数理解析研究所講究録 1331 巻 2003 年 1-14

波動方程式の解のL^∞評価について

北海道工業大学　横山 和義 (Kazuyoshi Yokoyama)
Hokkaido Institute of Technology

1 序.

本稿では 3 次元空間における波動方程式の解およびその導関数の L^∞ 評価について考察する. これはいわゆるアプリオリ評価であり, たとえば非線形波動方程式の初期値問題において時間局所解を延長するのに用いられる. 波動方程式の十分滑らかな解に特異性が発生するならば解の 2 次導関数は有界ではありえない (blowup-criterion, 例えば [1] 参照). したがって解の 2 次導関数の L^∞ ノルムが有界である限り解を延長することが出来る. 特に解の 2 次導関数が発散し得ないことが分かれば大域解の存在が示される.

波動方程式

$$\partial_t^2 u(x,t) - c^2\Delta_x u(x,t) = F(x,t), \quad x \in \mathbf{R}^3,\ t>0 \tag{1}$$

に対し, $t=0$ で $u=0$, $\partial_t u = 0$ となるような特殊解を $L_c(F)(x,t)$ と置くと, $F \in C^2$ ならば Duhamel の原理により

$$L_c(F)(x,t) = \int_0^t \frac{1}{4\pi c^2(t-s)} \mathrm{d}s \int_{|y-x|=c(t-s)} F(y,s)\,\mathrm{d}S_y \tag{2}$$

と表すことが出来る. そこで以下の節においては $L_c(F)$ および $L_c(\partial_\alpha G)$ の L^∞ 評価とそれを得るための積分表示が論じられる. 結果は F, G および G の導関数に関するウェイト付き L^∞ ノルムを用いた減衰評価である.

ここで紹介する評価は 3 次元空間における 2 次の非線形性をもつ連立波動方程式を解くために利用された ([3, 4, 5, 6, 9]). 同様の問題は [7, 8] でも考えられているが, L^∞ ノルムを直接 L^∞ ノルムで評価している箇所は見られない. [7, 8] の方法は解の表示にあまり依存していないので変数係数の場合や外部問題などで有利であるとも考えられるが, 全空間における初期値問題においては [3, 4, 5, 6] の方が一般的な非線形項を扱うことが出来るので, ここで挙げるような L^∞-L^∞ 型評価が有用な局面もあるのではないかと思う.

この節では (2) で与えた $L_c(F)$ から評価を行うために便利な積分表示を与える．これは実質的には [2] に示されている公式と同じものである．さらに $L_c(\partial_\alpha G)$ に対し，部分積分を実行するための変形を示す．

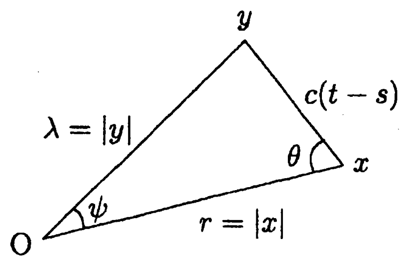
$x \in \mathbf{R}^3$, $t > 0$ を任意にとって固定し，$r = |x|$ とおく．$\mathbf{R}^3$ における直交変換 A を $A(0,0,r) = x$ となるようにとり，(2) において

$$y - x = c(t-s)A(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \quad (0 \le \theta < \pi, 0 \le \varphi < 2\pi)$$

により極座標に変換すると，

$$\frac{1}{4\pi c^2(t-s)}\int_{|y-x|=c(t-s)} F(y,s)\,\mathrm{d}S_y = \frac{t-s}{4\pi}\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi} F(y,s)\,\mathrm{d}\varphi$$

となる．



さらに，$\lambda = \sqrt{r^2 + c^2(t-s)^2 - 2rc(t-s)\cos\theta}$ により積分変数 θ を λ に変換すると，

$$\frac{t-s}{4\pi}\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi} F(y,s)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi cr}\int_{|c(t-s)-r|}^{c(t-s)+r} \lambda\mathrm{d}\lambda\int_0^{2\pi} F(\lambda\xi,s)\,\mathrm{d}\varphi$$

となる．ここで $\xi = A(\sin\psi\cos\varphi, \sin\psi\sin\varphi, \cos\psi)$, $\cos\psi = \{r^2 + \lambda^2 - c^2(t-s)^2\}/2r\lambda$, $\sin\psi = \sqrt{1-\cos^2\psi}$ である．こうして，

命題 1. $A(0,0,r) = x$ となるような直交変換 A に対し

$$\xi = A(\sin\psi\cos\varphi, \sin\psi\sin\varphi, \cos\psi), \tag{3}$$

$$\cos\psi = \frac{r^2 + \lambda^2 - c^2(t-s)^2}{2r\lambda}, \quad \sin\psi = \sqrt{1-\cos^2\psi} \tag{4}$$

とおくと，

$$L_c(F)(x,t) = \frac{1}{4\pi cr}\int_0^t \mathrm{d}s\int_{|c(t-s)-r|}^{c(t-s)+r} \lambda\mathrm{d}\lambda\int_0^{2\pi} F(\lambda\xi,s)\,\mathrm{d}\varphi. \tag{5}$$

次に $F(x,t)=\partial_\alpha G(x,t)$ の場合にさらに式変形を進めるための補題を示す.

