ において $\{X, Y\} \notin E(\Gamma)$ である. また U が 4 次元であることから $X \cap Y$ は 2 次元部分空間である. $X \cap Y$ の基底を z_1, z_2 とする. このとき, $T(X) \cap T(Y) = \langle z_1 \wedge z_2 \rangle$ より $\dim(T(X) \cap T(Y)) = 1$ である. よって $\{T(X), T(Y)\} \notin E(\Delta)$ である.

(b) U の 3 次元部分空間 X, $u \in X \setminus \{0\}$ と $T(X), T(u)$ について.

$\{X, \langle u \rangle\} \in E(\Gamma)$ である. また $T(X) \cap T(u) = \{u \wedge x | \, u \in X\}$ より $\dim(T(X) \cap T(u)) = 2$ となる. よって $\{T(X), T(u)\} \in E(\Delta)$ である.

(c) U の 3 次元部分空間 X, $u \in U \setminus X$ と $T(X), T(u)$ について.

$\{X, \langle u \rangle\} \notin E(\Gamma)$ である. また $T(X) \cap T(u) = \{0\}$ より $\dim(T(X) \cap T(u)) = 0$ となる. よって $\{T(X), T(u)\} \notin E(\Delta)$ となる.

(d) $u, v \in U \setminus \{0\}$ と $T(u), T(v)$ について.

$\{\langle u \rangle, \langle v \rangle\} \notin \Gamma$ である. また $T(u) \cap T(v) = \langle u \wedge v \rangle$ より, $\dim(T(u) \cap T(v)) = 1$ となる. よって $\{T(u), T(v)\} \notin E(\Delta)$ となる.

したがって, $D^+(6,2) = \Gamma(L_4(2))$ を得る. □

命題 1.15. $\Gamma = D^+(6,2)$ に対して, 以下の (a) から (d) が成立する.

(a) $\mathrm{Aut}(\Gamma) = O_6^+(2) \cong S_8$.

(b) $x, y \in \Gamma$, $d_\Gamma(x,y) = 2$ に対して, Γ の部分グラフ $\Xi(x,y)$ で x, y を含み, $K_{3,3}$ と同型であるものが唯一つ存在する. 特に, $\Xi(x,y)$ は *geoditically closed* である. すなわち任意の $u, v \in \Xi(x,y)$ に対し, u, v の最短経路は $\Xi(x,y)$ に含まれる.

(c) Γ は二部グラフである. すなわち, 任意の辺 $\{x,y\} \in E(\Gamma)$ に対して $|\{x,y\} \cap V_i| = 1$ を満たす分割 $V(\Gamma) = V_1 \cup V_2$ がある.

(d) $\{0, V_i\}$ は $x + y = (\Xi(x,y) \setminus \{x,y\}) \cap V_i$ と定義することで 4 次元ベクトル空間となる.

証明. (b), (c), (d) は後でもっと一般的の場合の命題を紹介する. ここでは (b), (c), (d) を仮定して (a) を示す.

Ω を 8 点集合とする. このとき $P^h(\Omega)$ が $\mathbb{F}_2$ 上の 6 次元ベクトル空間となる. 命題 1.12 において, $P^h(\Omega)$ の上に + タイプの二次形式を定義し, $O_6^+(2) \cong S_8$ を得た. その作用をみることで, $O_6^+(2)$ が $V(\Gamma)$ へ可移に作用していることがわかる. $O_6^+(2) \subset \mathrm{Aut}(\Gamma)$ より, $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ が $V(\Gamma)$ へ可移に作用している. (c) から分割 $\Gamma = V_1 \cup V_2$ がある. $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ の V_1 の固定部分群を G とおく. Γ が二部グラフであることと $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ が $V(\Gamma)$ へ可移に作用することから, $|\mathrm{Aut}(\Gamma) : G| = 2$ である. (d) より V_1 は $\mathbb{F}_2$ 上の 4 次元ベクトル空間である. G がグラフ構造を保ち V_1 に忠実に作用することから $G \subset GL(V_1)$ を得る. 一方,

$H = O_6^+(2) \cap G$ とおくと $H \cong A_8$ である. 群論でよく知られた事実 $A_8 \cong L_4(2) \cong GL(V_1)$ より $G = H \cong A_8$ を得る. $|O_6^+(2) : G| = 2$, $|\mathrm{Aut}(\Gamma) : G| = 2$ と $O_6^+(2) \subset \mathrm{Aut}(\Gamma)$ より $\mathrm{Aut}(\Gamma) = O_6^+(2)$ を得る. □

次に amalgam についての基本事項を述べる. 詳しい定義等については [Iv99b], [IS01] を参照されたい.

