数理解析研究所講究録 1331 巻 2003 年 93-115

Geometric Blow up の方法

静岡大学・工学部　星賀 彰 (Akira Hoshiga)
Faculty of Engineering,
Shizuoka University

1. 問題の提起と予想

本講演では、準線型波動方程式系の解の爆発に関する未解決問題の提起と、その解決のために有効と思われる、S. Alinhac 氏の "Geometric Blow up" の方法 [5], [6] の概要を解説する。細かい点については省略するが、我々が目標とする問題に適用できるかどうかに焦点をしぼって論じることにする。

次の準線型波動方程式系の初期値問題を考える。

(1) $\partial_0^2 u^i - c_i^2 \Delta u^i = \sum_{\alpha,\beta=0}^{n} a_i^{\alpha\beta}(\partial u)\,\partial_\alpha \partial_\beta u^i \qquad (x,t)\in \mathbb{R}^n\times(0,\infty)$

(2) $u^i(x,0) = \varepsilon f^i(x)\ , \quad \partial_0 u^i(x,0) = \varepsilon g^i(x) \qquad x\in\mathbb{R}^n$

ここで $i=1,2,\cdots m$ $(m\in\mathbb{N})$, $u=(u^1,u^2,\cdots,u^m)$ とし、$\partial=(\partial_0,\partial_1,\cdots,\partial_n)$, $\partial_0=\frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$ と書くことにする。また、ε は正の小さなパラメータとし、$f^i, g^i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と仮定する。

さらに $a_i^{\alpha\beta}(\partial u) \in C^\infty(\mathbb{R}^{(n+1)m})$ とし、

$$a_i^{\alpha\beta}(\partial u) = O(|\partial u|^{p-1}) \qquad \text{at} \quad \partial u = 0$$

を仮定する。ここで、$a_i^{\alpha\beta}$ の滑らかさから p は自然数でなくてはならない。もう一つ、重要な仮定をほどこす。波動方程式系 (1) の伝播速度は、全て相異なると仮定する。簡単のため、次のように定める。

$$0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_m .$$

この初期値問題 (1), (2) については、これまでに多くの結果が得られている。$p = \frac{n+1}{n-1}$ がいわゆる critical power となっていて、$p > \frac{n+1}{n-1}$ の場合には、十分小さい ε に対して、(1), (2) は大域解をもつことが知られている。
一方、$p \leqq \frac{n+1}{n-1}$ のときは、一般には大域解の存在は望めないが、Lifespan T_ε の評価は得られている。

まず $m=1$ の場合、$n=3$, $p=2$ のとき $\varliminf_{\varepsilon\to0} \varepsilon \log T_\varepsilon \geqq A_1$ [14], $n=2$, $p=3$ のとき $\varliminf_{\varepsilon\to0} \varepsilon^2 \log T_\varepsilon \geqq A_2$ [7], $n=2$, $p=2$ のとき $\varliminf_{\varepsilon\to0} \varepsilon\sqrt{T_\varepsilon} \geqq A_3$ [3] などがわかっている。ここで、A_1, A_2, A_3 は初期値や非線型項によって具体的に定まる定数である。さらに、これらの逆向きの不等式が成り立つことが示されているので（順に [19], [20], [6]）実は全て等式が成り立つことがわかっている。また、A_1, A_2, A_3 が $+\infty$ になるような場合、つまり “Null－

condition" が成り立つ場合は $T_\varepsilon=+\infty$，つまり大域解が存在することが示されている。[7]，[14]，[15]，[16]

一方、$m\geqq 2$ の場合でも「Null-condition が成り立てば大域解が存在する」という形の結果は、これまでにいくつか得られている。[1]，[11]，[12]，[17]，[18]，[21] いずれも $m=1$ の場合に使えた微分作用素 $x_j\partial_0+t\partial_j$ を使わない点でなんらかの工夫をしている。また、Null-condition が成り立たない場合の lifespan の評価については，$n=2$，$p=3$ のとき $\varliminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\log T_\varepsilon\geqq B_1$ [9]、$n=2$，$p=2$ で方程式(1) が特別な形をしている場合 $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\sqrt{T_\varepsilon}=B_2$ [10] などが得られている。後者の結果は解が有限時間内に爆発することも主張している。

今回は、まだ未解決である $m\geqq 2$ の場合の $n=2$，$p=3$，または $n=3$，$p=2$ のときの爆発問題についての予想と、その展望について述べることにする。以後，$n=2$，$p=3$ の場合に限定して話を進める。まず $a_i^{\alpha\beta}(\partial u)=O(|\partial u|^2)$ であるが，より具体的に

$$a_i^{\alpha\beta}(\partial u)=\sum_{j,k=1}^{m}\sum_{\gamma,\delta=0}^{2}D_{ijk}^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\gamma u^j\partial_\delta u^k+O(|\partial u|^3)$$

と表す。ただし $D_{ijk}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ は定数とする。このケースでは，上で述べたように [9] で lifespan の評価が得られているが，まずはその主定理を具体的に述べようと思う。