補題 1. $\mathbf{R}^2$ の開集合において定義され, $\mathbf{R}^3$ に値をとる C^1 級関数 $\xi=\xi(\lambda,s)$, $|\xi|=1$ に対し,

$$\nabla G(\lambda\xi,s)=\xi[\partial_\lambda\{G(\lambda\xi,s)\}+(\partial_\lambda\xi\wedge\xi)\cdot\Omega G(\lambda\xi,s)]-\lambda^{-1}\xi\wedge\Omega G(\lambda\xi,s), \tag{6}$$

$$\partial_t G(\lambda\xi,s)=\partial_s\{G(\lambda\xi,s)\}+(\partial_s\xi\wedge\xi)\cdot\Omega G(\lambda\xi,s). \tag{7}$$

ここで $\nabla=(\partial_{x_1},\partial_{x_2},\partial_{x_3})$, $\Omega=x\wedge\nabla$.

証明. $\nabla=\dfrac{x}{r}\partial_r-\dfrac{x}{r^2}\wedge\Omega$ が成立つ. ここで $r=|x|$, $\partial_r=\dfrac{x}{r}\cdot\nabla$ である. したがって

$$\nabla G(\lambda\xi,s)=\xi\partial_r G(\lambda\xi,s)-\lambda^{-1}\xi\wedge\Omega G(\lambda\xi,s). \tag{8}$$

さらに, (8) の右辺第 1 項について,

$$\begin{aligned}
\partial_r G(\lambda\xi,s) &= \xi\cdot\nabla G(\lambda\xi,s)\\
&= \partial_\lambda\{G(\lambda\xi,s)\}-\lambda\partial_\lambda\xi\cdot\nabla G(\lambda\xi,s)\\
&= \partial_\lambda\{G(\lambda\xi,s)\}-\lambda\partial_\lambda\xi\cdot\{\xi\partial_r G(\lambda\xi,s)-\lambda^{-1}\xi\wedge\Omega G(\lambda\xi,s)\}\\
&= \partial_\lambda\{G(\lambda\xi,s)\}+\partial_\lambda\xi\cdot\xi\wedge\Omega G(\lambda\xi,s)\\
&= \partial_\lambda\{G(\lambda\xi,s)\}+(\partial_\lambda\xi\wedge\xi)\cdot\Omega G(\lambda\xi,s)
\end{aligned}$$

であるから (6) が得られる. 同様に,

$$\partial_t G(\lambda\xi,s)=\partial_s\{G(\lambda\xi,s)\}-\lambda\partial_s\xi\cdot\nabla G(\lambda\xi,s)$$

に (8) を用いることによって (7) が得られる. 証明終わり.

補題 1 の公式に λ をかけて λs 平面の領域上で積分し, 部分積分を実行することにより次の公式が導かれる.

補題 2. $\mathbf{R}^2$ における区分的に C^1 級の境界をもつ領域 D と, D 上 $\mathbf{R}^3$ に値をとる C^1 級関数 $\xi=\xi(\lambda,s)$, $|\xi|=1$ に対し,

$$\begin{aligned}\iint_D \lambda\nabla G(\lambda\xi,s)\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s &= \int_{\partial D}\lambda\xi n_r G(\lambda\xi,s)\,\mathrm{d}\sigma-\iint_D \partial_\lambda(\lambda\xi)G(\lambda\xi,s)\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s\\ &\quad+\iint_D\{\lambda\xi(\partial_\lambda\xi\wedge\xi)\cdot\Omega G(\lambda\xi,s)-\xi\wedge\Omega G(\lambda\xi,s)\}\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s, \quad (9)\\ \iint_D \lambda\partial_t G(\lambda\xi,s)\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s &= \int_{\partial D}\lambda n_t G(\lambda\xi,s)\,\mathrm{d}\sigma+\iint_D\lambda(\partial_s\xi\wedge\xi)\cdot\Omega G(\lambda\xi,s)\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s. \quad (10)\end{aligned}$$

ここで $n=(n_r,n_t)$ は D の外向き単位法ベクトル場, σ は弧長を表す.

3 評価の枠組.

この節では $L_c(F)$ および $L_c(\partial_\alpha G)$ の L^∞ 評価を与えるための枠組を示す. まず次の命題は命題 1 よりただちにに得られる.

