数理解析研究所講究録 1329 巻 2003 年 173-181

Harmonic volumes of hyperelliptic curves from analytical and topological viewpoints

田所 勇樹
(東京大学大学院数理科学研究科)
Yuki Tadokoro
(Department of Mathematical Sciences, University of Tokyo)

2002 年 12 月 5 日

概要

B. Harris は，Chen の反復積分を用いて，Riemann 面の調和体積を定義した．超楕円曲線に対する調和体積を完全に決定した．この結果は田中淳氏の定理 [8] の幾何的解釈の一つを与える．

目次

1. Introduction and Preliminaries
2. The harmonic volumes of hyperelliptic curves
3. Topological viewpoints
4. Appendix (Iterated integrals of Fermat curves)

1 Introduction and Preliminaries

X を種数 $g(\geq 3)$ のコンパクト Riemann 面とする．興味の対象は，X 上の 1 形式に対する，X 上の道での Chen [2] の反復積分 (iterated integrals) である．簡単に反復積分の定義を復習しよう．ω_1, ω_2 を X 上の 1 形式とし，$\gamma : [0,1] \to X$ を X 上の道とする．このとき，ω_1, ω_2 の γ での (長さ 2 の) 反復積分は

$$\int_\gamma \omega_1\omega_2 = \int_{0\leq t_1\leq t_2\leq 1} f_1(t_1)f_2(t_2)dt_1dt_2$$

と定義される．ただし，f_1, f_2 は，t を閉区間 $[0,1]$ の座標としたとき，$\gamma^*(\omega_i) = f_i(t)dt$ を満たす．端点を固定した際，**反復積分は一般的にホモトピー不変ではない**．ホモトピー不変にするために補正項を付け加える．

Lemma 1.1 $\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, i = 1, 2, \ldots, m$, を X 上の閉 1 形式とし，$\gamma : [0,1] \to X$ を X 上の道とする．$\displaystyle\int_X \sum_{i=1}^m \omega_{1,i} \wedge \omega_{2,i} = 0$ と仮定すれば，$\displaystyle d\eta = \sum_{i=1}^m \omega_{1,i} \wedge \omega_{2,i}$ を満たすような X 上の 1 形式 η がとれる．
このとき，

$$\sum_{i=1}^m \int_\gamma \omega_{1,i}\omega_{2,i} - \int_\gamma \eta$$

は端点を固定してホモトピー不変になる．

Remark 1.2 この η を具体的に表すためには Green 作用素が必要となり，大変難しい (少なくとも私には)．しかし，超楕円曲線 ($\mathbb{C}P^1$ の 2 重分岐被覆) の場合には，$\mathbb{C}P^1$ 上の 1 形式を利用して表すことができる [4]．

Lemma 1.1 を用いて，調和体積 [4] を定義しよう．まずは，点付き調和体積 [7] から定義する．1 次元コホモロジー群 $H^1(X;\mathbb{Z})$ とホモロジー群 $H_1(X;\mathbb{Z})$ を Poincaré 双対により同一視し，H と表す．Hodge $*$ 作用素 (ここでは，**複素構造にのみ依存し計量には依存しない**) によりこの H は "X 上の $\mathbb{Z}$ に周期を持つ，実調和 1 形式全体からなる加群" とも同一視できる (Hodge の定理)．$(\ ,\ ) : H \otimes H \to \mathbb{Z}$ を交叉形式 $H \times H \to \mathbb{Z}$ とテンソル積の普遍性から得られる非退化交代形式とし，$K = \ker(\ ,\ )$ とおく．**点付き調和体積** I_{x_0} は点付き Riemann 面 (X, x_0) に対し，反復積分を用いて以下のように定義される $K \otimes H$ から $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ への準同型である．

Definition 1.3

$$I_{x_0}\Big(\sum_{k=1}^m \Big(\sum_{i=1}^{n_k} a_{i,k} \otimes b_{i,k}\Big) \otimes c_k\Big) = \sum_{k=1}^m \Big(\sum_{i=1}^{n_k} \int_{\gamma_k} a_{i,k} b_{i,k} - \int_{\gamma_k} \eta_k\Big) \mod \mathbb{Z},$$