定義 1.16. *H を有限集合, $A = \{H_i | \ i = 1, \ldots, n\}$ を n 個の H の有限部分集合 H_i の族とする. A が階数 n の amalgam であるとは, 各 H_i 上に二項演算 $*_i$ が定まっており以下の性質を満たすことをいう.*

(i) $(H_i, *_i)$ は群である;

(ii) $H = \bigcup_{i=1}^n H_i$;

(iii) $\bigcap_{i=1}^n H_i \neq \phi$;

(iv) *if* $x, y \in H_i \cap H_j$ *then* $x *_i y = x *_j y$.

群 G に対して, 部分群の集合 $A = \{H_i | \ i = 1, \ldots, n\}$ は amalgam になっている. そこで, 逆に amalgam によって群を特徴付けたいのである.

定義 1.17. *群 G が amalgam $A = \{H_i | \ i = 1, \ldots, n\}$ の completion であるとは次の条件を満たす写像 $\varphi : \bigcup_{i=1}^n H_i \to G$ が存在することをいう.*

(i) G が φ の像で生成されている.

(ii) 各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して φ の H_i への制限が H_i 上の二項演算 $*_i$ と G の二項演算に関する群準同型写像となっている.

さらに, φ が単射であるとき completion G が忠実であるという.

amalgam に対して completion が常に存在することが次の universal completion の存在から保証されている.

定義 1.18. *amalgam $A = \{H_i | \ i = 1, \ldots, n\}$ が与えられたとする. このとき, $H = \bigcup_{i=1}^n H_i$ の元を生成元とし $x, y \in H_i$, $xy = z$ に対して $xyz^{-1} = 1$ という関係式全体で定義される群を A の universal completion といい $U(A)$ と書く.*

一般には $U(A)$ が有限群になるとは限らない. また amalgam A の completion G が与えられた時, $U(A)$ から G への全射群準同型が唯一つ存在する.

この章では, グラフ $D^+(2n,2)$ と直交群 $O^+(2n,2)$ に関する命題を紹介する. 証明については [BCN89] を参照されたい.

$2n$ 次元ベクトル空間 V と非退化 symplectic 双線型形式 f に付随する + タイプの二次形式 Q を考える. Dual polar graph $D^+(2n,2)$ は頂点集合が V の極大等方部分空間の集合で, 辺集合が $\{\{U,W\}|\ \dim(U\cap W)=n-1\}$ で定まるグラフであった.

$D^+(2n,2)$ は次のような性質を持っている.

命題 2.1. $\Gamma = D^+(2n,2)$ とする.

(i) Γ は連結である.

(ii) Γ は *regular* で *valency* は 2^n-1 である.

(iii) $x,y\in V(\Gamma)$, $d_\Gamma(x,y)=i$, $1\le i\le n-1$ に対し, ある *geoditically closed* な部分グラフ $\Xi(x,y)\cong D^+(2i,2)$ で $x,y\in\Xi(x,y)$ となるものが存在する.

(iv) Γ は二部グラフである.

(v) Γ は *distance regular* でパラメータ $k=2^n-1$, $c_i=2^i-1$, $a_i=0$, $b_i=k-c_i$ を持つ.

(vi) Γ の *girth* は 4 である.