命題 2. $t>0$, $r=|x|$ とする. 正値関数 w ($w\in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^2_+)$, $1/w\in L^1_{loc}(\mathbf{R}^2_+)$) に対して,

$$|L_c(F)(x,t)|\le CI[w](r,t)\parallel |y|w(|y|,s)F(y,s)\parallel_{L^\infty_{y,s}(cs+|y|\le ct+r)}. \quad (11)$$

ここで,

$$I[w](r,t)=\frac{1}{r}\int_0^t\mathrm{d}s\int_{|c(t-s)-r|}^{c(t-s)+r}\frac{1}{w(\lambda,s)}\,\mathrm{d}\lambda. \quad (12)$$

同様に補題 2 を利用して $L_c(\partial_\alpha G)$ の評価を行うためには (3) で与えられる ξ に対して導関数 $\partial\xi$ の評価が必要になる.

補題 3. $x\in\mathbf{R}^3$, $t>0$ を任意にとって固定する. $r=|x|$ とおき, ξ を (3), (4) により定める. このとき $0<s<t$, $|c(t-s)-r|<\lambda<c(t-s)+r$, $0<\varphi<2\pi$ において,

$$|\partial_\lambda\xi|+|\partial_s\xi|\le\begin{cases}(1+2c)\left[\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-\lambda_1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda)(\lambda-\lambda_1)}}\right] & (\lambda_1\ge 0)\\[2ex] (1+2c)\left[\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-\lambda_1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2^2-\lambda^2}}\right] & (\lambda_1<0)\end{cases} \quad (13)$$

$$\lambda_1 = c(t-s) - r,\ \ \lambda_2 = c(t-s) + r. \tag{14}$$

証明.

$$\partial_\lambda \xi = \sqrt{(\partial_\lambda \sin\psi\cos\varphi)^2 + (\partial_\lambda \sin\psi\sin\varphi)^2 + (\partial_\lambda \cos\psi)^2} = \sqrt{(\partial_\lambda \sin\psi)^2 + (\partial_\lambda \cos\psi)^2}$$

および $\sin\psi\partial_\lambda \sin\psi + \cos\psi\partial_\lambda\cos\psi = 0$ により

$$|\partial_\lambda \xi| = \frac{|\partial_\lambda \cos\psi|}{\sin\psi}.$$

一方 (4), (14) により $\partial_\lambda \cos\psi = \dfrac{\lambda^2 + \lambda_1\lambda_2}{2r\lambda^2}$, $\sin\psi = \dfrac{\sqrt{(\lambda_2^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - \lambda_1^2)}}{2r\lambda}$ なので

$$|\partial_\lambda \xi| = \frac{|\lambda^2 + \lambda_1\lambda_2|}{\lambda\sqrt{(\lambda_2^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - \lambda_1^2)}}$$

となる. さらに $\lambda^2 + \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1(\lambda_2 - \lambda) + \lambda(\lambda + \lambda_1)$ に注意すれば

$$|\partial_\lambda \xi| \le \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \lambda_1^2}} + \frac{\sqrt{\lambda + \lambda_1}}{\sqrt{(\lambda_2^2 - \lambda^2)(\lambda - \lambda_1)}}$$

であるから (13) の評価が得られる. 同様に,

$$|\partial_s \xi| = \frac{2c(\lambda_2 + \lambda_1)}{\sqrt{(\lambda_2^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - \lambda_1^2)}}.$$

と $\lambda_2 + \lambda_1 = (\lambda + \lambda_1) + (\lambda_2 - \lambda)$ に注意すれば $\partial_s \xi$ の評価が得られる. 証明終わり.

$x \in \mathbf{R}^3$, $t > 0$ に対し, λ_1, λ_2 を (14) により定め,

$$\begin{aligned} D_1 = & \ \{ (\lambda, s) \,|\, 0 < s < t,\ |\lambda_1| < \lambda < |\lambda_1| + 1,\ \lambda < \lambda_2 \} \\ & \cup \{ (\lambda, s) \,|\, 0 < s < t,\ \lambda_2 - 1 < \lambda < \lambda_2,\ |\lambda_1| < \lambda \}, \\ D_2 = & \ \{ (\lambda, s) \,|\, 0 < s < t,\ |\lambda_1| + 1 < \lambda < \lambda_2 - 1 \} \end{aligned} \tag{15}$$

とおく. 領域 D_2 は空であることもありうる. このように定義すると命題 1 により

$$\begin{aligned} L_c(\partial_\alpha G)(x,t) &= \frac{1}{4\pi cr} \iint_{D_1} \lambda \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}s \int_0^{2\pi} \partial_\alpha G(\lambda\xi, s)\, \mathrm{d}\varphi \\ &\quad + \frac{1}{4\pi cr} \iint_{D_2} \lambda \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}s \int_0^{2\pi} \partial_\alpha G(\lambda\xi, s)\, \mathrm{d}\varphi \end{aligned} \tag{16}$$

となる. 補題 3 により領域 D_2 上では $\partial\xi$ が有界であることに注意する.

