数理解析研究所講究録 1331 巻 2003 年 50-66

半線型波動方程式系に対する存在定理

静岡大学工学部　久保 英夫 (Hideo Kubo)

Faculty of Engineering, Shizuoka University

1. はじめに

このノートでは次のような半線型波動方程式系に対する初期値問題ついて考察する:

$$(\partial_t^2 - c_j^2\Delta)u_j = F_j(u_1, u_2, \cdots, u_m), \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^3, \tag{1.1}$$

$$u_j(0,x) = \varphi_j(x), \quad \partial_t u_j(0,x) = \psi_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{1.2}$$

但し, $j = 1, 2, \cdots, m$, $c_j > 0$, $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ とし, F_j は $F_j(0,0,\cdots,0) = 0$ を満たし, 各変数に関して Lipschitz 連続な関数とする.

ここで考える問題は, 初期値が十分小さければ, 常に上の初期値問題が時間大域解を持つような c_j や F_j に対する条件を見出すことである. F_j が未知関数自身のみならず, その 1 階および 2 階微分にも依存しているような場合については, [11], [19] やそれらの参考文献を参照されたい. 本論へ進む前に, いくつかの記号を準備し, 単独方程式の場合に知られていることを整理しておく.

1.1. 記号.

- $f \lesssim g$ $:\Longleftrightarrow$ f, g およびそれらの変数に依存しない正定数 C が存在して, $f \le Cg$ が成立
- $x \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\langle x \rangle = \sqrt{1+|x|^2}$ とおく.
- $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $a \vee b := \max\{a,b\}$, $a \wedge b := \min\{a,b\}$ とおく.
- 集合 A に対して, χ_A はその特性関数を表すものとする.

1.2. 単独方程式の場合. ここでは, 次のような単独の半線型波動方程式に対する初期値問題について, 一般の次元における既知の結果を振り返ることにする:

$$(\partial_t^2 - c^2\Delta)u = |u|^p, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

$$u(0,x) = \varepsilon f(x), \quad \partial_t u(0,x) = \varepsilon g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

但し, $p > 1$, $c > 0$, $n \ge 2$, $\varepsilon > 0$, f, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする. このような問題は, Strauss [23] において, 非線型項による摂動を受けた線型方程式の解の挙動の解析に関する問題の一例

として取り上げられている. 即ち, 初期値問題 (1.3)–(1.4) の解を, (1.3) に対応する斉次波動方程式

$$(\partial_t^2 - c^2\Delta)u = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \tag{1.5}$$

に同じ初期条件 (1.4) を課した初期値問題の (時間大域) 解からの摂動として特徴づけようとするものである. そして, Strauss [24] により, $p_0(n)$ なる指数が次の 2 次方程式の正根として導入された:

$$(n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0. \tag{1.6}$$

例えば, $p_0(3) = 1 + \sqrt{2}$ (> 2) である. 以下の結果から, $\varepsilon > 0$ のとき, 初期値問題 (1.3)–(1.4) の小さな解が常に時間大域的に存在するか否かは, p と $p_0(n)$ の大小関係によって決定されることが分かる.

まず, $1 < p < p_0(n)$ の場合には, Sideris [22] により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, (1.3)–(1.4) の解が時間大域的に存在しないような初期値 f, g を選べることが示された. さらに, $n = 2$, 3 で $p = p_0(n)$ の場合も同様であることが, Schaeffer [21] により示されている.

逆に, $n = 3$ で $p > p_0(3)$ の場合には, ある ε_0 があって, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ならば任意の f, g に対して (1.3)–(1.4) の解が時間大域的に存在することが, John [9] により示された. 以下では, この種の命題を (SG) と略記することがある. さて, その後, 多くの研究がなされ (例えば, [7, 8, 2, 18, 28] やそれらの参考文献), Georgiev, Lindblad and Sogge [6] により, 一般の $n \geq 2$ に対して (SG) が示された. その証明では, 重みつき Strichartz 評価が本質的な役割を果たしている. さらに, その評価式の証明は双曲面上のフーリエ変換を用いることにより単純化できることが, Tataru [26] によって指摘されている. その評価を基にして, D'Anconer, Georgiev and Kubo [3] は初期値の台がコンパクトである必要がないことを示した.

一方, 低次元の場合には, 初期値の無限遠方での減衰度が解の存在・非存在に影響を与えることが詳しく調べられている. 実際,

$$f(x) \equiv 0, \quad g(x) \geq \langle x \rangle^{-\kappa-1} \tag{1.7}$$

のように初期値を選ぶと, 任意の $p > 1$ に対して, $\kappa < \kappa_0 := 2/(p-1)$ ならば, (SG) が成り立たないことが, Takamura [25] により示されている. つまり, $p > p_0(n)$ であって, なおかつ ε がどんなに小さくても, 初期値の無限遠方での減衰度が悪いと初期値問題 (1.3)–(1.4) の解は時間大域的に存在しないのである. さらに, $\kappa_0 = 2/(p-1)$ がある意味で臨界値で

あることが知られている. それを見るために, 次のような空間を導入する:

$$Y(\kappa)=\{(\varphi,\psi)\in C^1(\mathbb{R}^n)\times C(\mathbb{R}^n):\ \|(\varphi,\psi)\|_{Y(\kappa)}<\infty\}, \tag{1.8}$$
$$\|(\varphi,\psi)\|_{Y(\kappa)}=\sum_{|\alpha|\le 1}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\langle x\rangle^{\kappa+|\alpha|}|\partial_x^\alpha\varphi(x)|+\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\langle x\rangle^{\kappa+1}|\psi(x)|,$$

すると, $\kappa\ge\kappa_0$, $p>p_0(n)$ ならば, 任意の $(f,g)\in Y(\kappa)$ に対して (SG) が成り立つことが, $n=3$ のとき Asakura [1], Pecher [20]; $n=2$ のとき Kubota [17], Tsutaya [27] により示されている ($n\ge 4$ で初期値が球対称の場合は [12]).

