

## GENERA OF RIEMANN SURFACES CONSTRUCTED FROM LIGHTNING POLYGONS

大場 清・お茶の水女子大学理学部 (KIYOSHI OHBA · OCHANOMIZU UNIVERSITY)

### §1. はじめに.

これは、大阪市立大学の橋本義武氏との共同研究についてのものである。我々は、閉リーマン面上の1点にのみ極、それも2位の極をもつ第2種アーベル微分を“dipole”と呼び、dipole付きの閉リーマン面を具体的に構成する方法を示してきた。その1つ目の結果は、“井桁”を使うものであり、次は“稲妻多角形 (lightning polygon)”というガウス平面上のある種の図形を使うものであった。井桁に関しての結果は [HO1], [HO2] に、稲妻多角形に関しての結果は [O] にまとめている。(稲妻多角形に関しての結果は改めて [HO3] にまとめる予定である。)

さて、井桁からも稲妻多角形からも閉リーマン面が構成されるわけであるが、出来上がった閉リーマン面の種数は、井桁から作る時はすぐに分かるが、稲妻多角形から作る時はにはわかない。そこで、その求め方を紹介する。

### §2. 復習.

稲妻多角形には、深度付き稲妻多角形というものもあるが、種数に関する状況はまったく同じなので、深度付きでない稲妻多角形で考えることにする。

$\mathbb{H}$  で上半平面を表し、“ $n$  次の稲妻”という言葉で、複素数列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  (ただし、 $a_k \in \mathbb{H}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )) もしくは、(原点)  $\rightarrow (a_1) \rightarrow (a_1 + a_2) \rightarrow \dots \rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$  と  $n+1$  個の点を結んだガウス平面上の有向折れ線を意味することとする。 $\sigma$  を  $1, 2, \dots, n$  の置換で、 $\sigma(1) \neq 1, \sigma(n) \neq n, \sigma(i) + 1 \neq \sigma(i+1)$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) を満たすものとする。稲妻と  $n$  次の置換の組  $((a_1, a_2, \dots, a_n), \sigma)$  に対して、ガウス平面上で、(原点)  $\rightarrow (a_1) \rightarrow (a_1 + a_2) \rightarrow \dots \rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n - a_{\sigma(n)}) \rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n - a_{\sigma(n)} - a_{\sigma(n-1)}) \rightarrow \dots \rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n - a_{\sigma(n)} - a_{\sigma(n-1)} - \dots - a_{\sigma(2)}) \rightarrow$  (原点) と順に点を線分で結ぶことにより、 $2n$  角形 (のようなもの?) が得られる。こうして得られた  $2n$  角形  $\Gamma$  (または、稲妻と置換の組  $\Gamma = ((a_1, a_2, \dots, a_n), \sigma)$ ) を、 $n$  次の稲妻多角形と呼ぶ。

稲妻多角形  $\Gamma = ((a_1, a_2, \dots, a_n), \sigma)$  が与えられたとき、次のように1点付きリーマン面を構成する。(Figure 1)

稲妻多角形の各辺を (原点)  $\rightarrow (a_1)$  から順に  $b_1, b_2, \dots, b_n, c_{\sigma(n)}, c_{\sigma(n-1)}, \dots, c_{\sigma(1)}$  と名付け、ガウス平面を2つの半直線  $-\sqrt{-1}t, a_1 + \dots + a_n + \sqrt{-1}t$  ( $t \in [0, \infty)$ ) と  $n$  個の辺  $b_1, \dots, b_n$  で切断し、右側の部分を  $D_r$  とする。また、ガウス平面を2つの半直線  $-\sqrt{-1}t, a_1 + \dots + a_n + \sqrt{-1}t$  ( $t \in [0, \infty)$ ) と  $n$  個の辺  $c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(n)}$  で切断し、左側の部分を  $D_l$  とする。そして、 $D_r$  と  $D_l$  を2つの半直線部分  $-\sqrt{-1}t, a_1 + \dots + a_n + \sqrt{-1}t$  ( $t \in [0, \infty)$ ) で貼り合わせることにより、1点(無限遠点)付き境界付きリーマン面をつくる。さらに、その境界上の辺  $b_1$  と  $c_1, b_2$  と  $c_2, \dots, b_n$  と  $c_n$  を平行移動によりはり合わせるることによって、1点付きリーマン面  $(R((a_1, \dots, a_n), \sigma), p_\infty)$  が構成される。これが、稲妻多角形による閉リーマン面の構成法である。このように構成すると閉リーマン面は自然な dipole をもつことになるが、今回の種数の求め方には関係ないので、あまり言及しないことにする。