ベクトル $X=(X_0, X_1, X_2)$ に対して関数 $\Phi_i(X)$ を

$$\Phi_i(X) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0}^{2} D_{iii}^{\alpha\beta\gamma\delta} X_\alpha X_\beta X_\gamma X_\delta$$

と定義する。また初期条件を定める関数 $f^i(x)$, $g^i(x)$ を用いて関数 $\mathcal{F}^i(\sigma,\omega)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{F}^i(\sigma,\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_\sigma^\infty \frac{1}{\sqrt{s-\sigma}} \{ R_{g^i}(s,\omega) - \partial_s R_{f^i}(s,\omega) \} ds$$

ここで $h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して

$$R_h(s,\omega) = \int_{\omega\cdot y = s} h(y)\, dS_y$$

とする。$\mathcal{F}^i(\sigma,\omega)$ は Friedlander の radiation field と呼ばれる関数であり、次の性質をもつことが知られている。

(3) $\quad |\partial_\sigma^\ell \mathcal{F}^i(\sigma,\omega)| \leqq C(1+|\sigma|)^{-\frac{1}{2}-\ell} \qquad \ell = 0, 1, 2 \cdots$

これらの関数を用いて、次の定数を定義する。

$$H_i = \max_{\sigma\in\mathbb{R},\,\omega\in S^1} \left\{ -\frac{1}{c_i^2} \Phi_i(-1,\omega)\, \partial_\sigma \mathcal{F}^i(\sigma,\omega)\, \partial_\sigma^2 \mathcal{F}^i(\sigma,\omega) \right\}$$

$$H = \max\{H_1, H_2, \cdots, H_m\}$$

ここで、(3) の性質から各 i に対して $H_i \geqq 0$ であることは容易にわかる。このとき、次が成り立つ。

Th.[9]

$H>0$ ならば $\varliminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log T_\varepsilon \geqq \frac{1}{H}$ が成り立つ.

今回の予想は、「同じ定数 H に対して逆向きの不等式 $\varlimsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log T_\varepsilon \leqq \frac{1}{H}$ が成り立つのではないか」というものである。これが示せたら上の結果と合わせて $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log T_\varepsilon = \frac{1}{H}$

となることがわかる。この主張は $n=1$ の場合の結果とも整合性があり、予想が正しいことはまずまちがいない。

[10] で $n=2$, $p=2$ のときに、特殊な型の方程式に対してではあるが、爆発の結果、つまりLifespanの上からの評価が得られている。そこでは $n=1$ の場合に [3], [8], [13] が用いた、特性曲線上の常微分方程式に帰着させる方法を用いている。解の球対称性を仮定し、ラプラシアン Δ を、$\Delta=\partial_r^2-\frac{1}{r}\partial_r$ と書き直すことにより、空間一変数の特性曲線の議論にもちこむのであるが、この論法は t 軸 (つまり $r=0$) 付近では有効ではない。ラプラシアンに含まれる $\frac{1}{r}\partial_r$ の項が $r\to 0$ で発散してしまうからである。特に $n\geqq 2$ の場合は、特性方向が異なるので特性曲線が t 軸にぶつかる心配があるのである。$p=2$ の場合は t 軸から離れたところで議論は閉じたのだが、$p=3$ の場合は爆発時刻が大きいので、どうしても特性曲線が t 軸を横切ってしまうのである。それゆえ、[10] の論法は使えない。その点、Alinhac 氏が [5], [6] などで用いた Geometric Blowup の方法は、Blow up point 付近の Local な議論である上、解の球対称性も必要ないのでよりシャープな結果が期待できる。また Klainerman 氏が用いた generalized operator を使わないので、system にも適用できる可能性がある。(Alinhac 氏自身、論文の中でそ

の可能性について言及している。）しかしながら、Geometric Blowup の方法はかなり複雑であり、多大な計算量を必要とするため、その論法を理解するのも容易なことではない。そこで次の章では［6］を例にとってGeometric Blowupの概要について述べる。

2. Geometric Blowup

2-1 基本的な考え方

Geometric Blowup の方法はいくつものステップに分かれていて、その本質を見きわめるのはなかなか困難である。そこでまずは簡単な例で、その基本となる考え方をみてみる。次のようなバーガーズ方程式の初期値問題を考える。

(4) $\partial_t U + U \partial_x U = 0 \qquad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$

(5) $U(x, 0) = U_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}$

ただし、$U_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ とする。（4），（5）の解 U が存在するとして、特性曲線 Γ_{x_0} を

$$\frac{dx}{dt} = U(x, t) \qquad x(0) = x_0$$

の解で定義し、$(x(t), t) \in \Gamma_{x_0}$ と表すことにする。このとき、（4）から

$$\frac{d}{dt} U(x(t), t) = \partial_t U + U \partial_x U = 0$$

がわかり、$U(x(t), t) \equiv U_0(x_0)$ であることがわかる。これ

よりさらに

$$x(t) = x_0 + U_0(x_0)\,t$$

であることもわかる。次に方程式（4）をxで偏微分すると、

$$\partial_x \partial_t U + U \partial_x^2 U = -(\partial_x U)^2$$

となるので、$v(t) = \partial_x U(x(t), t)$ とおくと、$v(t)$ は

$$\frac{d}{dt} v(t) = -(v(t))^2$$

$$v(0) = U_0'(x_0)$$

をみたす。これを解くと

$$v(t) = \frac{U_0'(x_0)}{1 + U_0'(x_0)\,t}$$

となることがわかる。ここで、もし $U_0'(x_0) < 0$ ならば、$t \nearrow -1/U_0'(x_0)$ としたとき $v(t) \searrow -\infty$ となり、解は $T = -1/U_0'(x_0)$ を越えて存在しないことがわかる。U_0 は滑らかな関数なので、x_0 の付近の x に対しても $U_0'(x) < 0$ となる。よって $(x(T), T)$ の近傍で、（4），（5）の Blow up Boundary γ が次のように定義できる。

