数理解析研究所講究録 1335 巻 2003 年 76-83

Associative binary relation and rootfinding methods

西沢 清子
NISHIZAWA, KIYOKO
城西大学理学部
JOSAI UNIV., DEPT.MATH. *

尾身 和馬
OMI, KAZUMA
城西大学大学院
JOSAI UNIV., DEPT.MATH. †

1 序

本論文は、S. Northshield の最近の論文 [1], [2] の紹介である。ここでは、体 K 上に 2 項間作用素を導入し、この作用素と root-finding algorithm との関係をみる。今回は、 K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に制限する。この制限でもリー群の例として意味があることに注意しておく。

2 体 K 上のメビウス変換の力学系

$K=\mathbb{C}$ とする。$\theta(x)=x^{2}-ax-b$ とする。ξ_{1}, ξ_{2} は、$\theta(x)$ の零点とする。$K=\mathbb{C}$ ならば $\xi_{1}, \xi_{2}\in K$ である。一般の K の場合この仮定は必要である。$\xi_{1}=\xi_{2}$ となる場合も含む。任意の $c\in K$ に対して、$\theta(x)$ は次のメビウス変換 $m(x)$ の特性多項式である。∞ に関しては、$m(\infty)=c,\ m(a-c)=\infty$ である。

$$m(x)=\frac{cx+b}{x-a+c},\ m(x)^{-1}=\frac{(a-c)x+b}{x-c}$$

$G=K\cup\{\infty\}-\{\xi_{1}, \xi_{2}\}$ とする。G の任意の点 r_{0} のメビウス変換 $m(x)$ による反復列 $\{r_{n}\}$ を次のように定義し、この数列 $\{r_{n}\}$ をメビウス列と呼ぶ。

$$r_{n+1}=m(r_{n}),\ r_{n-1}=m^{-1}(r_{n})$$

命題 1
r_{n} は、$a=c$ という条件下で一般化されたフィボナッチ数列の比になっている。

証明 初期値 $G_{0}=1,\ G_{1}=r_{0}$ を与え G_{n} を次のように定義する。

$$\frac{G_{n+2}}{G_{n+1}}=\frac{cG_{n+1}+bG_{n}}{G_{n+1}+(c-a)G_{n}}$$

$a=c$ のとき

$$\frac{G_{n+2}}{G_{n+1}}=\frac{aG_{n+1}+bG_{n}}{G_{n+1}+(a-a)G_{n}}=\frac{aG_{n+1}+bG_{n}}{G_{n+1}}$$

*kiyoko@math.josai.ac.jp
†mm0202@math.josai.ac.jp

より $G_{n+1}=aG_{n+1}+bG_n$ が成り立つ。この数列 $\{G_n\}$ が一般化されたフィボナッチ数列である。
$a=c$ の条件より $\tilde{m}(x)=\dfrac{ax+b}{x}$ とする。帰納法により $r_0=\dfrac{r_0}{1}=\dfrac{G_1}{G_0}$, $r_n=\dfrac{G_{n+1}}{G_n}$ とすれば、

$$r_{n+1}=\tilde{m}(r_n)=\tilde{m}(\frac{G_{n+1}}{G_n})=\frac{aG_{n+1}+bG_n}{G_{n+1}}=\frac{G_{n+2}}{G_{n+1}}$$

∎

3 G 上の作用素 $\oplus$ について

定義 2

任意の $x,\ y\in G$ に対して G 上の作用素を次のように定義する：$x\oplus y=\dfrac{xy+b}{x+y-a}$.

定理 3

作用素 $\oplus$ によって G は、アーベル群になる。

証明

- 結合律については、以下の通りである。

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、メビウス変換を $\Phi_A(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ と定義する。$M=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ に対して、メビウス変換を用いて $\Phi_{M+xI}(y)=\dfrac{xy+b}{x+y-a}=x\oplus y$ と表せる。従って

$$\begin{aligned}(x\oplus y)\oplus z &= z\oplus(x\oplus y)=\Phi_{M+zI}(x\oplus y)=\Phi_{M+zI}(\Phi_{M+xI}(y))=\Phi_{(M+zI)(M+xI)}(y)\\ &= \Phi_{(M^2+(z+x)M+zxI)}(y)=\Phi_{(M+xI)(M+zI)}(y)=\Phi_{M+xI}(\Phi_{M+zI}(y))=\Phi_{M+xI}(z\oplus y)\\ &= \Phi_{M+xI}(y\oplus z)=x\oplus(y\oplus z).\end{aligned}$$