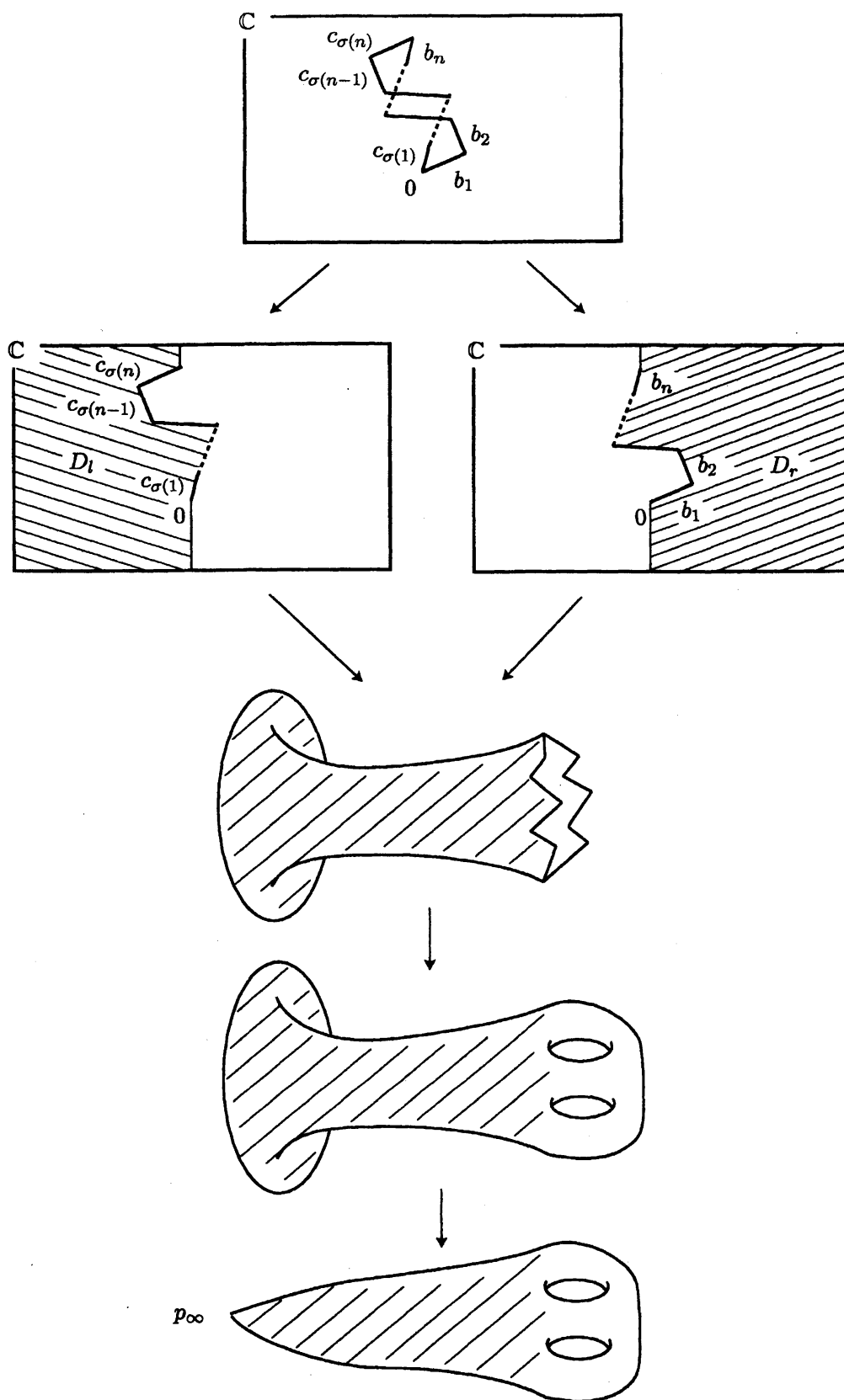


FIGURE 1. 稲妻多角形からの閉リーマン面の構成

種数を考えるには、位相のみを気かければよい。したがって、 $n$  次稲妻多角形において  $n$  次対称群の元  $\sigma$  のみを考えればよいことになる。そこで、Figure 2 のように稲妻多角形として  $\mathbb{C}$  上の単純閉曲線が現れるような場合のみを考える。Figure 2 では、Figure 1 のときに合わせて稲妻多角形の辺を順に  $b_1, b_2, \dots, b_n, c_{\sigma(n)}, c_{\sigma(n-1)}, \dots, c_{\sigma(1)}$  とおき、頂点を  $p_0 := 0$  (原点),  $p_1 := a_1$ ,  $p_2 := a_1 + a_2, \dots, p_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , そして、 $q_0 := 0$  (原点),  $q_1 := a_{\sigma(1)}$ ,  $q_2 := a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)}, \dots, q_n := a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \dots + a_{\sigma(n)}$  とおく。ここで  $p_0 = q_0, p_n = q_n$  である。