2. 連立系の場合

まず, 次のようなシステムにおいて, $c_1=c_2$ の場合が Del Santo, Georgiev and Mitidieri [4] によって研究された:

$$\begin{cases}(\partial_t^2-c_1^2\Delta)u_1=|u_2|^p, & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n,\\ (\partial_t^2-c_2^2\Delta)u_2=|u_1|^q, & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n.\end{cases} \tag{2.1}$$

但し, p, $q>1$, $n\ge 2$ とする. そして

$$p^*=\frac{n-1}{2}p-\frac{n+1}{2},\quad q^*=\frac{n-1}{2}q-\frac{n+1}{2}, \tag{2.2}$$
$$\alpha=pq^*-1,\quad \beta=qp^*-1,\quad \Gamma=\alpha+p\beta \tag{2.3}$$

とおくと, Γ が単独の場合の $p_0(n)$ に対応する量であることが導かれた ([5], [13] も参照). さて, (2.1) と類似の問題として

$$\begin{cases}(\partial_t^2-c_1^2\Delta)u_1=|\partial_t u_2|^2, & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^3,\\ (\partial_t^2-c_2^2\Delta)u_2=|\partial_t u_1|^2, & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^3\end{cases} \tag{2.4}$$

に対する初期値問題を考える. この問題について, $c_1=c_2$ ならば (SG) が成り立たず, 一方, $c_1\ne c_2$ ならば (SG) が成り立つことが知られている (例えば, [10], [29]). つまり, 伝播速度の違いが解の存在・非存在に影響を及ぼし得るのである. この事実から, (2.1) についても, $c_1\ne c_2$ ならば Γ が変化することが期待される. しかし, この予想は正しくないことが, Kubo and Ohta [14] により示された. すなわち, $n=3$ のとき, 勝手な c_1, c_2 に対して, $\Gamma>0$ ならば (SG) が成り立ち, $\Gamma\le 0$ ならば (SG) が成り立たない. 以下では, 右辺の関数をより一般なものとして, 伝播速度の違いが解の存在・非存在に影響を与えるような状況について考察することにする. 具体的には, (1.1) の右辺が

$$F_j(u_1,u_2,\cdots,u_m)=\sum_{k,l=1}^{m}A_j^{kl}|u_k|^{p_{jkl}}|u_l|^{q_{jkl}},$$

のように書けているものとする. 但し, p_{jkl}, $q_{jkl} \geq 1$, A_j^{kl} は定数である. 以下では, $n=3$ とする. すると, 考える問題は, $j=1,\cdots,m$ として

$$(\partial_t^2 - c_j^2\Delta)u_j = \sum_{k,l=1}^{m} A_j^{kl}|u_k|^{p_{jkl}}|u_l|^{q_{jkl}}, \quad (t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3, \tag{2.5}$$

$$u_j(0,x) = \varphi_j(x), \quad \partial_t u_j(0,x) = \psi_j(x), \quad x\in\mathbb{R}^3. \tag{2.6}$$

となる. これから述べる結果は, 太田雅人氏との共同研究 ([15]) に基づくものである.

2.1. **非線型項のオーダーが一致している場合.** ここでは, 全ての F_j が原点付近で同じオーダーであることを仮定する. すなわち, ある $\alpha \geq 1$ があって

$$p_{jkl} + q_{jkl} = \alpha + 1 \quad (j,k,l = 1,\cdots,m) \tag{2.7}$$

を満たすとする. 次節でみるように, この仮定が満たされない場合, 状況はより複雑になる.

さて, 上の初期値問題において伝播速度が全て等しい場合, すなわち $c_1 = c_2 = \cdots = c_m$ のときには, 単独方程式についての結果を応用することで, $\alpha > \sqrt{2}$ ならば (SG) が成り立ち, $1 \leq \alpha \leq \sqrt{2}$ ならば (SG) が成り立たないことが分かる. 従って, 伝播速度が異なれば, $1 \leq \alpha \leq \sqrt{2}$ であっても (SG) が成り立つような条件を見出すことが問題である. そこで, F_j の係数に対して次のような条件を課す:

$$A_j^{kk} = 0 \quad (j,k = 1,\cdots,m). \tag{2.8}$$

この仮定は, 各 F_j において自己相互作用を表すような項 $(u_k)^2$ $(k=1,\cdots,m)$ は全て除かれることを意味する.

以下では, 初期値問題 (2.5)–(2.6) を次のような積分形で扱う:

$$u_j = K_{c_j}[\varphi_j,\psi_j] + L_{c_j}[F_j(u_1,\cdots,u_m)] \quad \text{in} \quad [0,\infty)\times\mathbb{R}^3. \tag{2.9}$$

ここで, $K_c[\varphi,\psi](t,x)$, $L_c[F](t,x)$ は次のように定義される:

$$K_c[\varphi,\psi](t,x) = \frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1}\psi(x+ct\omega)\,d\omega + \partial_t\left(\frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1}\varphi(x+ct\omega)\,d\omega\right), \tag{2.10}$$

$$L_c[F](t,x) = \int_0^t \frac{t-s}{4\pi}\int_{|\omega|=1}F(s,x+c(t-s)\omega)\,d\omega\,ds. \tag{2.11}$$

さらに, (2.9) の解を探す空間として, 次のような空間を考える:

$$X = \{u = (u_1,u_2,\cdots,u_m)\in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^3)^m : \tag{2.12}$$

$$\|u\|_X \equiv \max_{1\leq j\leq m}\|u_j\|_{X(c_j,1,\kappa-1)} < \infty\},$$

$$\|v\|_{X(c,\mu,\nu)} = \sup_{(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3}\langle t+|x|\rangle^{\mu}\langle ct-|x|\rangle^{\nu}|v(t,x)|. \tag{2.13}$$

但し, $\kappa \in \mathbb{R}$, $c > 0$, μ, $\nu \geq 0$. 以上の準備のもと, この節での主結果を述べる.

Theorem 1. $c_1, \cdots, c_m$ は全て異なる正数とし, $1 \leq \alpha < 2$ とする. $(\varphi_j, \psi_j) \in Y(\kappa)$ $(i = 1, \cdots, m)$ に対して $\varepsilon := \max_{1 \leq j \leq m} \|(\varphi_j, \psi_j)\|_{Y(\kappa)}$ とおく ($Y(\kappa)$ は (1.8) で定義されたもの). そして, (2.7), (2.8) を仮定する.

(*i*) $1 < \alpha < 2$ とする. もし $\kappa \geq 2/\alpha$ であり, ε が十分小さければ, X において (2.9) の解が一意的に存在する.

(*ii*) $\alpha = 1$ とする. もし $\kappa > 2$ であり, ε が十分小さければ, X において (2.9) の解が一意的に存在する. しかし, $\kappa = 2$ のとき上記の結論は成り立たず, 十分小さい ε に対して, ε によらない定数 A, $B > 0$ が存在して

$$\exp(B\varepsilon^{-1}) \leq T(\varepsilon) \leq \exp(A\varepsilon^{-1}) \tag{2.14}$$

が成り立つ. ここで, $T(\varepsilon)$ は解の最大存在時刻を表す.

Remark. (2.5) において, 右辺の $|u_k|^{p_{jkl}}|u_l|^{p_{jkl}}$ を $|u_k|^{p_{jkl}-1}|u_l|^{p_{jkl}-1}u_1u_2$ に置き換えても, 定理の主張はそのまま成り立つ. また, (i) は Kubo and Tsugawa [16] の拡張にあたる.

2.2. 予備的な補題.

Lemma 1. $c > 0$ とする. $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$ に対して, $r = |x|$ として

$$\frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1} g(|x + ct\omega|)\,d\omega = \frac{1}{2cr}\int_{|ct-r|}^{ct+r} \rho g(\rho)\,d\rho,$$

$$\int_0^t \frac{t-s}{4\pi}\int_{|\omega|=1} F(|x + c(t-s)\omega|, s)\,d\omega\,ds = \frac{1}{2cr}\iint_{D_c(r,t)} \lambda F(\lambda, s)\,d\lambda\,ds,$$

$$D_c(r,t) = \{(\lambda, s) \in [0,\infty)^2 :\ 0 \leq s \leq t,\ |c(t-s) - r| \leq \lambda \leq c(t-s) + r\}$$

が成り立つ.