$$\gamma = \{(x, t) \mid x = X + U_0(X)\,t\ ,\ t = -1/U_0'(X),\ \ X \sim x_0\}$$

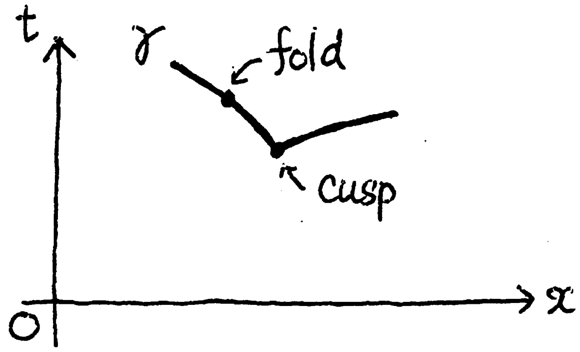
つまり γ 上の点 (x, t) は

$$x(X) = X - U_0(X) / U_0'(X)$$

$$t(X) = -1 / U_0'(X)$$

と、Xをパラメータとして表すことができる。このとき、$U_0''(X) \neq 0$ ならば γ は $(x(X), t(X))$ で smooth であり

$U_0''(X)=0$ ならば $(x(X), t(X))$ で cusp をもつ。(下図参照) Alinhac氏はそれぞれ fold singular, cusp singular と呼んでいる。



初期値問題(4),(5)の解のlifespanは

$$T_0 = \frac{1}{\max_X(-U_0'(X))} = -\frac{1}{U_0'(X_0)}$$

で与えられる。すなわち、$U_0'(X)$ が極小値をとる点なので $U_0''(X)=0$ かつ $U_0'''(X)>0$ となる。したがって最初に起こる爆発は cusp singular であることがわかる。

cusp singularは次のようにとらえることができる。つまり、ある点 (X_0, T_0) と、ある関数 $\phi(X,t)$, $w(X,t)$, $v(X,t)$ が存在し、

$$w(X,t) = U(\phi(X,t), t)$$
$$v(X,t) = \partial_x U(\phi(X,t), t)$$

が成り立ち、かつ

$$(6)\begin{cases} \cdot\ \partial_X\phi(X,t) \geqq 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}\times[0,T] \\ \cdot\ \partial_X\phi(X,t) = 0 \iff (X,t) = (X_0, T_0) \\ \cdot\ \partial_X\partial_t\phi(X_0,T_0) < 0,\ \partial_X^2\phi(X_0,T_0) = 0,\ \partial_X^3\phi(X_0,T_0) > 0 \end{cases}$$

$$\text{し・}\partial_x w(X_0, T_0) \neq 0$$

が成り立つ。実際、

$$\phi(x,t) = X + U_0(x)t$$

$$w(x,t) = U_0(x)$$

$$v(x,t) = \frac{U_0'(x)}{1+U_0'(x)t}$$

は cusp singular point (X_0, T_0) において上の条件(6)を満している。このとき、w, v, ϕ の関係から、

$$\partial_x w = \partial_x U \cdot \partial_x \phi = v\,\partial_x \phi$$

がわかるが、(X_0, T_0) において $\partial_x\phi = 0$ かつ $\partial_x w \neq 0$ であることから

$$v(X_0, T_0) = \partial_x U(\phi(X_0,T_0), T_0) = \infty$$

となることがわかる。$\partial_x U$ の具体的な表現を使わずに解の爆発を示すのがポイントである。波動方程式の場合も、このような条件をみたす (ϕ, w, v) の組み合わせをみつけるというのが、Geometric Blow up の考え方である。

2-2 波動方程式への応用

では次に、[6] で Alinhac が使った手法を見てみる。次のような準線型波動方程式の初期値問題を考える。

$$(7)\quad L(u) = \partial_t^2 u - \Delta u + \sum_{i,j,k=0}^{2} g_{ij}^{k}\,\partial_k u\,\partial_i\partial_j u = 0$$

$$(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$$

$$(8)\quad u(x,0) = \varepsilon f(x)\ ,\ \partial_0 u(x,0) = \varepsilon g(x) \qquad x \in \mathbb{R}^2$$

ここで$f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$とし、$\varepsilon > 0$とする。また$\omega = x/|x|$とし、$\hat{\omega} = (-1, \omega)$に対して

$$g(\hat{\omega}) = \sum_{i,j,k=0}^{2} g_{ij}^{k} \hat{\omega}_i \hat{\omega}_j \hat{\omega}_k$$