(vii) $\Gamma_i(x)=\{y\in V(\Gamma)|\ \dim(x,y)=n-i\}$

(viii) Γ の *diameter* は n である. □

群 H が集合 Ω に作用するとする. $x\in\Omega$ に対して, $H(x)=\{h\in H|\ x^h=x\}$ で固定部分群を表すことにする. また, 部分集合 $\Delta\subset\Omega$ に対して, $H[\Delta]:=\{h\in H|\ x^h\in\Delta \text{ for } x\in\Delta\}$, $H(\Delta):=\{h\in H|\ x^h=x \text{ for } x\in\Delta\}$ と定義する. このとき, $H(\Delta)$ は $H[\Delta]$ の正規部分群であり, $H[\Delta]/H(\Delta)$ は Δ 上の置換群として忠実に作用する.

ここで, Ω 上のグラフ構造があって, H がその構造を保つとする. $x\in\Omega$ に対して, $H_i(x)=\{h\in H|\ y^h=y \text{ whenever } d_\Omega(x,y)\le i\}$ と定義する. $H_i(x)$ は x からの距離が i 以下の頂点をすべて固定する $H(x)$ の正規部分群である.

$D^+(2n,2)$ と $O^+_{2n}(2)$ の間には次のような関係がある.

命題 2.2. $G=O^+_{2n}(2)$, $\Gamma=D^+(2n,2)$, $x\in\Gamma$ とする.

(i) G は Γ の頂点と辺に可移に作用する.

(ii) $1\le i\le n$ に対して, $G(x)$ は $\Gamma_i(x)$ 上に可移に作用する.

(iii) $i \in \{1,\ldots,n\}$ に対して, G は $\{\{x,y\}|\ x,y \in V(\Gamma),\ d_\Gamma(x,y)=i\}$ 上に可移に作用する.

(iv) $x,y \in \Gamma$, $d(x,y)=i$ に対して, $\Xi=\Xi(x,y) \cong D^+(2i,2)$ とする. このとき, $G[\Xi]/G(\Xi) \cong O^+_{2i}(2)$, $G(\Xi) \neq \{1\}$ である. さらに, $G(\Xi)$ は基本可換 2 群であり, $G(\Xi)=O_2(G[\Xi])$ となっている.

(v) $G(x)/G_1(x) \cong L_n(2)$ であり, $G_1(x)$ は x の双対の *exterior square* となる. ただし, x の双対とは x を $\mathbb{F}_2$ 上の n 次元ベクトル空間とみたときの超平面全体に零元を加えて構成した $\mathbb{F}_2$ 上の n 次元ベクトル空間である. さらに, $G(x)$ は分裂拡大となっていて, $|G_1(x)|=2^{n(n-1)/2}$ である.

(vi) $G_2(x)=G_3(x)=\cdots=1$.

(vii) $y \in \Gamma_1(x)$ に対して, $G(\{x,y\})/O_2(G(\{x,y\})) \cong L_{n-1}(2)$ となる. さらに, $t \in G[\{x,y\}] \setminus G(\{x,y\})$ で $[t,G(\{x,y\})] \subset O_2(G(\{x,y\}))$ を満たすものが存在する.

(viii) $y \in \Gamma_2(x)$ に対して $\Xi=\Xi(x,y) \cong K_{3,3}$ とおく. $G[\Xi]$ の $\mathrm{Out}(G(\{x,y\}))$ への像が $G[\Xi]/G(\Xi)=S_3 \wr S_2$ である必要十分条件は $C_{G[\Xi]}(G(\Xi)) \subset G(\Xi)$ である. □

3 $O^+_{10}(2)$ と J_4 の amalgam による群の特徴づけ

この章では直交群 $O^+_{10}(2)$ と散在型単純群のひとつである J_4 のグラフと amalgam による特徴づけについて述べる. また, 別の J_4 の amalgam による特徴付けが [Iv99a] で与えられている. この章において $G=O^+_{10}(2)$, $\Gamma=D^+(10,2)$, $H=J_4$ を表すとする.

