

# 数式処理による非線形微分方程式の解法

金 園益

YUANYI JIN

広島大学大学院 工学研究科

GRADUATE SCHOLL OF ENGINEERING, HIROSHIMA UNIVERSITY

金 龍

LONG JIN

広島大学大学院 工学研究科

GRADUATE SCHOLL OF ENGINEERING, HIROSHIMA UNIVERSITY\*†

伊藤 雅明

MASAAKI ITO

広島大学大学院 工学研究科

GRADUATE SCHOLL OF ENGINEERING, HIROSHIMA UNIVERSITY†

## 1 はじめに

自然界の現象を精密にモデル化すると、そのモデル方程式は非線形の偏微分方程式で表されることが多い。その中でも、K-dV(Korteweg-de Vries) 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

は水の波やプラズマ中に励起される波の研究から注目されて来た。このような K-dV 方程式には衝突に対しても安定な孤立波 (ソリトン) や、 $N$  個の孤立波の相互作用を表す解 ( $N$  ソリトン解) が存在することが知られており、逆散乱法や広田の直接法などによってその厳密解が求められている [1]。しかしながら、K-dV 方程式や変形 K-dV (mK-dV) 方程式などの所謂ソリトン方程式以外の一般の非線形方程式に対しては、これらの方法は必ずしも有効であるとは言えない。非線形方程式に含まれる非線形項と分散項とが釣り合う場合には、一定の速度で進行する進行波解が存在する可能性があり、K-dV 方程式や mK-dV 方程式の進行波解である sech 型や tanh 型関数を基にした厳密解の解法が提案されている [2][3][4]。 $N$ -ソリトン解が存在しないようないくつかの非線形方程式に対しても、これらの方法を用いて厳密な進行波解が求められている。しかし、K-dV 方程式や mK-dV 方程式には sech 型や tanh 型以外に楕円関数の解も存在することが知られている。そこで本稿では、これらの個々の解による展開を用いるのではなく、楕円関数を解として含

---

\*kinryu@amath.hiroshima-u.ac.jp

†yyjin@amath.hiroshima-u.ac.jp

‡ito@amath.hiroshima-u.ac.jp

む常微分方程式の解による展開によって、より広いクラスの解を求める代数的手法を示す。また、数式処理システム REDUCE による具体的な解法を示す。

## 2 進行波解

### 2.1 K-dV 方程式の進行波解

K-dV 方程式 (1) の速度  $c$  で伝播する進行波解を求めるために

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(z), \\ z &= x - ct \end{aligned} \quad (2)$$

で表される座標に移ると、(1) は次の常微分方程式となる。

$$-cu' + 6uu' + u''' = 0. \quad (3)$$

ここで ' は  $z$  に関する微分を表す。(3) を  $z$  で積分した後、 $u'$  を掛けてさらに  $z$  で積分すると

$$u'^2 = -2u^3 + cu^2 + Du + E \quad (4)$$

が得られる。ここで  $D, E$  は積分定数である。(4) を孤立波の境界条件、 $D = E = 0$  の下で解くと、次のソリトン解が得られる。

$$u = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct).$$

また、周期的境界条件の下で解けば、Jacobi の楕円関数で表されるクノイダル波が得られる。しかし、この方法は K-dV 方程式のような 3 階の方程式には適用できるが、より高階の微分方程式には適用できない。

### 2.2 tanh-function 法

$u(x, t)$  が次の偏微分方程式に従うとする。

$$G(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (5)$$

ここで  $G$  は  $u$  およびその偏導関数の多項式とする。速度  $c$  で進行する解  $u(x, t) = u(z), z = x - ct$  を求めるために波の座標に移れば、(5) は

$$G(u, -cu', u', u'', \dots) = 0 \quad (6)$$

と表される。

mK-dV 方程式もこのような方程式の一つであり、tanh 型の解が存在することが知られている。そのような事実から (6) の解を次のように tanh 関数の多項式に展開できると仮定する。