と定義する。また、$f(x)$, $g(x)$に対するFriedlanderのradiation fieldを$\mathcal{F}(\sigma, \omega)$で表すことにする。$g(\hat{\omega}) \neq 0$かつ$|f| + |g| \neq 0$ならば定数

$$H = \max_{\sigma \in \mathbb{R}, \omega \in S^1} \{ g(\hat{\omega}) \partial_\sigma^2 \mathcal{F}(\sigma, \omega) \} = g(\hat{\omega}_0) \partial_\sigma^2 \mathcal{F}(\sigma_0, \omega_0)$$

は正の数になることがわかるが、さらに(σ_0, ω_0)において、次を仮定する。

(9)「$g(\hat{\omega}) \partial_\sigma^2 \mathcal{F}(\sigma, \omega)$は$(\sigma_0, \omega_0)$で唯一つの正のquadratic maximumをもつ。」

このとき、次が示される。

Th. [6] あるεの関数$\tau_\varepsilon = \frac{1}{H} + O(\varepsilon)$と、ある$\varepsilon_0 > 0$が存在し、$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ならば初期値問題(7), (8)のLife span T_εは$T_\varepsilon \leqq (\tau_\varepsilon / \varepsilon)^2$をみたす。

注意 Alinhac氏が証明した結果は、上の定理より一般的であるが、我々が考えたい問題に合わせて書き直している。

この定理を証明するために、変数変換$(x, t) \mapsto (\sigma, \omega, \tau) \in \mathbb{R} \times S^1 \times [0, \infty)$を次のように定義する。

$$\sigma = |x| - t, \quad \omega = x/|x|, \quad \tau = \varepsilon\sqrt{t}$$

この変換により、(7), (8)の解を、

$$u(x,t) = \frac{\varepsilon}{r^{\frac{1}{2}}} G(\sigma, \omega, \tau) \qquad r = |x|$$

と表すと、方程式(7)は次のようなGの方程式に書き直すことができる。

$$(10) \quad \frac{r}{\varepsilon^2} L(u) = -\frac{R^{\frac{1}{2}}}{\tau} \partial_\tau \partial_\sigma G + g(\hat{\omega}) \partial_\sigma G \, \partial_\sigma^2 G + \varepsilon^2 H(\sigma, \omega, \tau, G, \nabla G, \nabla^2 G) = 0$$

ここで、$R = \tau^2 + \varepsilon^2 \sigma \ (= \varepsilon^2 r)$ であり、Hは滑らかな関数である。また、∇, ∇^2 は (σ, ω, τ) に関する1階及び2階の偏微分を意味する。方程式(10)は、$\varepsilon = 0$ のとき、

$$\partial_\tau \partial_\sigma G - g(\hat{\omega}) \partial_\sigma G \, \partial_\sigma^2 G = 0$$

という、2-1で例にあげたバーガーズ方程式となることを注意しておく。

方程式(10)に対して次の補題を示せば、Th.[6] を示すことができる。

補題　ある $\varepsilon_0 > 0$, ある点 $M_\varepsilon = (\sigma_\varepsilon, \omega_\varepsilon, \tau_\varepsilon)$ 及びある関数 $\phi(s,\omega,\tau)$, $w(s,\omega,\tau)$, $v(s,\omega,\tau)$ が存在し、$0<\varepsilon<\varepsilon_0$ ならば

$$w(s,\omega,\tau) = G(\phi(s,\omega,\tau), \omega, \tau)$$

$$\partial_s w(s,\omega,\tau) = \partial_s \phi(s,\omega,\tau) \, v(s,\omega,\tau)$$

$$
(11)\begin{cases}
\cdot\ \partial_s\phi(s,\omega,\tau)\geqq 0 \qquad \text{for} \quad 0\leqq\tau\leqq\tau_\varepsilon \\
\cdot\ \partial_s\phi(s,\omega,\tau)=0 \iff (s,\omega,\tau)=M_\varepsilon \\
\cdot\ \partial_\tau\partial_s\phi(M_\varepsilon)<0,\quad \partial_s^2\phi(M_\varepsilon)=\partial_\omega\partial_s\phi(M_\varepsilon)=0 \\
\cdot\ \nabla^2(\partial_s\phi)(M_\varepsilon)>0 \\
\cdot\ \partial_s v(M_\varepsilon)\neq 0
\end{cases}
$$

実際、この補題が示されたら

$$\partial_s W=\partial_\sigma G\,\partial_s\phi=v\,\partial_s\phi$$

より $v=\partial_\sigma G$ となり、これを s で偏微分すると

$$\partial_s v(s,\omega,\tau)=\partial_\sigma^2 G(\phi(s,\omega,\tau),\omega,\tau)\,\partial_s\phi(s,\omega,\tau)$$

となる。特に (11) より $\partial_s v(M_\varepsilon)\neq 0$, $\partial_s\phi(M_\varepsilon)=0$ となるので $\partial_\sigma^2 G(M_\varepsilon)=\infty$ でなくてはならない。つまり $\partial_\sigma^2 G$ は M_ε で爆発するのである。これより元の解 u も、M_ε に対応する (x,t) 空間内の点で爆発することが示される。