ここで γ_k は，$H_1(X;\mathbb{Z}) \ni [\gamma_k] =$(コホモロジー類 c_k の Poincaré 双対)，となる x_0 を基点とするループである．$\sum_{i=1}^{n_k}(a_{i,k}, b_{i,k}) = 0$ であることから，以下を満たす X 上の 1-形式 η_k の存在とその一意性が言える．$d\eta_k = \sum_{i=1}^{n_k} a_{i,k} \wedge b_{i,k}$ かつ任意の X 上の閉 1-形式 α に対して，$\int_X \eta \wedge *\alpha = 0$, を満たす．$I_{x_0}$ は γ_k のとり方に依存しない．

Remark 1.4 Pulte [7] は，点付き調和体積 I_{x_0} と X の Jacobian $J(X)$ における algebraic cycle $X - X^-$ の intermediate Jacobian を用いて，$\mathbb{Z}\pi_1(X, x_0)/J^3$ 上の

自然な Mixed Hodge Structure の幾何的解釈を与えた．ただし，x_0 は基点であり，J は群環 $\mathbb{Z}\pi_1(X,x_0)$ の augmentation ideal である．

調和体積 I は点付調和体積 I_{x_0} の制限である．自然な準同型 $p: H^{\otimes 3} \to H^{\oplus 3}$ を $p(\omega_1\otimes\omega_2\otimes\omega_3) = ((\omega_1,\omega_2)\omega_3, (\omega_2,\omega_3)\omega_1, (\omega_3,\omega_1)\omega_2)$ と定める．$(H^{\otimes 3})' = \ker p \subset K\otimes H$ とおくと，これは階数 $(2g)^3 - 6g$ の自由加群になる．**調和体積** I はコンパクト Riemann 面に対して，次のように定義される準同型 $(H^{\otimes 3})' \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ である．

Definition 1.5

$$I\Big(\sum_i a_i\otimes b_i\otimes c_i\Big) = I_{x_0}\Big(\sum_i a_i\otimes b_i\otimes c_i\Big) \mod \mathbb{Z}.$$

Remark 1.6 I は x_0 の取り方に依存しない．また，$\sigma\in\mathfrak{S}_3$，$\omega_1\otimes\omega_2\otimes\omega_3\in(H^{\otimes 3})'$ に対し，$I(\omega_{\sigma(1)}\otimes\omega_{\sigma(2)}\otimes\omega_{\sigma(3)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)I(\omega_1\otimes\omega_2\otimes\omega_3)$ が成り立つ．

$\{x_i,y_i\}_{i=1,\dots,g}$ を H の symplectic 基底，つまり $(x_i,y_j)=\delta_{ij}=-(y_j,x_i), (x_i,x_j)=(y_i,y_j)=0$ を満たす H の基底とする．$z_i = x_i$ or y_i，とおけば，以下が成り立つ．

Proposition 1.7 $\mathfrak{A}$ を下表の元からなる $(H^{\otimes 3})'$ の部分集合とするとき，$\mathfrak{B} = \{\sigma(a); a\in\mathfrak{A}, \sigma\in A_3\}$ は $(H^{\otimes 3})'$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底となる．

(1)	$z_i\otimes z_j\otimes z_k$	$(i\neq j, j\neq k \text{ and } k\neq i)$
(2a)	$x_i\otimes y_i\otimes z_k - x_{k+1}\otimes y_{k+1}\otimes z_k$	$(i\neq k \text{ and } i\neq k+1)$
(2b)	$y_i\otimes x_i\otimes z_k - y_{k+1}\otimes x_{k+1}\otimes z_k$	$(i\neq k \text{ and } i\neq k+1)$
(3a)	$x_i\otimes x_i\otimes z_k$	$(i\neq k)$
(3b)	$y_i\otimes y_i\otimes z_k$	$(i\neq k)$
(4a)	$x_i\otimes x_i\otimes x_i$	
(4b)	$y_i\otimes y_i\otimes y_i$	
(5a)	$x_{i+1}\otimes x_i\otimes y_{i+1} + y_{i+1}\otimes x_i\otimes x_{i+1}$	
(5b)	$y_{i+1}\otimes y_i\otimes x_{i+1} + x_{i+1}\otimes y_i\otimes y_{i+1}$	
(6a)	$x_i\otimes x_i\otimes y_i - x_i\otimes x_{i+1}\otimes y_{i+1} - x_{i+1}\otimes x_i\otimes y_{i+1}$	
(6b)	$y_i\otimes y_i\otimes x_i - y_i\otimes y_{i+1}\otimes x_{i+1} - y_{i+1}\otimes y_i\otimes x_{i+1}$.	