Lemma 2. $\nu \in \mathbb{R}$, $\kappa > 0$ に対して, ある正定数 $C = C(\nu, \kappa)$ があって

$$\int_{|t-r|}^{t+r} \frac{\log^\nu(2+\rho)}{(1+\rho)^{1+\kappa}}\,d\rho \leq \frac{C\min\{t,r\}\log^\nu(2+|t-r|)}{(1+t+r)(1+|t-r|)^\kappa}, \quad (r,t) \in [0,\infty)^2$$

が成り立つ.

Proof. $\nu = 0$ の場合は, 例えば, [9] をみよ. 以下, $\nu > 0$ とする.

$$f(\rho) = \frac{\log^\nu(2+\rho)}{(2+\rho)^{\kappa/2}} \quad (\rho \geq 0), \qquad \rho_0 = \max\{e^{2\nu/\kappa} - 2, 0\}$$

とおくと, $f(\rho)$ は $0<\rho<\rho_0$ で単調に増加し, $\rho>\rho_0$ で単調に減少することが分かる. もし $|t-r|\geq\rho_0$ ならば,

$$\begin{aligned}\int_{|t-r|}^{t+r}\frac{\log^{\nu}(2+\rho)}{(1+\rho)^{1+\kappa}}\,d\rho &\leq f(|t-r|)\int_{|t-r|}^{t+r}\frac{d\rho}{(1+\rho)^{1+\kappa/2}}\\ &\leq\frac{C\min\{t,r\}f(|t-r|)}{(1+t+r)(1+|t-r|)^{\kappa/2}}\leq\frac{C\min\{t,r\}\log^{\nu}(2+|t-r|)}{(1+t+r)(1+|t-r|)^{\kappa}}\end{aligned}$$

と評価できる. 逆に, $|t-r|\leq\rho_0$ ならば, $0<f(0)\leq f(|t-r|)\leq f(\rho_0)\leq Cf(0)$ が成り立つので,

$$\begin{aligned}\int_{|t-r|}^{t+r}\frac{\log^{\nu}(2+\rho)}{(1+\rho)^{1+\kappa}}\,d\rho &\leq f(\rho_0)\int_{|t-r|}^{t+r}\frac{d\rho}{(1+\rho)^{1+\kappa/2}}\leq\frac{C\min\{t,r\}f(0)}{(1+t+r)(1+|t-r|)^{\kappa/2}}\\ &\leq\frac{C\min\{t,r\}f(|t-r|)}{(1+t+r)(1+|t-r|)^{\kappa/2}}\leq\frac{C\min\{t,r\}\log^{\nu}(2+|t-r|)}{(1+t+r)(1+|t-r|)^{\kappa}}\end{aligned}$$

を得る. □

Lemma 3. $\kappa^*>0$, $\kappa\in(-\infty,\kappa^*]$ とする. このとき, ある正定数 $C=C(\kappa^*)$ があって

$$\frac{1}{r}\int_{t-r}^{t+r}\frac{d\rho}{\rho^{1+\kappa}}\geq\frac{C}{(t+r)(t-r)^{\kappa}},\quad t>r>0$$

が成り立つ.

Proof. $\kappa\in(-\infty,\kappa^*]$ に対して

$$I_\kappa(r,t)=\frac{(t+r)(t-r)^{\kappa}}{r}\int_{t-r}^{t+r}\frac{d\rho}{\rho^{1+\kappa}}$$

とおくとき, ある $C(\kappa^*)>0$ があって, $I_{\kappa^*}(r,t)\geq C(\kappa^*)$ が $t>r>0$ に対して成り立つことはよく知られている (例えば [9]). ところが, $\kappa\leq\kappa^*$ に対して $I_\kappa(r,t)\geq I_{\kappa^*}(r,t)$ だから, 所要の結論を得る. □

2.3. **Theorem 1 の証明の概略:** まず, 斉次方程式 (1.5) の解 $K_c[\varphi,\psi](t,x)$ に対して

$$|K_c[\varphi,\psi](t,x)|\lesssim\|(\varphi,\psi)\|_{Y(\kappa)}\langle t+|x|\rangle^{-1}\langle ct-|x|\rangle^{-(\kappa-1)}\quad(\kappa>1)\tag{2.15}$$

が成り立つことに注意する. この評価を示すには, Lemma 1 と Lemma 2 ($\nu=0$) を使えばよい. 一方, 非斉次項を処理するために次のような不等式を準備する:

Proposition 1. a_0, a_1, $a_2>0$, μ_1, μ_2, κ_1, $\kappa_2\geq 0$ とする. もし $a_1\neq a_2$ ならば,

$$\begin{aligned}&\langle t+|x|\rangle\langle a_0t-|x|\rangle^{m_0}|L_{a_0}[uv](t,x)|\lesssim\\ &\lesssim[1+M_0\log(1+\langle a_0t-|x|\rangle)]\|u\|_{X(a_1,\mu_1,\kappa_1)}\|v\|_{X(a_2,\mu_2,\kappa_2)}\end{aligned}\tag{2.16}$$

が成り立つ. ここで, m_0, M_0 は次のように定義されるものとする:

$$m_0 = \begin{cases} \mu_1+\mu_2-2+(\kappa_1\wedge\kappa_2) & \text{if } \kappa_1\vee\kappa_2\geq 1,\ \mu_1+\mu_2+(\kappa_1\wedge\kappa_2)>2 \\ \mu_1+\mu_2-3+\kappa_1+\kappa_2 & \text{if } \kappa_1\vee\kappa_2<1,\ \mu_1+\mu_2+\kappa_1+\kappa_2>3 \end{cases},$$

$$M_0 = \begin{cases} 1 & \text{if } \kappa_1\vee\kappa_2=1 \\ 0 & \text{if } \kappa_1\vee\kappa_2\neq 1 \end{cases}.$$

Proof. $\kappa_1\vee\kappa_2\neq 1$ のとき, 上の評価は [15] の Proposition 2.1 と一致するので, $\kappa_1\vee\kappa_2=1$ の場合のみを考える. 対称性から, $\kappa_1\geq\kappa_2$ としてよいので, $\kappa_1=1$ とする. また, 一般性を失うことなく, $a_0=1$ と仮定してよい. Lemma 1 から, $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3$ に対して, $r=|x|$ として

$$|L_1[uv](t,x)| \lesssim \|u\|_{X(a_1,\mu_1,\kappa_1)}\|v\|_{X(a_2,\mu_2,\kappa_2)}I_1(r,t), \tag{2.17}$$

$$I_1(r,t)=\frac{1}{2r}\iint_{D_1(r,t)}\frac{\lambda\,d\lambda\,ds}{(1+s+\lambda)^{\mu_1+\mu_2}(1+|a_1s-\lambda|)^{\kappa_1}(1+|a_2s-\lambda|)^{\kappa_2}},$$
$$D_1(r,t)=\{(\lambda,s)\in[0,\infty)^2:\ 0\leq s\leq t,\ |t-s-r|\leq\lambda\leq t-s+r\}$$