注意　補題の (ϕ, W, v) の組み合わせは一意には定まらない。

以下、補題の証明のキーポイントについて述べる。方程式 (10) を

$$(12)\quad P(G)=\sum_{i,j=1}^{3}p_{ij}(\sigma,\omega,\tau,G,\nabla G)\partial_i\partial_j G+g(\sigma,\omega,\tau,G,\nabla G)=0$$

と表しておく。ただし、$\partial_1 = \partial/\partial\sigma$, $\partial_2 = \partial/\partial\omega$, $\partial_3 = \partial/\partial\tau$, $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ とし、$\bar{\partial} = (\bar{\partial}_1, \bar{\partial}_2, \bar{\partial}_3) = (0, \partial_2, \partial_3)$, $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3) = (-1, \partial_2\phi, \partial_3\phi)$ とする。このとき次が成り立つ。

命題2-1　条件(11)をみたす ϕ, v に対して

$$w(s,\omega,\tau) = G(\phi(s,\omega,\tau),\omega,\tau)$$

$$\partial_s w(s,\omega,\tau) = \partial_s\phi(s,\omega,\tau)\, v(s,\omega,\tau)$$

ならば

$$\nabla G = \bar{\partial} w - \hat{\phi} v$$

$$\partial_i\partial_j G = \bar{\partial}_i\bar{\partial}_j w - v\bar{\partial}_i\bar{\partial}_j\phi - (\hat{\phi}_i\bar{\partial}_j v + \hat{\phi}_j\bar{\partial}_i v) + \hat{\phi}_i\hat{\phi}_j\frac{\partial_s v}{\partial_s\phi} \qquad (i,j = 1,2,3)$$

が成り立つ。

証）1本目についてはまず、$w = G$ より $\partial_s w = \partial_s\phi\,\partial_\sigma G$。また1点を除いて $\partial_s\phi \neq 0$ となることから $\partial_1 G = \partial_\sigma G = v = \bar{\partial}_1 w - \hat{\phi}_1 v$。同様に $w = G$ より、$\partial_\omega w = \partial_\omega\phi\,\partial_\sigma G + \partial_\omega G$。したがって $\partial_2 G = \partial_\omega G = \partial_\omega w - \partial_\omega\phi\, v = \bar{\partial}_2 w - \hat{\phi}_2 v$ など。

2本目については、$\partial_\sigma G = v$ より $\partial_s\phi\,\partial_\sigma^2 G = \partial_s v$。よって

$$\partial_1^2 G = \partial_\sigma^2 G = \frac{\partial_s v}{\partial_s\phi} = \bar{\partial}_1^2 w - v\bar{\partial}_1^2\phi - (\hat{\phi}_1\bar{\partial}_1 v + \hat{\phi}_1\bar{\partial}_1 v) + \hat{\phi}_1^2\frac{\partial_s v}{\partial_s\phi}。$$

同様に $\partial_\omega\phi\,\partial_\sigma^2 G + \partial_\sigma\partial_\omega G = \partial_\omega v$ より、$\partial_1\partial_2 G = \partial_\sigma\partial_\omega G$

$$= \partial_\omega v - \partial_\omega\phi\frac{\partial_s v}{\partial_s\phi} = \bar{\partial}_1\bar{\partial}_2 w - v\bar{\partial}_1\bar{\partial}_2\phi - (\hat{\phi}_1\bar{\partial}_2 v + \hat{\phi}_2\bar{\partial}_1 v)$$

$+\ \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \dfrac{\partial_s v}{\partial_s \phi}$ など。

命題2-1より、$w = G$, $\partial_s w = \partial_s \phi\, v$ が成り立つ限り、方程式(12)と次の方程式

$$(13)\quad \sum_{i,j=1}^{3} p_{ij}\hat{\phi}_i \hat{\phi}_j \frac{\partial_s v}{\partial_s \phi} + \sum_{i,j=1}^{3} p_{ij}\left\{\bar{\partial}_i \bar{\partial}_j w - v\,\bar{\partial}_i \bar{\partial}_j \phi - (\hat{\phi}_i \bar{\partial}_j v + \hat{\phi}_j \bar{\partial}_i v)\right\} + g = 0$$

は同値であることがわかる。ここで特に方程式(13)を

$$\mathcal{E} \equiv \sum_{i,j=1}^{3} p_{ij}\hat{\phi}_i \hat{\phi}_j = 0$$

$$\mathcal{R} \equiv \sum_{i,j=1}^{3} p_{ij}\left\{\bar{\partial}_i \bar{\partial}_j w - v\,\bar{\partial}_i \bar{\partial}_j \phi - (\hat{\phi}_i \bar{\partial}_j v + \hat{\phi}_j \bar{\partial}_i v)\right\} + g = 0$$