$$u(z) = \sum_{i=0}^m a_i \omega^i, \quad (7)$$

$$\omega(z) = \tanh(kz). \quad (8)$$

ここで  $k, c, a_i (i = 0 \dots m)$  は定数である。ここで、多項式の次数  $m$  は  $G$  に含まれる非線形項と最高微分階数を含む項がバランスするように決める。このようにして定まった  $m$  で表される (7) を (6) に代入したとき、それが恒等的に満たされるための条件を求めると、一般的には未定係数  $k, c, a_i (i = 0 \dots m)$  に関する非線形の代数方程式が得られる。このように、微分方程式を解くという問題が代数方程式を解く問題に帰着される。この代数方程式の自明でない解が得られれば、元の微分方程式の進行波解が求まる。

### 3 微分方程式の解による展開

本研究では、 $\tanh$  や  $\operatorname{sech}$  関数という個々の関数による展開を行うのではなく、ある微分方程式の解  $\phi$  によって元の微分方程式の解  $u$  を展開する方法を用いる。その微分方程式として、 $\tanh$  や  $\operatorname{sech}$  関数以外に楕円関数をも解として含む微分方程式

$$\frac{d\phi}{dz} = \sqrt{\sum_{i=0}^n b_i \phi^i} \quad (9)$$

を考える。 $b_i$  は定数である。以下の議論は、 $n$  が任意の正の整数に対しても成立つが、(9) の解が具体的に求められるという意味では  $n \leq 4$  としておかなければならない。(9) は K-dV 方程式の進行波解を求めるときに得られた (4) を拡張したものである。

$\tanh$ -function 法と同様に、速度  $c$  で運動している座標で見た方程式を

$$G(u, -cu', u', u'', \dots) = 0 \quad (10)$$

とし、(10) の解  $u$  が次のように  $\phi$  の多項式に展開できると仮定する。

$$u = \sum_{i=0}^m a_i \phi^i \quad (11)$$

ここで  $a_i$  は定数である。解を求める手法は、 $\tanh$ -function 法と同様に、まず方程式に含まれる最大次数の項と最高微分階数の項における  $\phi$  の最大次数がバランスするように  $m$  を決める。次に、具体的に  $m$  の値が定まった展開式 (11) を (10) に代入する。しかし、(9) で与えられた関数を用いると、 $u$  の高階微分は、一般には  $\tanh$ -function 法で得られるような多項式とはならない。 $du/dz$  および  $d^2u/dz^2$  を計算してみると、

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{dz} = \sqrt{\sum_{i=0}^n b_i \phi^i} \sum_{i=1}^m i a_i \phi^{i-1} \\ \frac{d^2u}{dz^2} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m i j a_i b_j \phi^{i+j-2} + \sum_{i=2}^m i(i-1) a_i \phi^{i-2} \end{aligned}$$

となり、一般の  $l$  に対しては

$$\frac{d^l u}{dz^l} = \begin{cases} \sum_{i=0}^p \alpha_i \phi^i & l \text{ が偶数} \\ \sqrt{\sum_{i=0}^n b_i \phi^i} \sum_{j=0}^q \beta_j \phi^j = 0 & l \text{ が奇数} \end{cases}$$

となる。ここで、 $\alpha_i, \beta_j$  は  $a_i, b_j$  の関数であり、 $p, q$  は  $l, m, n$  から決まる定数である。それ故、(11) を (10) に代入すると、一般には次の様な形で表される。

$$\sum_{i=0}^p \alpha_i \phi^i + \sqrt{\sum_{i=0}^n b_i \phi^i} \sum_{j=0}^q \beta_j \phi^j = 0 \quad (12)$$

そこで、 $\phi^l$ , および  $\phi^m \sqrt{\sum_{i=0}^n b_i \phi^i}$  の独立性を調べるために各々の Wronskian を計算してみると、 $l \neq m$  であれば、

$$W(\phi^l, \phi^m) \neq 0,$$

$$W \left( \phi^m \sqrt{\sum_{i=0}^n b_i \phi^i}, \phi^\ell \sqrt{\sum_{i=0}^n b_i \phi^i} \right) \neq 0$$