が成り立つ. そして, $\xi=s+\lambda$, $\eta=s-\lambda$ により変数変換すると

$$I_1(r,t)\lesssim\frac{1}{r}\int_{|t-r|}^{t+r}\frac{I_2(\xi)}{(1+\xi)^{\mu_1+\mu_2-1}}\,d\xi, \tag{2.18}$$
$$I_2(\xi)=\int_{-\xi}^{\xi}\left(1+\left|\eta-\frac{1-a_1}{1+a_1}\xi\right|\right)^{-\kappa_1}\left(1+\left|\eta-\frac{1-a_2}{1+a_2}\xi\right|\right)^{-\kappa_2}d\eta$$

となる. いま, a_3 を次のように定める:

$$a_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1-a_1}{1+a_1}+\frac{1-a_2}{1+a_2}\right).$$

まず, $a_1<a_2$ の場合を考える. このとき

$$-1<\frac{1-a_2}{1+a_2}<a_3<\frac{1-a_1}{1+a_1}<1$$

となるので, $I_2(\xi)$ は次のように評価される:

$$\begin{aligned} I_2(\xi)\lesssim&\left(1+\left|a_3-\frac{1-a_1}{1+a_1}\right|\xi\right)^{-\kappa_1}\int_{-\xi}^{a_3\xi}\left(1+\left|\eta-\frac{1-a_2}{1+a_2}\xi\right|\right)^{-\kappa_2}d\eta \\ &+\left(1+\left|a_3-\frac{1-a_2}{1+a_2}\right|\xi\right)^{-\kappa_2}\int_{a_3\xi}^{\xi}\left(1+\left|\eta-\frac{1-a_1}{1+a_1}\xi\right|\right)^{-\kappa_1}d\eta. \end{aligned}$$

従って,

$$I_2(\xi)\lesssim(1+\xi)^{-\kappa_1}\int_{-2\xi}^{2\xi}(1+|\eta|)^{-\kappa_2}d\eta+(1+\xi)^{-\kappa_2}\int_{-2\xi}^{2\xi}(1+|\eta|)^{-\kappa_1}d\eta \tag{2.19}$$

が成り立つ．また, $a_1 > a_2$ の場合にも (2.19) が成り立つことが同様の計算により確かめられる．

さて, $\kappa_1 = 1$, $0 \leq \kappa_2 < 1$ を思い出すと

$$\begin{aligned} I_2(\xi) &\lesssim \begin{cases} (1+\xi)^{-\kappa_2} + (1+\xi)^{-\kappa_2}\log(2+\xi) & \text{if } \kappa_2 < 1, \\ (1+\xi)^{-1}\log(2+\xi) & \text{if } \kappa_2 = 1 \end{cases} \\ &\lesssim (1+\xi)^{-(\kappa_1 \wedge \kappa_2)}\log(2+\xi) \end{aligned} \tag{2.20}$$

が成り立つことが分かる．従って, (2.17), (2.18), (2.20) および Lemma 2 ($\nu = 1$) により, 目標の不等式が得られる． □

さて, $a_0 = c_j$, $a_1 = c_k$, $a_2 = c_l$, $\mu_1 = p_{jkl}$, $\mu_2 = q_{jkl}$, $\kappa_1 = p_{jkl}(\kappa - 1)$, $\kappa_2 = q_{jkl}(\kappa - 1)$ として, Proposition 1 を使うと

$$\begin{aligned} &\langle t + |x|\rangle\langle c_j t - |x|\rangle^{m_0}|L_{c_j}[|u_k|^{p_{jkl}}|u_l|^{q_{jkl}}](t,x)| \lesssim \\ &\lesssim [1 + m_0\log(1 + \langle c_j t - |x|\rangle)]\||u_k|^{p_{jkl}}\|_{X(c_k,p_{jkl},\kappa_1)}\||u_l|^{q_{jkl}}\|_{X(c_l,q_{jkl},\kappa_2)} \end{aligned} \tag{2.21}$$

が従う．

Case 1: "$\kappa \geq 2/\alpha$, $1 < \alpha < 2$" または "$\kappa > 2$, $\alpha = 1$" のとき

(2.21) から,

$$\|L_{c_j}[|u_k|^{p_{jkl}}|u_l|^{q_{jkl}}]\|_{X(c_j,1,\kappa-1)} \lesssim \|u_k\|^{p_{jkl}}_{X(c_k,1,\kappa-1)}\|u_l\|^{q_{jkl}}_{X](c_l,1,\kappa-1)} \tag{2.22}$$

が従う．実際, $1 < \alpha < 2$, $\kappa \geq 2/\alpha$ ならば, $m_0 > \kappa - 1$ $(\kappa_1 \vee \kappa_2 \geq 1)$; $m_0 \geq \kappa - 1$ $(\kappa_1 \vee \kappa_2 < 1)$ が成り立つ．一方, $\alpha = 1$, $\kappa > 2$ ならば, $p_{jkl} = q_{jkl} = 1$, $\kappa_1 \vee \kappa_2 = \kappa - 1 > 1$ なので, $m_0 = \kappa - 1$ となるので．一旦, この様な評価が得られれば, 標準的な論法から (2.9) の X における解が得られる．

Case 2: "$\kappa = 2$, $\alpha = 1$" のとき

$c_* := \max\{c_1, \cdots, c_m\}$ とおく．もし, $2c_* t \geq |x|$ ならば, (2.21) から

$$\langle t + |x|\rangle\langle c_j t - |x|\rangle|L_{c_j}[|u_k||u_l|](t,x)| \lesssim \log(2+t)\|u_k\|_{X(c_k,1,1)}\|u_l\|_{X(c_l,1,1)} \tag{2.23}$$

が得られる．一方, $2c_* t \leq |x| =: r$ ならば, $(\lambda, s) \in D_{c_j}(r,t)$ $(j = 1, \cdots, m)$ に対して

$$r - \lambda \leq |r - \lambda| \leq c_j(t - s) \leq 2c_*(t - s)$$

となるので, 特に $2c_* s \leq \lambda$ が従う．つまり, $\langle c_k s - \lambda\rangle$ $(k = 1, \cdots, m)$ は $\langle s + \lambda\rangle$ と同等である．故に, Proposition 1 の証明と類似の計算を行えば

$$\langle t + |x|\rangle\langle c_j t - |x|\rangle|L_{c_j}[|u_k||u_l|](t,x)| \lesssim \|u_k\|_{X(c_k,1,1)}\|u_l\|_{X(c_l,1,1)}$$

を得る. 結局, (2.23) が全ての $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3$ に対して成り立つ. その右辺に $\log(2+t)$ があるために, lifespan $T(\varepsilon)$ の下からの評価は (2.14) のようになる.