[Iv87] において 4 番目の Janko 群 J_4 が頂点と辺に可移に作用する valency が 31 のグラフ Δ が構成された. そのとき $\alpha \in \Delta$ に対して, $H(\alpha)/H_1(\alpha) \cong L_5(2)$ である. ただし $H_1(\alpha)$ は $L_5(2)$ の自然な加群の exterior square である. 一方, 命題 2.1 より Γ の valency は 31 であり G が頂点と辺に可移に作用している. さらに 命題 2.2 (v) から $\alpha \in \Gamma$ に対して $G(\alpha)/G_1(\alpha) \cong L_5(2)$ が成り立っている. このように, (G,Γ) と (H,Δ) の作用するグラフと部分群に関して類似点があることがわかる. ただし, $D^+(10,2)$ の girth が 4 であり ([CP82]), Δ の girth が 5 である ([Iv92]) ことを注意しておく. これら 2 つの群の特徴づけについて述べる.

$\{x,y\} \in E(\Gamma)$ に対して, x,y を含む geometrical subgraph $\Xi \cong K_{3,3}$ が存在する. また, Δ は geometrical Petersen graph の族を含んでいて, $\{a,b\} \in E(\Delta)$ に対して, Σ を a,b を含むものの一つとする. geometrical の定義は [Iv99b] の 9.5 章を参照されたい.

定理 3.1. *F を valency 31 のグラフ Φ に作用する群で, $\alpha \in \Phi$ に対して $F(\alpha)/F_1(\alpha) \cong L_5(2)$ を満たすとする. ただし, $F_1(\alpha)$ は $L_5(2)$ の自然な加群に対する exterior square とする. $\beta \in \Phi_1(\alpha)$ とおいたとき, amalgam $A=\{F(\alpha),F(\{\alpha,\beta\})\}$ は $\{G(x),G(\{x,y\})\}$*

または $\{H(a), H(\{a,b\})\}$ のいずれかと同型になる．ただし，$x \in \Gamma$, $y \in \Gamma_1(x)$, $a \in \Delta$, $b \in \Delta_1(a)$ である． □

ここで $\tilde{F}$ を amalgam A の universal amalgam とする．このとき，全射準同型 $\psi : \tilde{F} \to G$ (または $\tilde{F} \to H$) が存在する．E を G (または H) における Ξ (または Σ) の固定部分群として，$\tilde{E} = \psi^{-1}(E)$ とする．同様に $\tilde{F}(\alpha) = \psi^{-1}(F(\alpha))$, $\tilde{F}(\{\alpha,\beta\}) = \psi^{-1}(F(\{\alpha,\beta\}))$ と定義する．$\tilde{K}$ を $\tilde{F}(\alpha) \cap \tilde{E}$ と $\tilde{F}(\{\alpha,\beta\}) \cap \tilde{E}$ を正規化するような $\tilde{E}$ の極大な部分群とする．また $\tilde{N} = C_{\tilde{E}}(\tilde{K})$ とおき，$\tilde{M}$ を $\tilde{N}$ を含む $\tilde{F}$ の最小の正規部分群とする．

定理 3.2. $\tilde{M} = \mathrm{Ker}\psi$. □

したがって，amalgam A から $O_{10}^{+}(2)$ (または J_4) が復元できる．

参考文献

[BCN89] A.E. Brouwer, A.M. Cohen and A. Neumaier, Distance-Regular Graphs, Springer Verlag, Berlin, 1989.

[CP82] P.J. Cameron and C.E. Praeger, Graph and permutatin groups with projective subconsituents, J. London Math. Soc. **25** (1982), 62-74.

[Iv87] A.A. Ivanov, On 2-transitive graphis of girth 5, *Europ. J. Combin.* **8** (1987), 393-420.

[Iv92] A.A. Ivanov, A presentation for J_4, *Proc. London Math. Soc.* **64** (1992), 369-396.

[Iv99a] A.A. Ivanov and U. Meierfrankenfeld, A computer free construction of J_4, *J. Algebra* **219** (1999), 113-172.

[Iv99b] A.A. Ivanov, Geometry of Sporadic Groups I Petersen and tilde geometries, (1999) Cambridge University Press.

[IS01] A.A. Ivanov and S.V. Shpectorov, Geometry of Sporadic Groups II, Representations and amalgames (2001) Cambridge University Press.