命題 3. $t>0,\ r=|x|$ とする. 正値関数 w ($w \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^2_+)$) に対して,

$$|L_c(\partial_\alpha G)(x,t)| \le CJ[w](r,t) \sum_{|a|+|b|\le 1} \|\, |y|w(|y|,s)\partial^a\Omega^b G(y,s)\,\|_{L^\infty_{y,s}(cs+|y|\le ct+r)}\,. \tag{17}$$

ここで,

$$J[w](r,t)=\frac{1}{r}\left[\iint_{D_1}\frac{1}{w(\lambda,s)}\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s+\int_{\partial D_2}\frac{1}{w(\lambda,s)}\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}\left(\frac{1}{\lambda}+|\partial\xi|\right)\frac{1}{w(\lambda,s)}\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s\right] \tag{18}$$

(σ は弧長を表す) は有限であるとする.

証明. (16) において領域 D_2 上の積分に補題 2 を適用することにより,

$$\begin{aligned}|L_c(\partial_\alpha G)(x,t)| \;\le\; & \frac{C}{r}\left[\iint_{D_1}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s\int_0^{2\pi}\lambda|\partial_\alpha G(\lambda\xi,s)|\,\mathrm{d}\varphi+\int_{\partial D_2}\mathrm{d}\sigma\int_0^{2\pi}\lambda|G(\lambda\xi,s)|\,\mathrm{d}\varphi\right.\\ &\left.+\iint_{D_2}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s\int_0^{2\pi}(1+\lambda|\partial\xi|)\{|G(\lambda\xi,s)|+|\Omega G(\lambda\xi,s)|\}\,\mathrm{d}\varphi\right].\end{aligned}$$

これより (17) が導かれる. 証明終わり.

系 1. $(w_1\wedge w_2)(\lambda,s)=\min\{w_1(\lambda,s),w_2(\lambda,s)\}$ とおくと,

$$\begin{aligned}&|L_c(F)(x,t)|\\ &\quad\le C\sum_{i=1}^{2}I[w_i](r,t)\,\|\, |y|(w_1\wedge w_2)(|y|,s)F(y,s)\,\|_{L^\infty_{y,s}(cs+|y|\le ct+r)},\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&|L_c(\partial_\alpha G)(x,t)|\\ &\quad\le C\sum_{i=1}^{2}J[w_i](r,t)\sum_{|a|+|b|\le 1}\|\, |y|(w_1\wedge w_2)(|y|,s)\partial^a\Omega^b G(y,s)\,\|_{L^\infty_{y,s}(cs+|y|\le ct+r)}\,.\end{aligned} \tag{20}$$

証明. $\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{w_1}+\dfrac{1}{w_2}$ とすると $w\le\min\{w_1,w_2\}$. ゆえに命題 2 により

$$\begin{aligned}|L_c(F)(x,t)| \;\le\; & CI[w](r,t)\,\|\, |y|w(|y|,s)F(y,s)\,\|_{L^\infty_{y,s}(cs+|y|\le ct+r)}\\ \le\; & C\sum_{i=1}^{2}I[w_i](r,t)\,\|\, |y|(w_1\wedge w_2)(|y|,s)F(y,s)\,\|_{L^\infty_{y,s}(cs+|y|\le ct+r)}\,.\end{aligned}$$

同様に命題 3 より (20) が従う. 証明終わり.

4 L^∞評価.

命題2や命題3において適当なウェイト $w(\lambda, s)$ を選んで $I(r,t)$, $J(r,t)$ を計算することにより $L_c(F)$, $L_c(\partial_\alpha G)$ の減衰評価が得られる．それぞれ応用例を一つづつ挙げる．詳しくは文献[6]を参照.

定理 1. 関数 $F(x,t)$ は $\mathbf{R}^3 \times [0,\infty)$ において連続であるとする.
$w(\lambda,s) = (1+s+\lambda)^{1+\mu+\nu}(1+|as-\lambda|)^{1-\nu}$ とおくと，$\mu,\nu>0, a\geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}&(1+t+|x|)(1+|ct-|x||)^{\mu}|L_c(F)(x,t)| \\ &\quad \leq C \,\|\, |y|w(|y|,s)F(y,s) \,\|_{L^\infty_{y,s}(cs+|y|\leq ct+|x|)} \,. \end{aligned} \tag{21}$$

証明. $c=1$ としても一般性を失わない．命題2により,

$$I[w](r,t) \leq C(1+t+r)^{-1}(1+|t-r|)^{-\mu}$$

を示せばよい．積分 (12) において変数変換 $\alpha=\lambda+s$, $\beta=\lambda-as$ を行うと,

$$I[w](r,t) = \frac{1}{(a+1)r}\int_{|t-r|}^{t+r}(1+\alpha)^{-1-\mu-\nu}\,\mathrm{d}\alpha \int_{\widehat{\beta}}^{\alpha}(1+|\beta|)^{\nu-1}\,\mathrm{d}\beta. \tag{22}$$