次に, $T(\varepsilon)$ の上からの評価について考える. そのために, 初期値として

$$\varphi_j(x)\equiv 0,\quad \psi_j(x)=\varepsilon\langle x\rangle^{-3}$$

をとる. 明らかに, $(0,\varepsilon\langle x\rangle^{-3})\in Y(2)$ である. Lemma 1 と Lemma 3 から

$$\begin{aligned} K_{c_j}[0,\psi_j](t,x) &= \frac{\varepsilon}{2c_j|x|}\int_{|c_jt-|x||}^{c_jt+|x|}\rho\langle\rho\rangle^{-3}d\rho \\ &\geq C\varepsilon(t+|x|)^{-1}(c_jt-|x|)^{-1} \end{aligned} \tag{2.24}$$

が $c_jt>|x|$, $j=1,\cdots,m$ に対して成り立つことが分かる.

さらに, c, $y>0$, μ, $m\geq 0$ に対して次のような量を導入する:

$$\langle u\rangle_{c,\mu,m}(y)=\inf_{(t,x)\in\Sigma(c,y)}(t+|x|)^\mu(ct-|x|)^m|u(t,x)|, \tag{2.25}$$
$$\Sigma(c,y)=\{(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3:\ ct-|x|\geq cy\}.$$

(2.24) により

$$\langle K_{c_j}[0,\psi_j]\rangle_{c_j,1,1}(y)\geq C\varepsilon \tag{2.26}$$

が従う. 非斉次項を処理するために, 次の命題を用意する (証明は [15], Lemma 2.5):

Proposition 2. a_0, a_1, $a_2>0$, $\alpha>0$, μ, $\kappa\geq 0$ とする. もし $a_1\leq a_2$ ならば,

$$\langle L_{a_0}[R_{\mu,\kappa}(f)]\rangle_{a_0,1,m_0}(y)\geq C\int_\alpha^y\left(1-\frac{\eta}{y}\right)^2 f(\eta)d\eta \tag{2.27}$$

が $y\geq\alpha$ に対して成り立つ. ここで, $m_0=\mu+\kappa-2$ であり, $R(f)(t,x)$ は次のように定義される関数である:

$$R_{\mu,\kappa}(f)(t,x)=\frac{1}{(t+|x|)^\mu(a_2t-|x|)^\kappa}f\left(\frac{a_1t-|x|}{a_1}\right)\chi_{\Sigma(a_1,\alpha)}(t,x).$$

以下で, (2.9) を

$$U_j(y)\equiv\langle u_j\rangle_{c_j,1,1}(y) \tag{2.28}$$

に関する常微分不等式に帰着する. $y\geq 1$ とするとき, (2.9), (2.26) により,

$$U_j(y)\geq C(\varepsilon+\sum_{k\neq l}\langle L_{c_j}[|u_k||u_l|]\rangle_{c_j,1,1}(y)) \tag{2.29}$$

が得られる. $k \neq l$ だから, $c_k \leq c_l$ と仮定して一般性を失わない. すると, $(t,x) \in \Sigma(c_k,(c_kt-|x|)/c_k) \cup \Sigma(c_l,(c_kt-|x|)/c_k)$ が成り立ち,

$$|u_k(t,x)||u_l(t,x)| \geq \frac{U_k((c_kt-|x|)/c_k)U_l((c_kt-|x|)/c_k)}{(t+|x|)^2(c_kt-|x|)(c_lt-|x|)}$$

を得る. そこで, $f(\eta)=U_k(\eta)U_l(\eta)/\eta$, $\mu=2$, $\kappa=1$, $\alpha=1$, $a_0=c_j$, $a_1=c_k$, $a_2=c_l$ として, Proposition 2 を適用すると

$$\langle |L_{c_j}[|u_k||u_l|]\rangle_{c_j,1,1}(y) \geq C\int_1^y \left(1-\frac{\eta}{y}\right)^2 U_k(\eta)U_l(\eta)\frac{d\eta}{\eta} \quad (y \geq 1)$$

が従う. 故に, $U(y)=\min_{1\leq j\leq m} U_j(y)$ とおけば, (2.29) から,

$$U(y) \geq C_1\varepsilon, \quad U(y) \geq C_2\int_1^y \left(1-\frac{\eta}{y}\right)^2 U(\eta)^2\frac{d\eta}{\eta} \quad (y \geq 1)$$

が導かれる. ここで, [15] の Lemma 6.3 を $\alpha=1$, $\beta=0$, $m=1$, $p=2$ として使えば, (2.14) の上からの評価が得られる. これで, Theorem 1 の証明の概略が完了した.

3. より一般の場合について

前節では, (2.7) および (2.8) なる仮定のもとで, (2.9) を扱った. 小さな初期値から出発しているので, その解も存在する限り小さいことが期待される. このことから, 非線型項において, 原点付近での次数が高い項はより小さな量として無視してよいように思われる. 実際, (2.8) が成り立つ限り, 高次の項は無視してよいことが前節の議論から分かる. しかしながら, (2.8) を仮定しない場合には, 事情はそう単純ではない. それを見るために, 次のようなシステムを考える:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - c_1^2\Delta)u_1 = |u_1||u_2|, & (t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^3, \\ (\partial_t^2 - c_2^2\Delta)u_2 = |u_1|^q, & (t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{3.1}$$

また, 初期条件として

$$u_j(0,x)=\varphi_j(x), \quad \partial_t u_j(0,x)=\psi_j(x), \quad x\in\mathbb{R}^3 \ \ (j=1,2) \tag{3.2}$$

を課す. 但し, $q>2$, φ_j, $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ とする. すると, [15] の Theorem 1.4 と Theorem 1.5 から次が成り立つ:

Theorem 2. (i) $2<q<3$ のとき, (SG) は成り立たない.

(ii) $q>3$ ならば, (SG) が成り立つ.

(iii) $q=3$ とする. もし $c_1 \geq c_2$ ならば, (SG) は成り立たず, 一方, $c_1<c_2$ ならば, (SG) が成り立つ.