添え字 i,j,k は $1,2,\dots,g$ をわたり，mod g で考える．

このうち (3), (4), (5), (6) の I の値は，0 ((3), (4), (5) のとき), 1/2 ((6) のとき)，であることが定義から直ちにわかるので，(1), (2) の場合だけを調べれば良い．

2 The harmonic volumes of hyperelliptic curves

自然な射影 $H^{\otimes 3} \to \wedge^3 H$ を用いて，短完全列からなる可換図式

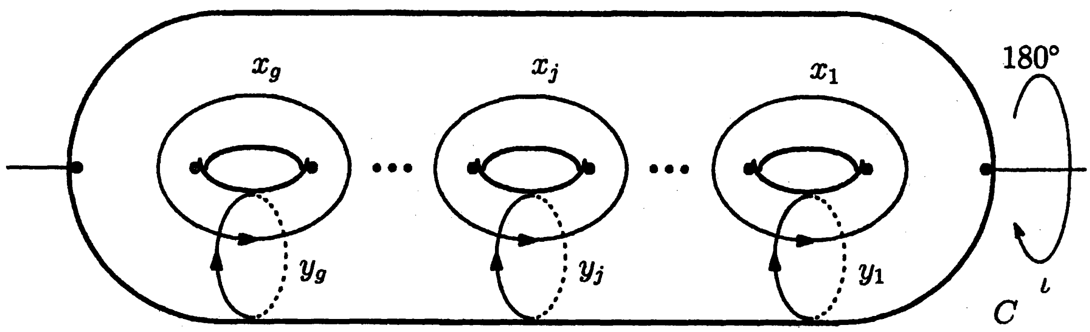
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (H^{\otimes 3})' \arrow[r] \arrow[d] & H^{\otimes 3} \arrow[r] \arrow[d] & H^{\oplus 3} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] & \wedge^3 H \arrow[r] & H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を満たすように P を定める．ただし，$H^{\oplus 3} \ni (a,b,c) \mapsto a+b+c \in H$ である．調和体積 $I : (H^{\otimes 3})' \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は，$\nu = 2I : P \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に拡張することもできる．調和体積に興味を持つ人々はこの ν に興味を持ってきたように思われる．X の Jacobian における algebraic cycle $X - X^-$ が自明ならば，$\nu = 0$ である [5]．一つの目標として，$\nu \neq 0$ となる X を見つけたいのだが，いまだにできていない．なお，$\mathbb{C}$ 上に拡張した調和体積を用いて，Harris は algebraic cycle $X - X^-$ が自明でない例を見つけた．詳しくは，Section 4 を参照せよ．一方，$\wedge^3 H$ では見えないが，$H^{\otimes 3}$ で見えるものがあるかもしれない．Harris [4] によれば，X が超楕円曲線 C のとき，$C - C^-$ が自明なので，$2I \equiv 0 \bmod \mathbb{Z}$，つまり，$I \equiv 0$ または $1/2 \bmod \mathbb{Z}$ となることが知られていた．そこで，ν では見分けられない違いを決定しようと試み，超楕円曲線の調和体積を完全に決定した．