ここで，$\widehat{\beta}=\{(1-a)\alpha+(1+a)(r-t)\}/2$ である．$\widehat{\beta}\geq -a\alpha$ なので,

$$\begin{aligned} I[w](r,t) &\leq \frac{C}{r}\int_{|t-r|}^{t+r}(1+\alpha)^{-1-\mu-\nu}\,\mathrm{d}\alpha\int_0^{(1+a)\alpha}(1+\beta)^{\nu-1}\,\mathrm{d}\beta \\ &\leq \frac{C}{r}\int_{|t-r|}^{t+r}(1+\alpha)^{-1-\mu}\,\mathrm{d}\alpha \\ &\leq \frac{C}{r}\{(1+|t-r|)^{-\mu}-(1+t+r)^{-\mu}\}. \end{aligned} \tag{23}$$

これで $t+1\leq 2r$ の場合は明らかであるから，$t+1\geq 2r$ とする．平均値の定理より適当な ρ $(|t-r|<\rho<t+r)$ をとれば

$$\begin{aligned} (1+|t-r|)^{-\mu}-(1+t+r)^{-\mu} &= \mu(1+\rho)^{-\mu-1}(t+r-|t-r|) \\ &= 2\mu(1+\rho)^{-\mu-1}\min\{r,t\}. \end{aligned} \tag{24}$$

ここで $t+1\geq 2r$ ならば $1+\rho>1+|t-r|\geq(1+t)/2$ であるから，(23), (24) により $I[w](r,t)\leq C(1+t+r)^{-1-\mu}$ を得る．証明終わり.

定理 2. 関数 $G(x,t)$ は $\mathbf{R}^3\times[0,\infty)$ において C^1 級であるとする．

$$w(\lambda,s)=(1+s+\lambda)^{\mu+\nu}(1+|as-\lambda|)^{1-\nu}\quad(\mu,\nu>0,\ a\geq 0)\tag{25}$$

とおくと，$a\neq c$ または $\mu+\nu>1$ ならば

$$\begin{aligned}&(1+|x|)(1+|ct-|x||)^{\mu}|L_c(\partial_\alpha G)(x,t)|\\&\leq C\sum_{|a|+|b|\leq 1}\|\,|y|w(|y|,s)\partial^a\Omega^b G(y,s)\,\|_{L^\infty_{y,s}(cs+|y|\leq ct+|x|)}\,.\end{aligned}\tag{26}$$

以下では $c=1$ とする．命題3により

$$J[w](r,t)\leq C(1+r)^{-1}(1+|t-r|)^{-\mu}\tag{27}$$

を示せば十分である．まず，$D_2=\emptyset$ の場合には定理1の証明と同様にして

$$J[w](r,t)\leq\frac{C}{r}(1+\rho)^{-\mu}\min\{r,t\}\quad(|t-r|<\exists\rho<t+r)$$

が分かる［(23), (24) で μ を $\mu-1$ としたものが得られる］．ところが (14) より $\lambda_2-|\lambda_1|=2\min\{r,t-s\}$ であるから，領域 D_2 の定義 (15) により

$$D_2=\emptyset\iff\lambda_2-|\lambda_1|\leq 2\iff\min\{r,t\}\leq 1,$$

つまり $r\leq 1$ または $t\leq 1$ なので (27) が従う．このように $D_2=\emptyset$ の場合は容易に示されたので，以下 $D_2\neq\emptyset$，つまり $r>1$ かつ $t>1$ としよう．

補題 4. 関数 $w(\lambda,s)$ は (25) で与えられるものとする．このとき

$$\iint_{D_1}\frac{1}{w(\lambda,s)}\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s+\int_{\partial D_2}\frac{1}{w(\lambda,s)}\,\mathrm{d}\sigma\leq Cj_0(r,t).\tag{28}$$

ここで

$$j_0(r,t)=\iint_{\partial D_0}\frac{1}{w(\lambda,s)}\,\mathrm{d}\sigma,\quad D_0=\{\,(\lambda,s)\,|\,0<s<t,\ |\lambda_1|<\lambda<\lambda_2\}.\tag{29}$$

証明．領域 D_1 上の積分において，

$$|\lambda_1|<\lambda<|\lambda_1|+1\ \text{ならば}\quad\frac{1}{w(\lambda,s)}\leq\frac{C}{w(|\lambda_1|,s)},$$

$$\lambda_2-1<\lambda<\lambda_2\ \text{ならば}\quad\frac{1}{w(\lambda,s)}\leq\frac{C}{w(\lambda_2,s)},$$

であることに注意すると,

$$
\begin{aligned}
\iint_{D_1} \frac{1}{w(\lambda,s)}\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s &\leq \iint_{\substack{0<s<t\\ |\lambda_1|<\lambda<|\lambda_1|+1}} \frac{1}{w(\lambda,s)}\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s + \iint_{\substack{0<s<t\\ \lambda_2-1<\lambda<\lambda_2}} \frac{1}{w(\lambda,s)}\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s\\
&\leq C\int_0^t \frac{1}{w(|\lambda_1|,s)}\,\mathrm{d}s + C\int_0^t \frac{1}{w(\lambda_2,s)}\,\mathrm{d}s\\
&\leq Cj_0(r,t).
\end{aligned}
$$

∂D_2 上の積分についても同様. 証明終わり.

