数理解析研究所講究録 1334 巻 2003 年 64-68

Statistical estimation based on totally isotropic observation

津田美幸　科学技術振興事業団今井量子計算機構プロジェクト

1　はじめに

統計的推定問題は, 標本空間 $\mathcal{X}$ から母数空間 Θ への写像 $\hat{\theta}$ を選んで, $\hat{\theta}$ によって決まるリスクを最小にする問題である. つまり, ある適切な制約 P を満たす推定量の空間 $\hat{\Theta}=\{\hat{\theta}\mid\hat{\theta}:\mathcal{X}\to\Theta,\ P(\hat{\theta})=\mathrm{true}\}$ 上にある非負値関数 $R:\hat{\Theta}\to[0,\infty)$ が与えられている時に, $R(\hat{\theta})$ を最小にする $\hat{\theta}$ は何か, またその時の $R(\hat{\theta})$ の値は何か, などが問題になる. ここで, 推定量の制約 P は例えば不偏性などであり, リスクを表す関数 R は統計的モデルと損失関数などに基づいて定まる.

適切な推定量の全体 $\hat{\Theta}$ に群 G が変換群として作用している場合を考える. G が微分可能で $\hat{\theta}_0\in\hat{\Theta}$ が R を最小にするならば, $R(g(\hat{\theta}_0))$ の g に関する微分は常に 0 であるから, $\hat{\theta}_0$ のための良い方程式 $r(\hat{\theta})=0$ (必要条件) が得られる. もちろん, 微分するだけでは局所的な情報しか得られないので, 方程式 $r(\hat{\theta})=0$ だけで $\hat{\theta}_0$ が一意に決まるとは限らない. しかし, 例えば G が解析的な性質を持ち, しかも G が $\hat{\Theta}$ に推移的に作用するならば, 微分が大域的な性質を強く反映するので $r(\hat{\theta})=0$ が $\hat{\theta}_0$ の十分条件にもなり得る. 全ての統計的推定問題がこのような構造を持っているとは限らないが, 典型的な問題の多くはこのような枠組で議論できると思われる. また, 量子力学系の統計的推定 (量子推定) の典型的な問題もこのような枠組で議論できる.

本稿では, 量子コヒレント状態のホモダイン測定による推定問題を中心に, このような枠組での統計的推定問題について考える.

2　古典的な統計的推定問題

まず, 古典の場合から考える.

X は n 次元の正規分布 $N_n(\mu,\Sigma)$ に従う確率変数とする. ただし, μ は未知の平均ベクトル, Σ は既知の分散共分散行列とする. Θ は実 m 次元空間 $\mathbb{R}^m$ で, $\mathbb{R}$ 線形な単射 $M:\Theta\to\mathbb{R}^n$ が与えられているとする. つまり X の分布は $N_n(M(\theta),\Sigma)$ であるが, $\theta\in\Theta$ が分からないので X の観測に基づいて θ を推定することを問題にする. 推定量 $\hat{\theta}$ には, 不偏性の条件を課す. リスクは不偏推定量の分散共分散行列の適当な正定値 2 次形式とする. また, $\hat{\theta}:\mathbb{R}^n\to\Theta$ は $\mathbb{R}$ 線形 ($\hat{\theta}\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n,\Theta)$) であるとする. 条件を満たす推定量の全体 $\hat{\Theta}$ は

$$\hat{\Theta}\ =\ \{\hat{\theta}\mid\hat{\theta}\circ M=\mathrm{id}_m\}$$

となる．ただし，id_m は $\mathbb{R}^m$ の恒等写像を表すものとする．M の像 $\mathrm{im}M$ だけを見た時の M の逆写像を M^{-1} とすると，

$$\hat{\Theta} \ = \ \{\hat{\theta} = M^{-1} + L \mid L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \Theta),\ \mathrm{ker}L = \mathrm{im}M\}$$

と書ける．$\{L \mid \mathrm{ker}L = \mathrm{im}M\}$ は和に関して Lie 群であるから微分を考えることができ，この問題の解 (最良線形不偏推定量) はまた一様最小分散不偏推定量でもある．