と分解し、これに

$$\mathcal{A} \equiv \partial_s w - \partial_s \phi\, v = 0$$

を加えた3本の方程式系をBlow up systemと呼ぶことにする。このとき、もし条件(11)をみたすようなBlow up systemの解(ϕ, v, w)が存在したとすると、これらは同時に方程式(13)もみたしていることがわかる。さらに1点M_εを除いて$\partial_s \phi > 0$となることから逆変換$s = \phi^{-1}(\sigma, \omega, \tau)$が存在し、これにより$G(\sigma, \omega, \tau) = w(s, \omega, \tau)$が定義できる。上の議論からこの$G$は方程式(10)をみたすことがわかる。つまり補題を示すためには、条件(11)をみたすBlow up systemの解をみつければよいことがわかる。Blow up systemを具体的に解くのは難しいが、解の存在を示すだけなら可能で

ある。そのためにNash−Moserの方法を使う。すなわち、$\varepsilon=0$ としたときのBlow up systemを具体的に解いておいて、$\varepsilon\neq 0$ の場合も十分に小さければ、近くに解が存在することを逐次近似法で示すのである。ここからは、細かい点は無視して、重要な点だけに絞って話を進める。

よくやるように、スタートとなる関数 $(\phi^{(0)}, w^{(0)}, v^{(0)})$ を一つ定め、以下

$$\phi^{(k+1)} = \phi^{(k)} + \dot{\phi}^{(k+1)}$$
$$w^{(k+1)} = w^{(k)} + \dot{w}^{(k+1)}$$
$$v^{(k+1)} = v^{(k)} + \dot{v}^{(k+1)}$$

により、関数列 $\{\phi^{(n)}\}$, $\{w^{(n)}\}$, $\{v^{(n)}\}$ を定める。ここで、$\dot{\phi}^{(k+1)}$, $\dot{w}^{(k+1)}$, $\dot{v}^{(k+1)}$ は $\{\phi^{(j)}, w^{(j)}, v^{(j)}\}_{j=1}^{k}$ で定まる関数であるが、次の点に注意しなくてはならない。

(a) 各ステップで $\phi^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)}$ は(11)を満さなくてはならない。

(b) ある (ϕ, w, v) が存在し、

$$\phi^{(n)} \to \phi, \quad w^{(n)} \to w, \quad v^{(n)} \to v \qquad \text{in } L^2$$

が成り立つ。(もちろんこの (ϕ, w, v) が、求めるBlow up systemの解である。)

まず、スタートとなる $(\phi^{(0)}, w^{(0)}, v^{(0)})$ を $\varepsilon=0$ の場合の解で定める。Blow up systemにおいて $\varepsilon=0$ とすると、

$$\mathcal{E} = \partial_\tau \phi - g(w)\, v = 0$$
$$\mathcal{R} = \partial_\tau v = 0$$

となる。これを具体的に解くと、

$$v(s,w,\tau) = v(s,w,0) = \mathcal{F}(s,w)$$
$$\phi(s,w,\tau) = s - g(w)\,\mathcal{F}(s,w)\,\tau$$

となり．これらが定まれば $\mathcal{A} = \partial_s w - \partial_s \phi \cdot v = 0$ から，wも決定する。この（ϕ. w. v）は、条件（9）と

$$\partial_s \phi = 1 - g(w)\, \partial_s \mathcal{F}(s,w)\,\tau$$

から（11）を満たすことがわかる。これらを（$\phi^{(0)}$, $w^{(0)}$, $v^{(0)}$）とするのである。

次に各ステップで $\dot{\phi}^{(k+1)}$, $\dot{w}^{(k+1)}$, $\dot{v}^{(k+1)}$ を次のLinearized problemの解として定める。

- $\mathcal{E}'_{(\phi^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)})}(\dot{\phi}^{(k+1)}, \dot{w}^{(k+1)}, \dot{v}^{(k+1)})$
$$\equiv \partial_\phi \mathcal{E}(\phi^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)})\,\dot{\phi}^{(k+1)} + \partial_w \mathcal{E}(\phi^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)})\,\dot{w}^{(k+1)}$$
$$+ \partial_v \mathcal{E}(\phi^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)})\,\dot{v}^{(k+1)} = \dot{f}^{(k+1)}$$
- $\mathcal{R}'_{(\phi^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)})}(\dot{\phi}^{(k+1)}, \dot{w}^{(k+1)}, \dot{v}^{(k+1)})$
$$\equiv \partial_\phi \mathcal{R}(\phi^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)})\,\dot{\phi}^{(k+1)} + \partial_w \mathcal{R}(\phi^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)})\,\dot{w}^{(k+1)}$$
$$+ \partial_v \mathcal{R}(\phi^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)})\,\dot{v}^{(k+1)} = \dot{g}^{(k+1)}$$
- $\mathcal{A}'_{(\phi^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)})}(\dot{\phi}^{(k+1)}, \dot{w}^{(k+1)}, \dot{v}^{(k+1)})$
$$\equiv \partial_\phi \mathcal{A}(\phi^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)})\,\dot{\phi}^{(k+1)} + \partial_w \mathcal{A}(\phi^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)})\,\dot{w}^{(k+}$$
$$+ \partial_v \mathcal{A}(\phi^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)})\,\dot{v}^{(k+1)} = \dot{h}^{(k+1)}$$