Theorem 2.1 任意の超楕円曲線 C に対して，$\{x_i, y_i\}_{i,j=1,\ldots,g}$ を以下の図のような $H_1(C;\mathbb{Z}) = H$ の symplectic 基底とし，$z_i = x_i$, or y_i とする．このとき，次が成立する．

$$I(z_i \otimes z_j \otimes z_k) \equiv \ 0 \quad \textit{for } i \neq j,\ j \neq k \textit{ and } k \neq i,$$

$$I(x_i \otimes y_i \otimes z_k - x_{k+1} \otimes y_{k+1} \otimes z_k) \equiv \begin{cases} 1/2 & \textit{for } i < k,\ k = 2,3,\ldots,g-1 \textit{ and } z_k = y_k, \\ 0 & \textit{for } i \geq k+2,\ k = g \textit{ or } z_k = x_k. \end{cases}$$



ただし，ι は C 上の超楕円対合とし，●は 2 重分岐被覆 $\pi : C \to \mathbb{C}P^1$ の分岐点

証明は，I が Riemann 面の moduli 空間，正確には Torelli 空間，を正則的 (特に連続的) に変化することを利用して，超楕円曲線 C_0，$w^2 = z^{2g+2} - 1$ のコンパクト化，の直接計算に帰着させる．

3 Topological viewpoints

Σ_g を向き付けられた種数 g の閉曲面とする．写像類群 $\mathcal{M}_g$ は，Σ_g の向きを保つ微分同相写像の isotopy 類，として定められる．$\mathcal{M}_g$ は H に自然に作用する．I は $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_g}((H^{\otimes 3})', \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ の元だとみなすことができる．Theorem 2.1 の証明は言わば "解析的" なものであった．ここで，**コンパクト Riemann 面の調和体積はどこまでホモロジー代数でとらえられるか?**，を考えたい．答えは，超楕円曲線ではできた (それ以外はよくわからない)．超楕円的写像類群 Δ_g を $\mathcal{M}_g$ における ι の isotopy 類の中心化群とする．

Theorem 3.1 (Birman-Hilden [1], Theorem 8) Δ_g は以下の表示を持つ．

- generators: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2g+1}$
- relations:

  (1) $\sigma_n\sigma_m = \sigma_m\sigma_n, |n-m| \geq 2,$

  (2) $\sigma_n\sigma_{n+1}\sigma_n = \sigma_{n+1}\sigma_n\sigma_{n+1}, 1 \leq n \leq 2g,$

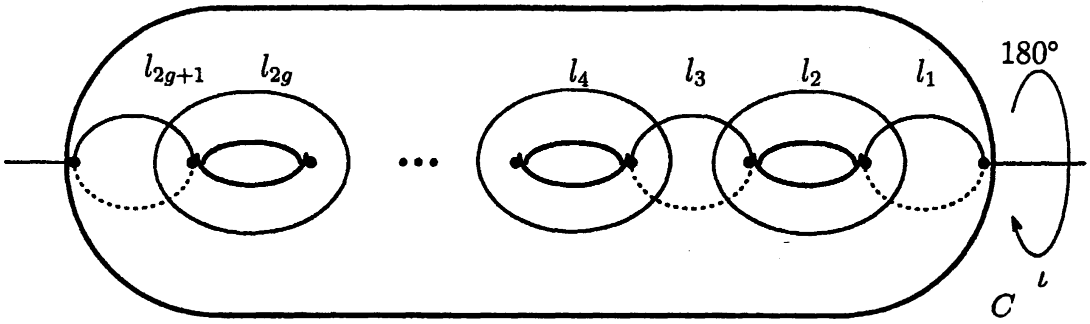
  (3) $\theta^{2g+2} = 1,$

  (4) $(\theta\kappa)^2 = 1,$

  (5) $\sigma_1(\theta\kappa) = (\theta\kappa)\sigma_1,$

  ただし，$\theta = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{2g+1}$，$\kappa = \sigma_{2g+1}\sigma_{2g}\cdots\sigma_1$ である．

Remark 3.2 $\tau_i, i = 1, 2, \ldots, 2g+1$ を C 上の単純閉曲線 l_i に沿った Dehn twists とすれば，$\tau_i = \sigma_i$ であることが知られている．



超楕円曲線 C においては，$I \in \mathrm{Hom}_{\Delta_g}((H^{\otimes 3})', \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ とみなすことができる．

Theorem 3.3 $g \geq 3$ のとき，

$$\mathrm{Hom}_{\Delta_g}((H^{\otimes 3})', \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