3　量子力学系の状態と測定

量子力学系の状態は，複素数体 $\mathbb{C}$ 上のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の射影作用素に基づいて構成される．また，その典型的な測定 (射影測定，単純測定) は，$\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 上のいくつかのエルミート作用素 $\hat{\theta}_1, ..., \hat{\theta}_m$ で互いに可換なものによって表される．ただし，$\mathcal{K}$ は $\mathbb{C}$ 上の別のヒルベルト空間であり，$\mathcal{K}$ に対応する空間の状態は測定のために任意に選ぶことができることにする．ここでも適切な条件を満たす推定量の空間 $\hat{\Theta}$ に群が作用する場合を考える．例えば，エルミート作用素や射影作用素の空間にはユニタリ群が作用する．特に射影空間にはユニタリが推移的に作用する．

量子コヒレント状態モデルの統計的推定問題 [1, 2, 3, 4, 5, 6] は量子推定問題の典型的な例である．この議論では $\mathcal{H}$ は無限次元である．

3.1　単一モードの場合

$\mathbb{R}$ 上の $\mathcal{L}^2$ 可積分な $\mathbb{C}$ 値関数の全体 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ を $\mathcal{H}$ とする．$\mathcal{H}$ の基底を $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, ...$ とする．

$$\begin{aligned} a &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}|n\rangle\langle n+1|, \\ |\alpha\rangle_c &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-|\alpha|^2/2)\alpha^n/\sqrt{n!}|n\rangle \end{aligned}$$

とする．a を消滅作用素，$|\alpha\rangle_c$ に関する射影で表される状態をコヒレント状態，$\alpha \in \mathbb{C}$ をその複素振幅と言う．

$$D(z) \ = \ \exp(-\bar{z}a + za^*) \quad (z \in \mathbb{C})$$

とする．ただし，星印 $*$ は $\mathbb{C}$ 上の作用素としての共役 (行列の転置と複素共役) を表す．$\{D(z)\}$ は $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素の部分群であり，コヒレント状態の空間に推移的に作用する．また，

$$U(z) \ = \ \exp\left(\frac{1}{2}(\bar{z}a^2 - za^{*2})\right)$$

とすると $\{U(z)\}$ もまた $\mathcal{H}$ 上のユニタリの部分群である．状態 (射影作用素) の $U(z)$ による変換をスクイージングと言う．

$\mathcal{H}$ における典型的な測定として, 個数測定とホモダイン測定がある. 個数測定は, 非負整数 $n \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, ...\}$ の $|n\rangle$ の射影作用素への対応で表され, 状態を表す射影作用素を ρ とすると, $n \in \mathbb{Z}^+$ が観測される確率は $\langle n|\rho|n\rangle$ で定まる. ただし, $\langle n| = |n\rangle^*$ とする. 従って, 状態を表す射影作用素が $|\alpha\rangle_c\langle\alpha|_c$ ならば, 個数測定によって得られ確率分布は平均 $|\alpha|^2$ のポアソン分布 $Poi(|\alpha|^2)$ となる. $r, \phi \in \mathbb{R}$ に対して, $D(r\, e^{\sqrt{-1}\phi})|\alpha\rangle_c\langle\alpha|_c D(r\, e^{\sqrt{-1}\phi})^* = |\alpha + r\, e^{\sqrt{-1}\phi}\rangle_c\langle\alpha + r\, e^{\sqrt{-1}\phi}|_c$ の場合は $Poi(|\alpha + r\, e^{\sqrt{-1}\phi}|^2)$ となる. 従って, $r \to \infty$ の極限を考えると, $N(\beta\cos\phi + \gamma\sin\phi, 1/4)$ $(\alpha = \beta + \sqrt{-1}\gamma)$ が得られる. このように極限を考えた測定をホモダイン測定と言う.