ここで、$\dot{f}^{(k+1)}$, $\dot{g}^{(k+1)}$, $\dot{h}^{(k+1)}$ は $\{\phi^{(j)}, w^{(j)}, v^{(j)}\}_{j=1}^{k}$ で定まる、与えられた関数である。この連立線形微分方程式が解けるかどうかはひとまず置くとして、右辺の非同次項 $\dot{f}^{(k+1)}$, $\dot{g}^{(k+1)}$, $\dot{h}^{(k+1)}$ をどのように与えたら、実際の解に近づくような近似解の列が構成できるか、が問題となってくる。

たとえば $\dot{f}^{(k+1)}$ について考えると、

$$\mathcal{E}(\phi^{(k+1)}, w^{(k+1)}, v^{(k+1)}) - \mathcal{E}(\phi^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)})$$
$$- \mathcal{E}'_{(\phi^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)})}(\dot{\phi}^{(k+1)}, \dot{w}^{(k+1)}, \dot{v}^{(k+1)}) = e_{k+1}$$

とおくと、テイラーの定理から e_{k+1} は２次の剰余項になる。
$k=1,2,\cdots,n$ について辺々をたし合わせると、

$$\mathcal{E}(\phi^{(n+1)}, w^{(n+1)}, v^{(n+1)}) = \sum_{k=1}^{n+1}(e_k + \dot{f}^{(k)})$$

となる。そこで $\sum_{k=1}^{n} e_k + \sum_{k=1}^{n+1} \dot{f}^{(k)} = 0$ となるように帰納的に $\dot{f}^{(n+1)}$ を定めると、上の方程式は

$$\mathcal{E}(\phi^{(n+1)}, w^{(n+1)}, v^{(n+1)}) = e_{n+1}$$

となる。

注意　e_{n+1} は $\phi^{(n+1)}, w^{(n+1)}, v^{(n+1)}$ に依存するので、$\dot{f}^{(n+1)}$ を定める式に含むことはできない。

あとはエネルギー不等式の議論から $n \to \infty$ にともない $e_{n+1} \to 0$ が示され、$\phi^{(n+1)}, w^{(n+1)}, v^{(n+1)}$ は Blowup system の解に近づくことがわかるのである。これが補題の証明の大まかな筋書きである。エネルギー不等式の議論や、連立線形微分方程式が各ステップで解けるかどうかについては、[2]と[4]を参照していただきたい。

3．準線型波動方程式系への応用の展望

2章でAlinhac氏のGeometric Blowup の方法について解説したが、方程式(10)の具体的な表現を使ったのは、$\varepsilon=0$ として$(\varphi^{(0)}, w^{(0)}, v^{(0)})$を決定する場面のみで、あとは一般的な形での議論が続いている。そこでまずは、方程式系(1)に対して$\varepsilon=0$としたときのBlow up system がどうなるか考えてみる。簡単のため、次の2×2の方程式系を考える。

(14) $\partial_t^2 u^1 - c_1^2 \Delta u^1 = (A\partial_t u^1 + B\partial_t u^2)\partial_t^2 u^1$

(15) $\partial_t^2 u^2 - c_2^2 \Delta u^2 = (C\partial_t u^1 + D\partial_t u^2)\partial_t^2 u^2$

特に $H = \max\{H_1, H_2\} = H_1$ と仮定する。つまり伝播速度が速い u^1 の方が Blow up するケースを考える。

注意　u^2の方が先にBlow up するケースは、解のサポートの性質を使えば、u^2のみの単独の方程式の爆発問題に帰着するので容易である。

$$\sigma_1 = |x| - c_1 t, \quad \omega = x/|x|, \quad \tau = \varepsilon\sqrt{t}$$
$$\sigma_2 = |x| - c_2 t, \quad \omega = x/|x|, \quad \tau = \varepsilon\sqrt{t}$$

という2通りの変数変換を考え、

$$u^1(x,t) = \frac{\varepsilon}{|x|^{\frac{1}{2}}} G^{(1)}(\sigma_1, \omega, \tau), \quad u^2(x,t) = \frac{\varepsilon}{|x|^{\frac{1}{2}}} G^{(2)}(\sigma_2, \omega, \tau)$$

とおくと、方程式（14），（15）は

$$\partial_\tau \partial_{\sigma_1} G^{(1)} + (A c_1^{\frac{3}{2}} \partial_{\sigma_1} G^{(1)} + B c_1^{\frac{1}{2}} c_2 \partial_{\sigma_2} G^{(2)}) \partial_{\sigma_1}^2 G^{(1)}$$
$$+ \varepsilon^2 H^{(1)}(\sigma_1, \sigma_2, \omega, \tau, \nabla G, \nabla^2 G) = 0$$
$$\partial_\tau \partial_{\sigma_2} G^{(2)} + (C c_1 c_2^{\frac{1}{2}} \partial_{\sigma_1} G^{(1)} + D c_2^{\frac{3}{2}} \partial_{\sigma_2} G^{(2)}) \partial_{\sigma_2}^2 G^{(2)}$$
$$+ \varepsilon^2 H^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2, \omega, \tau, \nabla G, \nabla^2 G) = 0$$