証明の概略: ここでは, 上の主張のうち, "(SG) の成立" についてのみ議論する. 始めに, $q>3$ の場合を考える. 初期値 (φ_j,ψ_j) が $(\varphi_j,\psi_j)\in Y(q-1)$ を満たせば, Lemma 2.1 と Lemma 2.2 ($\nu=0$) により

$$|K_c[\varphi,\psi](t,x)| \lesssim \|(\varphi,\psi)\|_{Y(q-1)}\langle t+|x|\rangle^{-1}\langle ct-|x|\rangle^{-(q-2)} \tag{3.3}$$

が従う. また, Proposition 1 を $v\equiv 1$, $\mu_2=\kappa_2=0$ として用いることにより, 次を得る:

Proposition 3. $a,\ b>0,\ \mu,\ \kappa\geq 0$ とすると,

$$\langle t+|x|\rangle\langle at-|x|\rangle^{\kappa'}|L_a[u](t,x)| \lesssim [1+M_0\log(1+\langle at-|x|\rangle)]\|u\|_{X(b,\mu,\kappa)},$$

が成り立つ. ここで, κ', M_0 は次のように定義されるものとする:

$$\kappa'=\begin{cases}\mu-2 & \textit{if}\ \ \kappa\geq 1,\ \mu>2\\ \mu-3+\kappa & \textit{if}\ \ \kappa<1,\ \mu+\kappa>3\end{cases},$$

$$M_0=\begin{cases}1 & \textit{if}\ \ \kappa=1\\ 0 & \textit{if}\ \ \kappa\neq 1\end{cases}.$$

さて, $a_0=c_1$, $a_1=c_1$, $a_2=c_2$, $\mu_1=\mu_2=1$, $\kappa_1=\kappa_2=q-2$ として Proposition 1 を使うと, $q>3$ だから,

$$\langle t+|x|\rangle\langle c_1t-|x|\rangle^{q-2}|L_{c_1}[|u_1||u_2|](t,x)| \lesssim \|u_1\|_{X(c_1,1,q-2)}\|u_2\|_{X(c_2,1,q-2)}$$

が従う. また, $a=c_2$, $b=c_2$, $\mu=q$, $\kappa=q(q-2)$ として Proposition 2 を使うと, $q>3$ だから,

$$\langle t+|x|\rangle\langle c_2t-|x|\rangle^{q-2}|L_{c_2}[|u_1|^3](t,x)| \lesssim (\|u_1\|_{X(c_1,1,q-2)})^3$$

が従う. よって, (3.1)–(3.2) に対応する積分方程式は, $X(c_1,1,q-2)\times X(c_2,1,q-2)$ において小さな解を持つ.

次に, $q=3$, $c_1<c_2$ の場合を考える. この場合には, 解を探す空間を次のように定義される W_j を使って, $W_1\times W_2$ のように修正する必要がある:

$$W_j=\{f\in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^3):\ \|f\|_{W_j}<\infty\}\quad (j=1,2),$$

$$\|f\|_{W_j}=\sup_{(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3} w_j(|x|,t)|f(t,x)|.$$

$$\begin{aligned}
w_1(r,t) &= \langle t+r\rangle\langle c_1t-r\rangle^{\kappa}z_1(r,t),\\
z_1(r,t) &= \begin{cases} 1, & (r,t)\in\Omega_1\\ \{1+\dfrac{c_2t-r}{r}\log(2+c_2t-r)\}^{-1}, & (r,t)\in\Omega_2\\ \log^{-2}(2+|c_1t-r|), & (r,t)\in\Omega_3 \end{cases},\\
w_2(r,t) &= \begin{cases} \langle t+r\rangle\langle c_2t-r\rangle^{3\kappa}, & (r,t)\in\Omega_1\\ \langle t+r\rangle\langle c_2t-r\rangle, & (r,t)\in\Omega_2\\ \langle t+r\rangle\langle c_2t-r\rangle, & (r,t)\in\Omega_3 \end{cases}.
\end{aligned}$$

但し, $1/3<\kappa<1$ であり,

$$\Omega_1=\{(r,t)\in[0,\infty)^2:\ c_2t\le r\},$$

$$\Omega_2=\{(r,t)\in[0,\infty)^2:\ (c_1+c_2)t/2\le r\le c_2t\},$$

$$\Omega_3=\{(r,t)\in[0,\infty)^2:\ r\le (c_1+c_2)t/2\}.$$

斉次方程式の解については, $X(c_1,1,\kappa)\hookrightarrow W_1$, $X(c_2,1,3\kappa)\hookrightarrow W_2$ なので,

$$\|K_{c_1}[\varphi_1,\psi_1]\|_{W_1}\lesssim\|(\varphi_1,\psi_1)\|_{Y(\kappa)},\quad \|K_{c_2}[\varphi_2,\psi_2]\|_{W_2}\lesssim\|(\varphi_2,\psi_2)\|_{Y(3\kappa)} \tag{3.4}$$

が成り立つ. さらに, 次のア・プリオリ評価が得られるので, (3.1)–(3.2) に対応する積分方程式は, $W_1\times W_2$ において小さな解を持つ.

Proposition 4. $c_1<c_2$, $1/3<\kappa<1$ とすると,

$$\|L_{c_1}[fg]\|_{W_1}\lesssim\|f\|_{W_1}\|g\|_{W_2},\quad \|L_{c_2}[f^3]\|_{W_2}\lesssim\|f\|_{W_1}^3$$

が成り立つ.

Proof. Lemma 1 により, $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3$ に対して,

$$|L_{c_1}[fg](t,x)|\le\|f\|_{W_1}\|g\|_{W_2}I(r,t),\quad I(r,t)=\frac{1}{2c_1r}\iint_{D_{c_1}(r,t)}\frac{\lambda\,d\lambda\,ds}{w_1(\lambda,s)w_2(\lambda,s)}$$

が成り立つ. よって, $(r,t)\in[0,\infty)^2$ に対して, $I(r,t)\lesssim\{w_1(r,t)\}^{-1}$ を示せば, 1つ目の不等式が従う. $\xi=c_1s+\lambda$, $\eta_j=c_js-\lambda$ $(j=1,2)$,

$$I_j(r,t)=\frac{1}{2c_1r}\iint_{D_{c_1}(r,t)\cap\Omega_j}\frac{\lambda\,d\lambda\,ds}{w_1(\lambda,s)w_2(\lambda,s)}\quad (j=1,2,3)$$

とおく. $(\lambda,s)\in\Omega_1\cup\Omega_2$ のとき, $\langle c_1s-\lambda\rangle$ と $\langle s+\lambda\rangle$ は同等であり, $(\lambda,s)\in\Omega_3$ のとき, $\langle c_2s-\lambda\rangle$ と $\langle s+\lambda\rangle$ は同等であることに注意する.

始めに, $I_1(r,t)$ を評価する. $3\kappa > 1$ なので, $(r,t) \in [0,\infty)^2$ に対して,

$$
\begin{aligned}
I_1(r,t) &\lesssim \frac{1}{r}\iint_{D_{c_1}(r,t)\cap\Omega_1} \frac{\lambda\, d\lambda\, ds}{(1+\lambda+s)^{2+\kappa}(1+\lambda-c_2 s)^{3\kappa}} \\
&\lesssim \frac{1}{r}\int_{|c_1t-r|}^{c_1t+r} \frac{1}{(1+\xi)^{1+\kappa}}\left(\int_{-\xi}^{0}\frac{d\eta_2}{(1-\eta_2)^{3\kappa}}\right) d\xi \lesssim \frac{1}{r}\int_{|c_1t-r|}^{c_1t+r}\frac{1}{(1+\xi)^{1+\kappa}}\,d\xi.
\end{aligned}
$$

よって, Lemma 2 を使えば, $1/z_1(r,t) \geq 1$ だから,

$$
I_1(r,t) \lesssim \frac{1}{w_1(r,t)}, \quad (r,t) \in [0,\infty)^2 \tag{3.5}
$$

を得る. 特に, もし $(r,t) \in \Omega_1$ ならば, $D_{c_1}(r,t) \subset \Omega_1$ であり, $I(r,t) = I_1(r,t)$ となるので, 所要の評価が得られたことになる.