コヒレント状態の全体 $\mathcal{C} = \{|\alpha\rangle_c\langle\alpha|_c \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ には $\mathcal{D} = \{D(z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ が推移的に作用するが, $\mathcal{R} = \{U = \exp(\sqrt{-1}\phi a^* a) \mid \phi \in \mathbb{R}\}$ とすると $\mathcal{R}$ は $\mathcal{D}$ の部分群であり, 任意の $\rho \in \mathcal{C}$, 任意の $U \in \mathcal{R}$ に対して ρ の個数測定と $U\rho U^*$ の個数測定は同じ確率分布になる. したがって, このような状態の族に関しては, 個数測定の自由度は $\mathcal{D}/\mathcal{R} \cong [0, \infty)$ となる. 同様に, $\mathcal{E} = \{D(z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ とすると, ホモダイン測定の自由度は $\mathcal{D}/\mathcal{E} \cong O(2, \mathbb{R})/(O(1, \mathbb{R}) \times O(1, \mathbb{R}))$ となる. ただし, $O(\cdot, \mathbb{R})$ は実直交群を表す.

3.2 多モードの場合

$\mathcal{H}^{\otimes n} = \mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ とし,

$$a_i = \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \otimes \underbrace{a}_{i\text{ 個め}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$$

とする. ただし, $\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ の恒等写像とする. a_i を消滅作用素と言う. $P_q(a_1, ..., a_n)$ は $a_1, ..., a_n, a_1^*, ..., a_n^*$ の q 次の斉次多項式で $P_q(a_1, ..., a_n) = P_q(a_1, ..., a_n)^*$ とする. すると,

$$U = \exp(\sqrt{-1}P_q(a_1, ..., a_n))$$

は $\mathcal{H}^{\otimes n}$ のユニタリ変換である. 従って, $\mathcal{H}^{\otimes n}$ の射影作用素 $|0\rangle\langle 0| \otimes \cdots |0\rangle\langle 0|$ (n 個) を

$$|0\rangle\langle 0| \otimes \cdots |0\rangle\langle 0| \mapsto U|0\rangle\langle 0| \otimes \cdots |0\rangle\langle 0|U^*$$

と変換したものもまた射影作用素であるが, $q = 1$ の場合, それらの状態を n モードコヒレント状態と呼ぶ. また, $q = 2$ の場合, U による変換をスクイージングと言う.

多モードの場合においても, 個数測定とホモダイン測定が基本的になる. 個数測定は $(z_1, ..., z_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n$ に対して $\mathcal{H}^{\otimes n}$ の射影作用素

$$|z_1\rangle\langle z_1| \otimes \cdots \otimes |z_n\rangle\langle z_n|$$

を対応させる測定で, その確率は

$$\langle z_1| \otimes \cdots \otimes \langle z_n|\rho|z_1\rangle \otimes \cdots \otimes |z_n\rangle$$

で与えられる. ただし, ρ は状態を表す $\mathcal{H}^{\otimes n}$ の射影作用素である. 多モードの場合のホモダインは, 単一モードの場合と同様に,

$$\rho \mapsto \exp(\sqrt{-1}rP_1(a_1, ..., a_n))\rho\exp(\sqrt{-1}rP_1(a_1, ..., a_n))^*$$

という変換をして個数測定をし, $r \to \infty$ の極限を考えたものである. 多モードのコヒレント状態に対してホモダイン測定を行なうと n 次元の正規分布が得られる.

4 全等方性条件

$\mathcal{H}^{\otimes n} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 上の多モードコヒレント状態の推定問題を考える. $\Theta = \mathbb{R}^m$ とする. $P_q(a_1, ..., a_n)$ は消滅作用素 $a_1, ..., a_n, a_1^*, ..., a_n^*$ の q 次の斉次多項式で $P_q(a_1, ..., a_n) = P_q(a_1, ..., a_n)^*$ とする $(q = 1, 2)$. P_2 は既知とする. P_1 は未知だが, その係数は 未知の母数 $\theta \in \Theta$ で $\mathbb{R}$ 線形的に表されているとする. すなわち, 既知の $M_1, M_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Theta, \mathbb{R}^n)$ によって

$$P_1(a_1, ..., a_n) = {}^t(a_1, ..., a_n)(M_1\theta - \sqrt{-1}M_2\theta) + {}^t(a_1^*, ..., a_n^*)(M_1\theta + \sqrt{-1}M_2\theta)$$