補題 5. (25) の $w(\lambda,s)$ において, $a\neq 1$ または $\mu+\nu>1$ とする. このとき (29) で与えられる $j_0(r,t)$ について,

$$
j_0(r,t)\leq C(1+|t-r|)^{-\mu} \tag{30}
$$

が成り立つ [$c=1$ としている].

証明. 境界 ∂D_0 のうち $0\leq s\leq t, \lambda=|\lambda_1|$ における積分を考える. その他も同様 (容易) である.

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{w(|\lambda_1|,s)}\,\mathrm{d}s &= \int_0^{(t-r)_+} \frac{1}{w(|\lambda_1|,s)}\,\mathrm{d}s + \int_{(t-r)_+}^t \frac{1}{w(|\lambda_1|,s)}\,\mathrm{d}s\\
&=: j_{00}(r,t)+j_{01}(r,t)
\end{aligned} \tag{31}
$$

を評価すればよい. まず $j_{00}(r,t)$ については, $|\lambda_1|=\lambda_1$ として直接計算すれば

$$
\begin{aligned}
j_{00}(r,t) &= \int_0^{(t-r)_+} (1+s+\lambda_1)^{-\mu-\nu}(1+|as-\lambda_1|)^{\nu-1}\,\mathrm{d}s\\
&= (1+|t-r|)^{-\mu-\nu}\int_0^{(t-r)_+} (1+|(a+1)s-(t-r)|)^{\nu-1}\,\mathrm{d}s\\
&\leq C(1+|t-r|)^{-\mu}.
\end{aligned}
$$

次に $j_{01}(r,t)$ については $|\lambda_1|=-\lambda_1$ なので

$$
\begin{aligned}
j_{01}(r,t) &= \int_{(t-r)_+}^t (1+s-\lambda_1)^{-\mu-\nu}(1+|as+\lambda_1|)^{\nu-1}\,\mathrm{d}s\\
&= \int_{(t-r)_+}^t (1+r-t+2s)^{-\mu-\nu}(1+|(a-1)s+t-r|)^{\nu-1}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{32}
$$

従って $a=1$ ならば $\mu+\nu>1$ の場合に $j_{01}(r,t)\leq C(1+|t-r|)^{-\mu}$ となることが直接計算により確かめられる. $a\neq 1$ とすると, $|t-r|<1$ の場合は

$$
j_{01}(r,t)\leq C\int_{(t-r)_+}^t (1+|as+\lambda_1|)^{-\mu-1}\,\mathrm{d}s\leq C
$$

でよいから $K := |t-r| \geq 1$ としよう. (32) において $s = K\tau$ と変数変換すると

$$
\begin{aligned}
j_{01}(r,t) &= K\int_{(t-r)_+/K}^{t/K}(1+r-t+2K\tau)^{-\mu-\nu}(1+|(a-1)K\tau+t-r|)^{\nu-1}\,\mathrm{d}\tau \\
&= K^{-\mu}\int_{(t-r)_+/K}^{t/K}\left(\frac{1}{K}+\frac{r-t}{K}+2\tau\right)^{-\mu-\nu}\left(\frac{1}{K}+\left|(a-1)\tau+\frac{t-r}{K}\right|\right)^{\nu-1}\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

よって $r > t$ ならば

$$
j_{01}(r,t) \leq CK^{-\mu}\int_0^{t/K}(1+\tau)^{-\mu-\nu}|(a-1)\tau-1|^{\nu-1}\,\mathrm{d}\tau \leq CK^{-\mu},
$$

$t \leq r$ ならば

$$
j_{01}(r,t) \leq CK^{-\mu}\int_1^{t/K}\tau^{-\mu-\nu}|(a-1)\tau+1|^{\nu-1}\,\mathrm{d}\tau \leq CK^{-\mu}.
$$

よって (30) が示された. 証明終わり.

補題4, 5により, 残る (18) の右辺第3項を評価すればよい. 補題3よりただちに次が得られる.

補題 6. 命題3において,

$$
\iint_{D_2}\left(\frac{1}{\lambda}+|\partial\xi|\right)\frac{1}{w(\lambda,s)}\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s \leq C\{j_1(r,t)+j_2(r,t)\}. \tag{33}
$$

ただし,

$$
j_1(r,t) = \iint_{D_2,\lambda_1\geq 0}\frac{1}{w(\lambda,s)\sqrt{1+\lambda-\lambda_1}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_2-\lambda}}\right)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s, \tag{34}
$$

$$
j_2(r,t) = \iint_{D_2,\lambda_1\leq 0}\frac{1}{w(\lambda,s)\sqrt{1+\lambda}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda+\lambda_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_2-\lambda}}\right)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}s. \tag{35}
$$