次に, $(r,t) \in \Omega_2$ とする. この場合, $I(r,t) = I_1(r,t) + I_2(r,t)$ であり, (3.5) より $I_2(r,t)$ のみを評価すればよいことが分かる. さて,

$$
\begin{aligned}
I_{21}(r,t) &= \frac{1}{2c_1 r}\iint_{D_{c_1}(r,t)\cap\Omega_2} \frac{\lambda}{\langle s+\lambda\rangle^{2+\kappa}\langle c_2 s-\lambda\rangle}\, d\lambda\, ds, \\
I_{22}(r,t) &= \frac{1}{2c_1 r}\iint_{D_{c_1}(r,t)\cap\Omega_2} \frac{(c_2 s-\lambda)\log(2+c_2 s-\lambda)}{\langle s+\lambda\rangle^{2+\kappa}\langle c_2 s-\lambda\rangle}\, d\lambda\, ds
\end{aligned}
$$

とおくと, $I_2(r,t) = I_{21}(r,t) + I_{22}(r,t)$ であり, それぞれ変数変換すれば,

$$
\begin{aligned}
I_{21}(r,t) &\lesssim \frac{1}{r}\int_0^{c_2t-r}\int_{\xi^*(\eta_2)}^{r+c_1t} \frac{1}{(1+\xi)^{1+\kappa}(1+\eta_2)}\, d\xi\, d\eta_2, \\
I_{22}(r,t) &\lesssim \frac{1}{r}\int_0^{c_2t-r}\int_{\xi^*(\eta_2)}^{r+c_1t} \frac{\log(2+\eta_2)}{(1+\xi)^{2+\kappa}}\, d\xi\, d\eta_2
\end{aligned}
$$

となる. 但し,

$$
\xi^*(\eta_2) = \frac{c_1+c_2}{c_2-c_1}(r-c_1t) + \frac{2c_1}{c_2-c_1}\eta_2
$$

とおいた. $c_2 > c_1$, $\eta_2 > 0$ より

$$
r + c_1t - \xi^*(\eta_2) \leq \frac{2c_1}{c_2-c_1}(c_2t-r), \quad \xi^*(\eta_2) \geq r - c_1t
$$

が成り立つので,

$$
\begin{aligned}
I_{21}(r,t) &\lesssim \frac{1}{r}\int_0^{c_2t-r} \frac{r+c_1t-\xi^*(\eta_2)}{(1+\xi^*(\eta_2))^{1+\kappa}(1+\eta_2)}\, d\eta_2 \\
&\lesssim \frac{(c_2t-r)\log(2+c_2t-r)}{r(1+r-c_1t)^{1+\kappa}},
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{22}(r,t) &\lesssim \frac{1}{r}\int_{r-c_1t}^{r+c_1t}\frac{d\xi}{(1+\xi)^{2+\kappa}}\int_0^{c_2t-r}\log(2+\eta_2)\, d\eta_2 \\
&\lesssim \frac{(c_2t-r)\log(2+c_2t-r)}{(1+t+r)(1+r-c_1t)^{1+\kappa}}
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

を得る. Ω_2 では, $(1+r-c_1t)$ と $(1+t+r)$ は同等なので,

$$I_2(r,t) \lesssim \frac{1}{w_1(r,t)}, \quad (r,t) \in \Omega_2$$

が従う. よって, $(r,t) \in \Omega_2$ の場合にも, 所要の評価が得られた.

最後に, $(r,t) \in \Omega_3$ とする. このとき, $I(r,t) = I_1(r,t) + I_2(r,t) + I_3(r,t)$. Lemma 2 を使えば,

$$\begin{aligned} I_2(r,t) &\lesssim \frac{1}{r}\int_{|c_1t-r|}^{c_1t+r} \frac{1}{(1+\xi)^{1+\kappa}} \left(\int_0^{c_2\xi/c_1} \frac{\log(2+\eta_2)}{1+\eta_2} d\eta_2 \right) d\xi \\ &\lesssim \frac{1}{r}\int_{|c_1t-r|}^{c_1t+r} \frac{\log^2(2+\xi)}{(1+\xi)^{1+\kappa}} d\xi \lesssim \frac{\log^2(2+|c_1t-r|)}{(1+t+r)(1+|c_1t-r|)^{\kappa}} \end{aligned} \tag{3.8}$$

が得られる. また, $\kappa < 1$ に注意し, 再び Lemma 2 を使えば,

$$\begin{aligned} I_3(r,t) &\lesssim \frac{1}{r}\int_{|c_1t-r|}^{c_1t+r} \frac{1}{(1+\xi)^2} \left(\int_{-\xi}^{\xi} \frac{\log^2(2+|\eta_1|)}{(1+|\eta_1|)^{\kappa}} d\eta_1 \right) d\xi \\ &\lesssim \frac{1}{r}\int_{|c_1t-r|}^{c_1t+r} \frac{\log^2(2+\xi)}{(1+\xi)^{1+\kappa}} d\xi \lesssim \frac{\log^2(2+|c_1t-r|)}{(1+t+r)(1+|c_1t-r|)^{\kappa}} \end{aligned} \tag{3.9}$$

が従う. よって, (3.5) を思い出せば, $(r,t) \in \Omega_3$ の場合にも, 所要の評価が成り立つことが分かる.

次に, Proposition 4 の 2 つ目の不等式を示す. Lemma 1 により, $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3$ に対して,

$$|L_{c_2}[f^3](t,x)| \le \|f\|_{W_1}^3 J(r,t), \quad J(r,t) = \frac{1}{2c_2r} \iint_{D_{c_2}(r,t)} \frac{\lambda\, d\lambda\, ds}{w_1(\lambda,s)^3}$$

が成り立つ. よって, $(r,t) \in [0,\infty)^2$ に対して, $J(r,t) \lesssim \{w_2(r,t)\}^{-1}$ を示せばよい. $\xi = c_2s + \lambda$, $\eta_j = c_js - \lambda$ $(j=1,2)$,

$$J_j(r,t) = \frac{1}{2c_2r} \iint_{D_{c_2}(r,t)\cap\Omega_j} \frac{\lambda\, d\lambda\, ds}{w_1(\lambda,s)^3} \quad (j=1,2,3)$$

とおく.