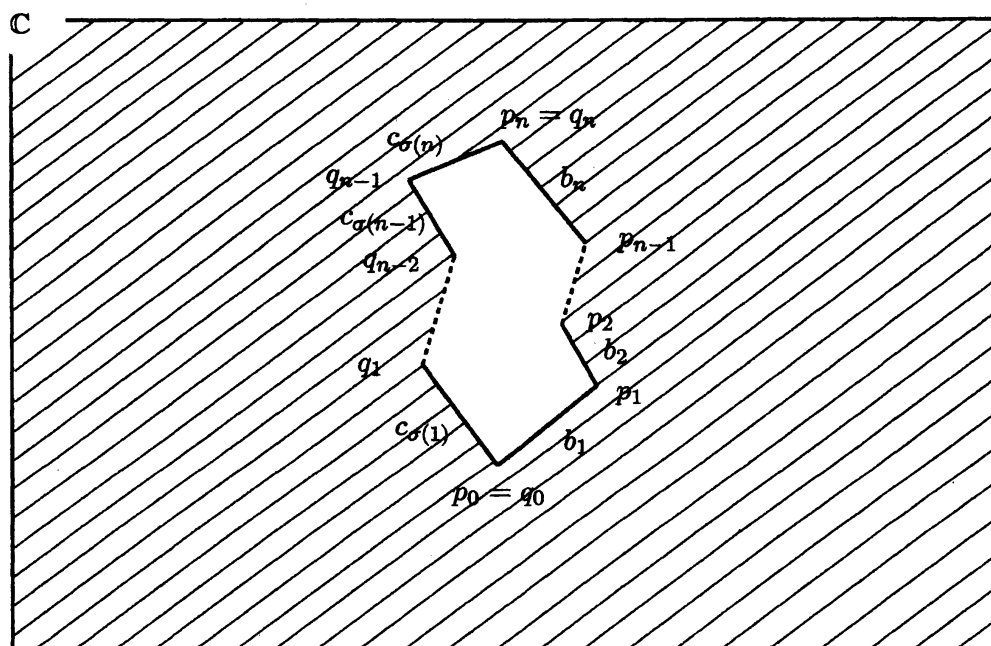


FIGURE 2

以下、Figure 2 に合わせて説明する。

稲妻多角形から閉リーマン面をつくるとき、出来上がった閉リーマン面には、稲妻多角形から自然な胞体分割が与えられていることがわかる。2-cell は 1 個で  $p_\infty$  を内点として含むものである。1-cell は  $2n$  個の稲妻多角形の辺  $b_1, b_2, \dots, b_n, c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}, \dots, c_{\sigma(n)}$  を対  $(b_i, c_i)$  にして貼り合わせてできるもので、 $n$  個になることが分かる。0-cell は、稲妻多角形の  $2n$  個の頂点から得られることになるが、その個数はすぐには分からない。したがって、0-cell がいくつあるかを求めればオイラー数、したがって種数が求められることになる。

貼り合わせを考えれば、出来上がった閉リーマン面の 0-cell は稲妻多角形の  $n+1$  個の頂点  $p_0, p_2, \dots, p_n$  から、あるいは  $q_0, q_2, \dots, q_n$  から全て得られることが分かる。ここで、 $q_i$  が辺  $c_{\sigma(i)}$  の上端の頂点であることを考えると、辺  $c_{\sigma(i)}$  が辺  $b_{\sigma(i)}$  と貼り合わされることから、頂点  $q_i$  は頂点  $p_{\sigma(i)}$  と同一視されることがわかる。(ただし、もともと同じ点である  $q_0$  と  $p_0$  に関して、これにより  $q_0$  が  $p_0$  と“同一視”されると解釈する。) 一方で、 $q_i$  が辺  $c_{\sigma(i+1)}$  の下端の頂点であることを考えると、辺  $c_{\sigma(i+1)}$  が辺  $b_{\sigma(i+1)}$  と貼り合わされることから、頂点  $q_i$  は頂点  $p_{\sigma(i+1)-1}$  と同一視されることがわかる。(ただし、もともと同じ点である  $q_n$  と  $p_n$  に関して、これにより  $q_n$  が  $p_n$  と“同一視”されると解釈する。)

以上から、稲妻多角形の  $n+1$  個の頂点  $p_0, p_1, \dots, p_n$  は,  $q_0, q_2, \dots, q_n$  を仲介として,  $p_0$  と  $p_{\sigma(1)-1}$  が,  $p_{\sigma(1)}$  と  $p_{\sigma(2)-1}$  が,  $\dots$ ,  $p_{\sigma(n-1)}$  と  $p_{\sigma(n)-1}$  が,  $p_{\sigma(n)}$  と  $p_n$  が, 同一視されることになる。そして, この同一視から生成される  $p_0, p_1, \dots, p_n$  の間の同値関係により得られる同値類の個数が 0-cell の個数ということになる。そこで,  $\sigma$  から得られる  $n+1$  次の対称群の元