あとは $j_1(r,t), j_2(r,t)$ を評価すればよい. $w(\lambda,s)$ を (25) のようにとり, 積分の変数変換

$$
\alpha = \lambda + s, \quad \beta = \lambda - as
$$

を行うと, (34), (35) は次の 4 つの積分の和でおさえられる:

$$
\begin{aligned}
j_{11}(r,t) &= \int_{|t-r|}^{t+r} (1+r-t+\alpha)^{-1/2}(1+\alpha)^{-\mu-\nu}\,\mathrm{d}\alpha \\
&\quad \times \int_{\widehat{\beta}}^{\alpha} (1+a\alpha+\beta)^{-1/2}(1+|\beta|)^{\nu-1}\,\mathrm{d}\beta, \qquad (36)\\
j_{12}(r,t) &= \int_{|t-r|}^{t+r} (1+r-t+\alpha)^{-1/2}(1+t+r-\alpha)^{-1/2}(1+\alpha)^{-\mu-\nu}\,\mathrm{d}\alpha \\
&\quad \times \int_{\widehat{\beta}}^{\alpha} (1+|\beta|)^{\nu-1}\,\mathrm{d}\beta, \qquad (37)\\
j_{21}(r,t) &= \int_{|t-r|}^{t+r} (1+\alpha)^{-\mu-\nu}\,\mathrm{d}\alpha \\
&\quad \times \int_{\widehat{\beta}}^{\alpha} (1+\beta-\widehat{\beta})^{-1/2}(1+a\alpha+\beta)^{-1/2}(1+|\beta|)^{\nu-1}\,\mathrm{d}\beta, \qquad (38)\\
j_{22}(r,t) &= \int_{|t-r|}^{t+r} (1+t+r-\alpha)^{-1/2}(1+\alpha)^{-\mu-\nu}\,\mathrm{d}\alpha \\
&\quad \times \int_{\widehat{\beta}}^{\alpha} (1+a\alpha+\beta)^{-1/2}(1+|\beta|)^{\nu-1}\,\mathrm{d}\beta. \qquad (39)
\end{aligned}
$$

ここで, $\widehat{\beta}=\{(1-a)\alpha+(1+a)(r-t)\}/2$ である. さらに以下の補題 7, 8 を使うとやや長い計算の結果

$$j_{kl}(r,t) \le C(1+|t-r|)^{-\mu} \quad (k,l=1,2)$$

を示すことが出来るが, かなり煩雑なのでここには述べない. 詳しくは文献 [6] を参照.

補題 7. (*i*) $\mu>0,\ \rho>0$ とすると,

$$\int_{|t-r|}^{t+r} (1+\alpha)^{-\mu-\rho}(1+r-t+\alpha)^{\rho-1}\,\mathrm{d}\alpha \le C(1+|t-r|)^{-\mu}. \qquad (40)$$

(*ii*) $\mu>0$ とすると,

$$\int_{|t-r|}^{t+r} (1+\alpha)^{-\mu}(1+r-t+\alpha)^{-1/2}(1+t+r-\alpha)^{-1/2}\,\mathrm{d}\alpha \le C(1+|t-r|)^{-\mu}, \quad (41)$$

$$\int_{|t-r|}^{t+r} (1+\alpha)^{-\mu-1/2}(1+t+r-\alpha)^{-1/2}\,\mathrm{d}\alpha \le C(1+|t-r|)^{-\mu}. \qquad (42)$$

(i) $|t-r|<1$ の場合は

$$\int_{|t-r|}^{t+r}(1+\alpha)^{-\mu-\rho}(1+r-t+\alpha)^{\rho-1}\,\mathrm{d}\alpha \leq C\int_{|t-r|}^{t+r}(1+r-t+\alpha)^{-\mu-1}\,\mathrm{d}\alpha \leq C$$

でよい．$|t-r|\geq 1$ の場合は $K=|t-r|$ とおいて積分の変数変換 $\alpha=K\beta$ を行うと，

$$\begin{aligned}
&\int_{|t-r|}^{t+r}(1+\alpha)^{-\mu-\rho}(1+r-t+\alpha)^{\rho-1}\,\mathrm{d}\alpha\\
\leq\;& K\int_{1}^{(t+r)/K}(1+K\beta)^{-\mu-\rho}(1+r-t+K\beta)^{\rho-1}\,\mathrm{d}\beta\\
\leq\;& K^{-\mu}\int_{1}^{(t+r)/K}\beta^{-\mu-\rho}(\beta-1)^{\rho-1}\,\mathrm{d}\beta \leq CK^{-\mu}\leq C(1+|t-r|)^{-\mu}.
\end{aligned}$$