証明は Δ_g と対称群のコホモロジーの計算を頑張る．途中経過をグッとにらむと，Theorem 2.1 が得られる．

Theorem 3.3 は次の田中淳志氏の結果の幾何的解釈の一つを与える．

Theorem 3.4 (Tanaka[8], Theorem 1.1)
$g \geq 2$ のとき，

$$H_1(\Delta_g; H) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

この定理と普遍係数定理から $H^1(\Delta_g; \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が得られる．短完全列

$$0 \longrightarrow (H^{\otimes 3})' \longrightarrow H^{\otimes 3} \longrightarrow H^{\oplus 3} \longrightarrow 0$$

を用いて，$H^1(\Delta_g; \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$ の生成元が I に由来を持つことがわかる．

4 Appendix (Iterated integrals of Fermat curves)

この節では，$\mathbb{C}P^2$ 上の非特異代数曲線，次数 $N \geq 4$ の Fermat curve $F(N) := \{(X : Y : Z) \in \mathbb{C}P^2; X^N + Y^N = Z^N\}$ の反復積分，をまとめておく．計算結果自体は，Proposition 4.3 以外は Tretkoff-Tretkoff [9] によるものである．$\zeta = \zeta_N = \exp(2\pi\sqrt{-1}/N), \zeta_{2N} = \exp(2\pi\sqrt{-1}/2N)$ とおき，α, β を $F(N)$ 上の正則自己同型

$$\alpha(X : Y : Z) = (\zeta X : Y : Z),\ \beta(X : Y : Z) = (X : \zeta Y : Z)$$

と定める．α, β の作用は可換であることに注意する．正則写像

$$\pi : F(N) \ni (X : Y : Z) \mapsto (X : Z) \in \mathbb{C}P^1$$

は N 重分岐被覆で，分岐点は $\{\alpha^i(1:0:1) \in \mathbb{C}P^1\}_{i=0,1,\ldots,N-1}$ となる．$F(N)$ の種数は Riemann-Hurwitz 公式を用いて，$(N-1)(N-2)/2$ がすぐにわかる．
以下簡単のため，$x = X/Z, y = Y/Z$ として話を進める．$i = 0, 1, \ldots, N-1$ に対して，$P_i = \alpha^i(1,0), Q_i = \beta^i(0,1)$ と定める．単連結領域 $\Omega = \mathbb{C} \backslash \bigcup_{j=0}^{j=N-1} \{t\zeta^j ; |t| \geq 1, t \in \mathbb{R}\}$ に対して，$\pi^{-1}(\Omega)$ は N 枚の弧状連結成分に分かれるが，Q_i を含む成分を Ω_i とおく．$F(N)$ 上の path $\gamma_0 : [0,1] \ni t \mapsto (t, \sqrt[N]{1-t^N}) \in F(N)$ とする．ただし，$\sqrt[N]{1-t^N} \in [0,1]$ となる分岐をとる．この path を用いて，$F(N)$ 上のループ κ_0 を

$$\gamma_0(\beta\gamma_0)^{-1}(\alpha\beta\gamma_0)(\alpha\gamma_0)^{-1}$$

と定める．ただし，path の積 $l_1 \cdot l_2$ は最初に l_1 をわたり，次に l_2 をわたるものとする．これは Q_0 を基点とするループで，

$$Q_0 \xrightarrow{\Omega_0} P_0 \xrightarrow{\Omega_1} Q_1 \xrightarrow{\Omega_1} P_1 \xrightarrow{\Omega_0} Q_0$$

と動く．

Lemma 4.1 $\kappa \in \{\alpha^i\beta^j\kappa_0\}_{i,j=0,1,\ldots,N-1}$ を $H_1(F(N);\mathbb{Z})$ の元とみなすと，次のような交点数を得る．

$$\begin{cases} \kappa \cdot \alpha\kappa = & 1 & = -\alpha\kappa \cdot \kappa \\ \kappa \cdot \beta\kappa = & 1 & = -\beta\kappa \cdot \kappa \\ \kappa \cdot \alpha\beta\kappa = & -1 & = -\alpha\beta\kappa \cdot \kappa \\ \kappa \cdot \alpha\beta^{-1}\kappa = & 0 & = \alpha\beta^{-1}\kappa \cdot \kappa \end{cases}$$