始めに, $J_1(r,t)$ を評価する. $(r,t) \in [0,\infty)^2$ に対して,

$$\begin{aligned} J_1(r,t) &\lesssim \frac{1}{r} \iint_{D_{c_2}(r,t)\cap\Omega_1} \frac{\lambda\, d\lambda\, ds}{(1+\lambda+s)^{3+3\kappa}} \\ &\lesssim \frac{1}{r}\int_{|c_2t-r|}^{c_2t+r} \frac{1}{(1+\xi)^{2+3\kappa}} \left(\int_{-\xi}^{0} d\eta_2 \right) d\xi \lesssim \frac{1}{r}\int_{|c_2t-r|}^{c_2t+r} \frac{d\xi}{(1+\xi)^{1+3\kappa}} \end{aligned} \tag{3.10}$$

を得る. 故に, Lemma 2 より,

$$J_1(r,t) \lesssim \frac{1}{w_2(r,t)}, \quad (r,t) \in [0,\infty)^2 \tag{3.11}$$

が成り立つ. 特に, もし $(r,t) \in \Omega_1$ ならば, $J(r,t) = J_1(r,t)$ なので, 所要の評価が得られたことになる.

次に, $(r,t) \in \Omega_2 \cup \Omega_3$ の場合を考える. $3\kappa > 1$ なので, Lemma 2 を使うと,

$$\begin{aligned} J_2(r,t) &\lesssim \frac{1}{r}\int_{c_2t-r}^{c_2t+r} \frac{1}{(1+\xi)^{2+3\kappa}}\left(\int_0^{\xi} \log^3(2+\eta_2)\,d\eta_2\right) d\xi \\ &\lesssim \frac{1}{r}\int_{c_2t-r}^{c_2t+r} \frac{\log^3(2+\xi)}{(1+\xi)^{1+3\kappa}}\,d\xi \lesssim \frac{\log^3(2+c_2t-r)}{(1+t+r)(1+c_2t-r)^{3\kappa}} \\ &\lesssim \frac{1}{(1+t+r)(1+c_2t-r)} \end{aligned} \tag{3.12}$$

を得る. また, $3\kappa > 1$ より,

$$\begin{aligned} J_3(r,t) &\lesssim \frac{1}{r}\int_{c_2t-r}^{c_2t+r} \frac{1}{(1+\xi)^2}\left(\int_{-\xi}^{c_1\xi/c_2} \frac{\log^6(2+|\eta_1|)}{(1+|\eta_1|)^{3\kappa}}\,d\eta_1\right) d\xi \\ &\lesssim \frac{1}{r}\int_{c_2t-r}^{c_2t+r} \frac{d\xi}{(1+\xi)^2} \lesssim \frac{1}{(1+t+r)(1+c_2t-r)} \end{aligned} \tag{3.13}$$

が導かれる. 従って, (3.11) とあわせて, 所要の評価が得られる. 以上により, Propsoition 4 が示された. □

REFERENCES

[1] F. Asakura, Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with slowly decreasing initial data in three space dimensions, *Comm. Partial Differential Equations* **11** (1986), 1459–1487.

[2] Y. Choquet-Bruhat, Global existence for solutions of $\Box u = A|u|^p$, *J. Differential Equations* **82** (1989) 98–108.

[3] D. D'Ancona, V. Georgiev and H. Kubo, Weighted decay estimates for the wave equation *J. Differential Equations* **163** (2001), 146–208.

[4] D. Del Santo, V. Georgiev and E. Mitidieri, Global existence of the solutions and formation of singularities for a class of hyperbolic systems, *in* "Geometric optics and related topics" (F. Colombini and N. Lerner ed.), Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 32, 117–140, Berkhäuser, Boston, 1997.

[5] K. Deng, Nonexistence of global solutions of a nonlinear hyperbolic system, *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997), 1685–1696.

[6] V. Georgiev, H. Lindblad and C. Sogge, Weighted Strichartz estimate and global existence for semilinear wave equation, *Amer. J. Math.* **119** (1997), 1291–1319.

[7] R. T. Glassey, Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations, *Math. Z.* **177** (1981), 323–340.

[8] R. T. Glassey, Existence in the large for $\Box u = F(u)$ in two space dimensions, *Math. Z.* **178** (1981),

[9] F. John, Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions, *Manuscripta Math.* **28** (1979), 235–268.

[10] F. John, Blow-up of solutions for quasi-linear wave equations in three space dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.* **34** (1981), 29–51.

[11] S. Katayama, A remark on systems of nonlinear wave equations with different propagation speeds, preprint.

[12] H. Kubo, On the critical decay and power for semilinear wave equations in odd space dimenions, *Discrete Contin. Dynam. Systems* **2** (1996), 173–190.

[13] H. Kubo and M. Ohta, Critical blowup for systems of semilinear wave equations in low space dimensions, *J. Math. Anal. Appl.* **240** (1999), 340–360.

[14] H. Kubo and M. Ohta, Small data blowup for systems of semilinear wave equations with different propagation speeds in three space dimensions, *J. Differential Equations* **163** (2000), 475–492.

[15] H. Kubo and M. Ohta, On systems of semilinear wave equations with unequal propagation speeds in three space dimensions, *Preprint (Università di Pisa)* (2002).

[16] H. Kubo and K. Tsugawa, Global solutions and self-similar solutions of the coupled system of semilinear wave equations in three space dimensions, *Discrete Contin. Dynam. Systems* **9** (2003), 471–482.

[17] K. Kubota, Existence of a global solutions to a semi-linear wave equation with initial data of non-compact support in low space dimensions, *Hokkaido Math. J.* **22** (1993), 123–180.

[18] H. Lindblad, Blow-up for solutions of $\Box u = |u|^p$ with small initial data, *Comm. Partial Differential Equations* **15** (1990) 757–821.

[19] M. Ohta, *Counterexample to global existence for systems of nonlinear wave equations with different propagation speeds,* preprint.

[20] H. Pecher, Scattering for semilinear wave equations with small data in three space dimensions, *Math. Z.* **198** (1988), 277–289.

[21] J. Schaeffer, The equation $u_{tt} - \Delta u = |u|^p$ for the critical value of p, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **101A** (1985), 31–44.

[22] T. C. Sideris, Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions, *J. Differential Equations* **52** (1984), 378–406.

[23] W. Strauss, Decay and asymptotics for $\Box u = F(u)$, *J. Funct. Anal.* **2** (1968), 409–457.

[24] W. Strauss, Nonlinear scattering theory at low energy, *J. Funct. Anal.* **41** (1981), 110–133.

[25] H. Takamura, Blow-up for semilinear wave equations with slowly decaying data in high dimensions, *Diff. and Int. Eqs.* **8** (1995), 647–661.

[26] D. Tataru, Strichartz estimates in the hyperbolic space and global existence for semilinear wave equation *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2000),795–807.

[27] K. Tsutaya, Global existence theorem for semilinear wave equations with non-compact data in two space dimensions, *J. Differential Equations* **104** (1993) 332–360.

[28] Y. Zhou, Blow up of classical solutions to $\Box u = |u|^{1+\alpha}$ in three space dimensions, *J. Partial Differential Equations* **5** (1992), 21–32.

[29] K. Yokoyama, Global existence of classical solutions to systems of wave equations with critical nonlinearity in three space dimensions, J. Math. Soc. Japan, **52** (2000), pp. 609–632.