(ii) いずれも $(1+\alpha)^{-\mu}\leq(1+|t-r|)^{-\mu}$ として

$$\int_{a}^{b}(\alpha-a)^{-1/2}(b-\alpha)^{-1/2}\,\mathrm{d}\alpha=\pi$$

を用いればよい．証明終わり．

補題 8. $a\geq 0,\ \kappa\in\mathbf{R},\ |t-r|<\alpha<t+r$ に対し

$$I(\alpha)=\int_{\widehat{\beta}}^{\alpha}(1+\beta-\widehat{\beta})^{-1/2}(1+|\beta|)^{-1+\kappa}\,\mathrm{d}\beta, \tag{43}$$

$$\widehat{\beta}=\frac{1}{2}\{(1-a)\alpha+(1+a)(r-t)\} \tag{44}$$

とおくと，

(i) $a=0$ ならば

$$I(\alpha)\leq\begin{cases}C(1+r-t+\alpha)^{\kappa-1/2} & (\kappa<1/2),\\ C(1+\alpha)^{\kappa-1/2} & (\kappa>1/2).\end{cases} \tag{45}$$

(ii) $a>0$ ならば

$$I(\alpha)\leq\begin{cases}C(1+|\widehat{\beta}|)^{\kappa-1/2} & (0<\kappa<1/2),\\ C(1+\alpha)^{\kappa-1/2} & (\kappa>1/2).\end{cases} \tag{46}$$

(i) $a=0$ならば$\widehat{\beta}=(\alpha+r-t)/2>0$である．部分積分により

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{\widehat{\beta}}^{\alpha} 2\partial_\beta(1+\beta-\widehat{\beta})^{1/2}\cdot(1+\beta)^{-1+\kappa}\,\mathrm{d}\alpha \\ &\le 2(1+\alpha)^{\kappa-1/2}+2(1-\kappa)\int_{\widehat{\beta}}^{\alpha}(1+\beta)^{\kappa-3/2}\,\mathrm{d}\beta. \end{aligned}$$

これより (45) が得られる．

(ii) $\widehat{\beta}\ge 0$であれば(i)と同じ方法で証明出来るので$\widehat{\beta}<0$とする．$-\widehat{\beta}/a<\alpha$に注意して

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{\widehat{\beta}}^{\widehat{\beta}/2}+\int_{\widehat{\beta}/2}^{-\widehat{\beta}/a}+\int_{-\widehat{\beta}/a}^{\alpha} \\ &=: I_1(\alpha)+I_2(\alpha)+I_3(\alpha) \end{aligned}$$

のように積分区間を分割する．まず$I_1(\alpha)$においては$(1+|\beta|)^{-1+\kappa}\le C(1+|\widehat{\beta}|)^{-1+\kappa}$だから

$$\begin{aligned} I_1(\alpha) &\le C(1+|\widehat{\beta}|)^{-1+\kappa}\int_{\widehat{\beta}}^{\widehat{\beta}/2}(1+\beta-\widehat{\beta})^{-1/2}\,\mathrm{d}\beta \\ &\le C(1+|\widehat{\beta}|)^{\kappa-1/2}. \end{aligned} \tag{47}$$

次に$I_2(\alpha)$においては$(1+\beta-\widehat{\beta})^{-1/2}\le C(1+|\widehat{\beta}|)^{-1/2}$なので

$$\begin{aligned} I_2(\alpha) &\le C(1+|\widehat{\beta}|)^{-1/2}\int_{\widehat{\beta}/2}^{-\widehat{\beta}/a}(1+|\beta|)^{-1+\kappa}\,\mathrm{d}\beta \\ &\le C(1+|\widehat{\beta}|)^{\kappa-1/2}. \end{aligned} \tag{48}$$

最後に$I_3(\alpha)$においては$|\beta|=\beta$, $(1+\beta-\widehat{\beta})^{-1/2}\le C(1+\beta)^{-1/2}$により

$$I_3(\alpha) \le C\int_{\alpha}^{-\widehat{\beta}/a}(1+\beta)^{\kappa-3/2}\,\mathrm{d}\beta. \tag{49}$$

よって (47)-(49) により (46) が従う．証明終わり．

References

[1] S. Alinhac, *Blowup for Nonlinear Hyperbolic Equations*, Birkhäuser.

[2] F. John, *Lower bounds for the life span of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), 1-35.

[3] S. Katayama, *Global existence for a class of systems of nonlinear wave equations in three space dimensions*, preprint.

[4] S. Katayama, *Global and almost global existence for systems of nonlinear wave equations with different propagation speeds*, preprint.

[5] S. Katayama, *Global existence for systems of wave equations with nonresonant nonlinearities and null forms*, preprint.

[6] K. Kubota and K. Yokoyama, *Global existence of classical solutions to systems of nonlinear wave equations with different speeds of propagation*, Japan. J. Math., **27** (2001), 113-202.

[7] T. C. Sideris and S.-Y. Tu, *Global existence for systems of nonlinear wave equations in 3D with Multiple speeds*, SIAM J. Math. Anal., **33** (2001), 477-488.

[8] C. D. Sogge, *Global existence for nonlinear wave equations with multiple speeds*, preprint.

[9] K. Yokoyama, *Global existence of classical solutions to systems of wave equations with critical nonlinearity in three space dimensions*, J. Math. Soc. Japan, **52** (2000), 609-632.