と書き直すことができる。ここで $\varepsilon = 0$ とすると、$H^{(1)}, H^{(2)}$ の項は消えるが、さらに2本目の方程式に対する $\mathcal{R}|_{\varepsilon=0} = 0$ から　$\partial_\tau v^{(2)} = \partial_\tau \partial_{\sigma_2} G^{(2)}(\sigma_2, \omega, \tau) = 0$　となり、

$$\partial_{\sigma_2} G^{(2)}(\sigma_2, \omega, \tau) = \partial_{\sigma_2} \mathcal{F}^{(2)}(\sigma_2, \omega, \tau)$$

がわかる。また

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \frac{(c_1 - c_2)\tau^2}{\varepsilon^2}$$

より、t, σ_1 を固定して $\varepsilon \to 0$ とすると、$\sigma_2 \to -\infty$ となるので、（3）より、$\varepsilon = 0$ では　$\partial_{\sigma_2} G^{(2)}(\sigma_2, \omega) = 0$　となり、一本目の方程式は

$$\partial_\tau \partial_{\sigma_1} G^{(1)} + A c_1^{\frac{3}{2}} \partial_{\sigma_1} G^{(1)} \partial_{\sigma_1}^2 G^{(1)} = 0$$

となる。これは $\partial_{\sigma_1} G^{(1)}$ に関する単独のバーガーズ方程式で解は爆発することがわかる。ただ、このように σ_1, σ_2 を都

合のいいように使い分けていいのか定かではないし、エネルギー不等式などが成り立つかどうかも不明である。システム特有の問題点があるかもしれない。確認すべき点は、他にもたくさんあるのである。

参考文献

[1] R. Agemi and K. Yokoyama, The null condition and global existence of solutions to systems of wave equations with different speeds, Advances in Nonlinear P.D.E. and Stoch., Series on Advances in Math. for Appl. Sci., 48 (1998), pp. 43–86, World Scientific.

[2] S. Alinhac and P. Gérard, Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash–Moser, Inter Editions, Paris, (1991)

[3] S. Alinhac, Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux II, Duke Math. J., 73(3) (1994), pp. 543–560.

[4] S. Alinhac, Explosion des solutions d'une équation d'ondes quasi-linéaire en deux

dimensions d'espace, Comm. P.D.E., 21 (1996), pp. 923–969.

[5] S. Alinhac, Blowup of small data solutions for a quasilinear wave equation in two space dimensions, Ann. of Math., 149 (1999), pp. 97–127.

[6] S. Alinhac, Blowup of small data solutions for a quasilinear wave equation in two space dimensions II, Acta Math., 182 (1999), pp. 1–23.

[7] A. Hoshiga, The initial value problems for quasilinear wave equations in two space dimensions with small data, Advances in Math. Sci. Appl., 5 (1995), pp. 67–89.

[8] A. Hoshiga, The asymptotic behaviour of the radially symmetric solutions to quasilinear wave equations in two space dimensions, Hokkaido Math. J., 24 (1995), pp. 575–615.

[9] A. Hoshiga, The lifespan of solutions to quasilinear hyperbolic systems in two-space dimensions, Nonlinear Anal., 42 (2000), pp. 543–560.

[10] A. Hoshiga, Strict estimate for the lifespan of radially symmetric solutions to systems of quasi-

linear wave equations with multiple speeds, preprint.

[11] A. Hoshiga and H. Kubo, Global small amplitude solutions of nonlinear hyperbolic systems with a critical exponent under the null condition, SIAM J. Math. Anal., 31 (2000), pp. 486-513.

[12] A. Hoshiga and H. Kubo, Global existence to systems of fully nonlinear wave equations, preprint.

[13] F. John, Blow up of radial solutions of $u_{tt} = c^2(u_t)\Delta u$ in three space dimensions, Mat. Apl. Comput., V (1985), pp. 3-18.

[14] F. John, Existence for large times of strict solutions of nonlinear wave equations, Comm. Pure Appl. Math., 40 (1987), pp. 79-109.

[15] S. Katayama, Global existence for systems of nonlinear wave equations in two space dimensions, II, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 31 (1995), pp. 645-665.

[16] S. Klainerman, The null condition and global existence to nonlinear wave equations, Lectures in Appl. Math., 23 (1986), pp. 293-326.

[17] K. Kubota and K. Yokoyama, Global existence of

classical solutions to systems of nonlinear wave equations with different speeds of propagation, Japan. J. Math., 27 (2001), pp. 113-202.

[18] T. Sideris and S.-Y. Tu, Global existence for systems of nonlinear wave equations in 3D with multiple wave speeds, SIAM J. Math. Anal., 33 (2001), pp. 477-488.

[19] H. Yin, The Blowup mechanism of small data solutions for the quasilinear wave equations in three space dimensions, Acta Math. Sin., 17 (1) (2001), pp. 35-56.

[20] H. Yin, The blowup for 2-D quasilinear wave equations with cubic nonlinearity, Science in China (Series A), 45(3) (2002), pp. 307-320.

[21] K. Yokoyama, Global existence of classical solutions to systems of wave equations with critical nonlinearity in three space dimensions, J. Math. Soc. Japan, 52 (2000), pp. 609-632.