Lemma 4.1 より，具体的に $\{\alpha^i\beta^j\kappa_0\}_{i=0,1,\ldots,N-3,j=0,1,\ldots,N-2}$ の交点行列を具体的に書き下すことにより，以下を得る．

Proposition 4.2 $\{\alpha^i\beta^j\kappa_0\}_{i=0,1,\ldots,N-3,j=0,1,\ldots,N-2}$ は $H_1(F(N);\mathbb{Z})$ の基底になる．

$\{\omega_{r,s} = x^{r-1}y^{s-1}dx/y^{N-1}\}_{r,s\geq1,r+s\leq N-1}$ は，$F(N)$ 上の正則 1 形式全体の空間の基底となることが知られている．この 1 形式の周期は直接計算から確認することができる [3].

Proposition 4.3

$$\int_{\alpha^i\beta^j\kappa_0} \omega_{r,s} = \frac{B(r/N, s/N)}{N}(1-\zeta^r)(1-\zeta^s)\zeta^{ir+js}$$

ただし，$B(u,v)$ はベータ関数 $\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt \quad (u,v>0)$ である．

$R=\mathbb{Z}[\zeta]$ と定める．$\omega'_{r,s}=\dfrac{N}{B(r/N,s/N)}\omega_{r,s}$ とおけば，

$$\int_{\alpha^i\beta^j\kappa_0}\omega'_{r,s}=(1-\zeta^r)(1-\zeta^s)\zeta^{ir+js}\in R$$

が成り立つ．

Proposition 4.4 $\int_{\alpha^i\beta^j\kappa_0}\omega'_{r,s}\omega'_{l,m}$ は mod R で以下のように計算される．

$$\frac{N^2(1-\zeta^{l+r})(1-\zeta^{m+s})\zeta^{i(r+l)+j(s+m)}}{B(r/N,s/N)B(l/N,m/N)}\int_0^1\left(\int_0^t\frac{t_1^{r-1}dt_1}{(1-t_1^N)^{(N-s)/N}}\right)\frac{t^{l-1}dt_2}{(1-t_2^N)^{(N-m)/N}}.$$

Harris [5] は，$\mathbb{C}/R$ に値をもつ拡張された調和体積と上記の計算を用いて，$X=F(4)$ のときに，$2I\neq 0 \bmod \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ を得て，$J(X)$ における algebraic cycle $X-X^-$ が自明でないことを示した．

参考文献

[1] Birman, Joan S.; Hilden, Hugh M: *On the mapping class groups of closed surfaces as covering spaces.* Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969), pp. 81–115. Ann. of Math. Studies, No. 66.

[2] Chen, Kuo Tsai: *Iterated integrals, fundamental groups and covering spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 206 (1975), 83–98.

[3] Gross, Benedict H.; Rohrlich, David E.: *Some results on the Mordell-Weil group of the Jacobian of the Fermat curve.* Invent. Math. 44 (1978), no. 3, 201–224.

[4] Harris, Bruno: *Harmonic volumes.* Acta Math. 150 (1983), no. 1-2, 91–123.

[5] Harris, Bruno: *Homological versus algebraic equivalence in a Jacobian.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 80 (1983), no. 4 i., 1157–1158.

[6] Tadokoro, Yuki: *Harmonic volumes and iterated integrals of hyperelliptic curves.* Preprint.

[7] Pulte, Michael J.: *The fundamental group of a Riemann surface: mixed Hodge structures and algebraic cycles.* Duke Math. J. 57 (1988), no. 3, 721–760.

[8] Tanaka, Atsushi: *The first homology group of the hyperelliptic mapping class group with twisted coefficients.* Topology Appl. 115 (2001), no. 1, 19–42.

[9] Tretkoff, C. L.; Tretkoff, M. D.: *Combinatorial group theory, Riemann surfaces and differential equations.* Contributions to group theory, 467–519, Contemp. Math., 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.