であることが示される。また、

$$W \left( \phi^m, \phi^\ell \sqrt{\sum_{i=0}^n b_i \phi^i} \right)$$

については、 $\sum_{i=0}^n b_i \phi^i$  が平方ではなく、 $m \neq \ell$  であれば互いに独立であることが示せる。それゆえ、(12) が恒等的に満たされるためには、未定係数  $c, a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n$  が次の代数方程式を満たさなければならない。

$$\begin{cases} \alpha_i(c, a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n) = 0, & (i = 0, \dots, p), \\ \beta_j(c, a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n) = 0, & (j = 0, \dots, p). \end{cases}$$

これらの方程式は一般には非線形となるが、自明でない解が求まれば、具体的な  $b_i$  に対して (9) を解き、元の方程式の解を構成することができる。ただし、得られた未定係数の中には  $\sum_{i=0}^n b_i \phi^i$  が平方となる場合も含まれるので、この場合は対応する展開式で改めて計算しなければならない。

#### 4 数式処理プログラムによる応用例

現時点では完全自動化はされていないが、数式処理システム REDUCE 上に作成したプログラムを用いた例として、次の5階の偏微分方程式を取り上げる。

$$u_t + u^2 u_x - u_{5x} = 0 \quad (16)$$

この方程式には、孤立波解 (sech 型) や楕円関数 (sn 関数) の厳密解が存在することが知られている [7]。先ず、 $z = x - ct$  とおき、(16) を変換すると、

$$-cu' + u^2 u' - u'''' = 0 \quad (17)$$

が得られる。非線形項と分散項との釣り合いより  $m = 2$  が定まり、未定係数に関する非線形代数方程式を Gröbner 基底を用いて解くと、6組の解が得られる。自明な解を除き、任意パラメータに対して適当な値を代入すると、以下のように未定係数が決まり

$$\begin{cases} a_0 = 2\sqrt{10}(1+k^2) \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -6\sqrt{10}k^2 \\ b_0 = 1 \\ b_1 = 0 \\ b_2 = -1 - k^2 \\ b_3 = 0 \\ b_4 = k^2 \end{cases}$$

楕円関数型の進行波解

$$u = 2\sqrt{10}(1+k^2) - 6\sqrt{10}k^2 \operatorname{sn}^2(z, k)$$

が得られる。ここで  $0 < k^2 < 1$  である。未定係数の解として

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ a_1 = -\frac{3}{2}\sqrt{10} \\ a_2 = 0 \\ b_0 = 0 \\ b_1 = 0 \\ b_2 = 1 \\ b_3 = -1 \\ b_4 = 0 \end{cases}$$

をとると、次の孤立波解が得られる。

$$u = \frac{\sqrt{10}}{2}(1 - 3\operatorname{sech}^2(z))$$

## 参 考 文 献

- [1] R.K. Bullough and P.J. Caudrey eds. "Solitons", Springer Topics in Current Physics **17** (Springer-Verlag, 1980, New York).
- [2] W. Hereman, P.P. Kopel, Exact solitary wave solutions of nonlinear evolution and wave equations using direct algebraic method. J. Phys. A: Math. Gen. **19** (1990), 607-628.
- [3] H.B.Lan and K.L.Wang, Exact solution for two nonlinear eqations, J.Phys.A:Math.Gen. **23**(1990), 4097-4105.
- [4] Z.B. Li and M.L. Wang, Traveling wave solutions to the two-dimensional KdV-Burgers equation, J. Phys. A : Math. Gen. **26** (1993), 6027-6031.
- [5] E.J.Parkes and B.R.Duffy, An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations, Comp.Phys.Comm. **98**(1996), 288-300.
- [6] E.G.Fan, Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, Phys.lett. **A277**(2000), 212-218.
- [7] K. Kano and T. Nakayama, An exact solutin of the wave equation  $u_t + uu_x - u_{(5x)}$ , J. Phys. Soc. Jpn. **50**(1981), 361-363.