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \\ \sigma(1)-1 & \sigma(2)-1 & \sigma(3)-1 & \cdots & \sigma(n)-1 & n \end{pmatrix}$$

を考えると,  $\tilde{\sigma}$  を巡回置換の積に分解したときの巡回置換の個数, つまり,  $\tilde{\sigma}$  の共役類に対応するヤング図形の行数  $k(\tilde{\sigma})$  が構成される閉リーマン面の 0-cell の個数となる。すなわち, 次の結果を得る。

**定理** 稲妻多角形  $\Gamma = ((a_1, a_2, \dots, a_n), \sigma)$  から得られる閉リーマン面  $R_\Gamma$  の種数を  $g(R_\Gamma)$  とすると, 次の公式から得られる。(深度付き稲妻多角形の時も同じである。)

$$2 - 2g(R_\Gamma) = k(\tilde{\sigma}) - n + 1$$

稲妻多角形から得られた胞体分割では, 各 0-cell は出来上がった閉リーマン面に付随する dipole の零点に対応している。ヤング図形の各行がその零点に対応しているわけであるが, その行に現れるボックスの数から 1 を引いたものが, その零点の位数を表している。

#### §4. 例.

まず, 例 1 と例 2 で, 対辺型の稲妻多角形からできる閉リーマン面の種数を考える。この場合は, 出てくるリーマン面は超楕円曲線になっている。また, 全ての超楕円曲線は対辺型の稲妻多角形から構成される。

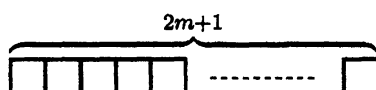
例 1 (偶数次対辺型)  $2m$  次稲妻多角形で, その対称群の元が,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2m-1 & 2m \\ 2m & 2m-1 & 2m-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

であるとき,

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & 2m & 2m-1 & \cdots & 2 & 1 \\ 2m-1 & 2m-2 & 2m-3 & \cdots & 0 & 2m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 2m-1 & 2m \\ 2m-1 & 2m & 0 & \cdots & 2m-3 & 2m-2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから,  $\tilde{\sigma}$  のヤング図形は次のようになる。



したがって, 0-cell は 1 つだけ, そこでの dipole の零の位数は  $2m$  で, 種数を  $g$  とすると,  $2 - 2g = 1 - 2m + 1$  より  $g = m$  と分かる。

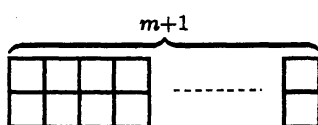
例2 (奇数次対辺型)  $2m+1$  次稲妻多角形で, その対称群の元が,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2m & 2m+1 \\ 2m+1 & 2m & 2m-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

であるとき,

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & 2m+1 & 2m & \cdots & 2 & 1 \\ 2m & 2m-1 & 2m-2 & \cdots & 0 & 2m+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 2m & 2m+1 \\ 2m & 2m+1 & 0 & \cdots & 2m-2 & 2m-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから,  $\tilde{\sigma}$  のヤング図形は次のようになる.



したがって, 0-cell は2つで, そこでの dipole の零の位数はともに  $m$  で, 種数を  $g$  とすると,  $2-2g=2-(2m+1)+1$  より  $g=m$  と分かる.

対辺型でないものも1つ例を挙げておく.

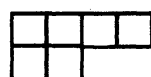
例3 5次稲妻多角形で, その対称群の元が

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

であるとき,

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

となるから,  $\tilde{\sigma}$  のヤング図形は次のようになる.



したがって, 0-cell は2つで, そこでの dipole の零の位数はそれぞれ3と1で, 種数を  $g$  とすると,  $2-2g=2-5+1$  より  $g=2$  と分かる.

#### REFERENCES

- [HO1] Y. Hashimoto and K. Ohba, *Cutting and pasting of Riemann surfaces with Abelian differentials, I*, Int. J. Math. 10 (1999) 587-617
- [HO2] Y. Hashimoto and K. Ohba, *On the anti-parallel Igeta construction of Riemann surfaces*, Aspects of Complex Analysis, Differential Geometry, Mathematical Physics and Applications (1999) 60-76.
- [HO3] Y. Hashimoto and K. Ohba, *Cutting and pasting of Riemann surfaces with Abelian differentials, II*, in preparation.
- [O] 大場 清 *Dipole* のモジュライ空間, 数理解析研究所講究録, vol. 1223 (2001), pp. 137-150.