と書ける. ただし, ^{t} は転置を表す. このときに, ホモダイン測定を用いて θ を推定する. 一般に $\mathcal{H}^{\otimes n}$ の測定だけでは θ を識別できない. そこで, $\mathcal{H}^{\otimes n}$ を含む $\mathcal{H}^{\otimes 2n}$ においてホモダイン測定を行なうことにする. 推定量には, 不偏性の条件を課す. また, Θ の非負定値対称形式 G をあらかじめ定めておき, G と θ の推定量 $\hat{\theta}$ の分散共分散行列 V との行列としての積のトレース $\mathrm{tr}(GV)$ をリスクとする.

この問題は, 古典的な確率変数を用いて次のように表せる. X, Y は $2n$ 次元確率変数で, それぞれ $N_{2n}(M\theta, \Sigma)$, $N_{2n}(0, \mathrm{id}_{2n})$ に従う. X, Y の値域をそれぞれ $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ とする. $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ の双対空間 $\mathcal{X}^*$, $\mathcal{Y}^*$ には

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{id}_n \\ \mathrm{id}_n & 0 \end{pmatrix}$$

という形の交代形式 $B_{\mathcal{X}^*}$, $B_{\mathcal{Y}^*}$ が与えられているとする. X, Y の分散共分散行列 W は, $\mathcal{X}^* \oplus \mathcal{Y}^*$ の非負定値計量である. $\theta \in \Theta$ の推定量 $\hat{\theta}$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}, \Theta)$ の元とする. ただし, その双対写像 $\hat{\theta}^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Theta^*, \mathcal{X}^* \oplus \mathcal{Y}^*)$ の像 $\mathrm{im}\hat{\theta}^*$ へ $B_{\mathcal{X}^*} + B_{\mathcal{Y}^*}$ を制限したものは 0 形式になっている (全等方性), という条件を課す. 推定量 $\hat{\theta}$ の分散 V は, $\mathcal{X}^* \oplus \mathcal{Y}^*$ の計量 W の $\hat{\theta}^*$ による Θ^* への引き戻しである. リスクは $\mathrm{tr}(GV)$ であるが, これを最小にする $\hat{\theta}$ に関して次が成り立つ.

定理 1
(i) $\mathrm{im}M$ と $\ker\hat{\theta}$ は W^{-1} に関して直交する.
(ii) Θ の計量 G を $\hat{\theta} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}, \Theta)$ で $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ に引き戻して $0_{\mathcal{X}} \oplus \mathcal{Y}$ ($0_{\mathcal{X}}$ は $\mathcal{X}$ の零元) に制限したものを H とすると, H を表す行列と $B_{\mathcal{Y}^*}$ を表す行列は可換である.

定理 2 $m = n$ ならば, 定理 1 (ii) の解は一意である.

参考文献

[1] Hayashi, M. (2000). Asymptotic quantum theory for the thermal state family. *Quantum communication, computing and measurement 2* (edited by Kumar, P. D'ariano, G. M. and Hirota, O.), Plenum, New York, 99-104.

[2] Helstrom, C. W. (1976). *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press, New York.

[3] Hirota, O. (1985). *Optical Communication Theory* (in Japanese), Morikita Shuppan.

[4] Holevo, A. S. (1982). *Probabilistic and Statistical Aspect of Quantum Theory*, North-Holland.

[5] Tsuda, Y., Matsumoto, K. and Hayashi, M. (2003) Disturbance of operation in quantum estimation for the Gaussian P-function, *J. Japan Statist. Soc* に投稿中.

[6] Yuen, H. P., and Lax, M. (1973). Multiple-parameter Quantum Estimation and Measurement of Nonselfadjoint Observables, Trans. IEEE, IT-19, 740-750.