- 単位元の存在については、 $x\oplus\infty=x$ が成り立つことより明らかである:

$$\lim_{y\to\infty}x\oplus y=\lim_{y\to\infty}\frac{x+\frac{b}{y}}{\frac{x}{y}+1-\frac{a}{y}}=\frac{x}{1}=x.$$

- 任意の x の逆元の存在については、$x\oplus(a-x)=\infty$ が成り立つことより明らかである:

$$\lim_{y\to a-x}x\oplus y=\lim_{y\to a-x}\frac{xy+b}{x-a+y}=\infty.$$

- 可換であることは作用素 $\oplus$ の定義より明らかである。

∎

4 $x^{\oplus n}$ について

定義 4

$x^{\oplus n}$ を次のように定義する：$x^{\oplus 0}=\infty$, $x^{\oplus(n+1)}=x\oplus x^{\oplus n}$, $x^{\oplus(-n)}=(a-x)^{\oplus n}$.

命題 5

メビウス変換 $m(x)$ と作用素 $\oplus$ の間には、次の関係が成り立つ。

$$m(x)=x\oplus c,\ m^{-1}(x)=x\oplus(a-x)$$

命題 6

メビウス列 $\{r_n\}$ は、任意の $n,\ k\in\mathbb{Z}$ に対して次の表現を持つ：$r_{n+k}=r_k\oplus c^{\oplus n}$.

特に、$r_1=c$, $r_0=\infty$ ならば $r_n=c^{\oplus n}$ となる。

5 作用素 $\oplus$ とニュートン法について

$K=\mathbb{C}$ のとき初期値 t_0 に対し関数 $f(x)$ の零点を求めるニュートン法は、次のように定義される:

$$t_{n+1}=t_n-\frac{f(t_n)}{f'(t_n)}.$$

この数列 $\{t_n\}$ をニュートン列と呼ぶ。

定理 7
初期値を c とする $\theta(x)=x^2-ax-b$ のニュートン列 $\{t_n\}$ は、作用素 $\oplus$ を用いて $t_n=c^{\oplus 2^n}$ と表せる。

証明 $\theta(x)$ に対するニュートン法の定義より

$$t_{n+1}=t_n-\frac{t_n^2-at_n-b}{2t_n-a}=\frac{t_n^2+b}{2t_n-a}=t_n\oplus t_n.$$

帰納法により $t_0=c$ として、$t_1=t_0\oplus t_0=c\oplus c=c^{\oplus 2}$.
$t_k=c^{\oplus 2^k}$ ならば $t_{k+1}=t_k\oplus t_k=c^{\oplus 2^k}\oplus c^{\oplus 2^k}=c^{\oplus 2^{k+1}}$. ∎

命題 8
メビウス列 $\{r_n\}$ について $r_n=r_0\oplus c^{\oplus n}$ が成り立つ。

証明 メビウス列の定義とメビウス変換 $m(x)$ と作用素 $\oplus$ の関係より

$$r_n=m(r_{n-1})=r_{n-1}\oplus c=r_0\oplus \underbrace{c\oplus\cdots\oplus c}_{n\text{ 個}}=r_0\oplus c^{\oplus n}.$$

∎

定理 9
初期値を c とする $\theta(x)=x^2-ax-b$ のニュートン列 $\{t_n\}$ は、メビウス列 $\{r_n\}$ を用いて $t_n=(a-r_0)\oplus r_{2^n}$ と表せる。

証明 初期値 $t_0=c$ より $t_n=c^{\oplus 2^n}$ かつ $r_{2^n}=r_0\oplus c^{\oplus 2^n}$ が成り立っている。この r_{2^n} に $(a-r_0)$ を $\oplus$ で作用させると

$$(a-r_0)\oplus r_{2^n}=(a-r_0)\oplus r_0\oplus c^{\oplus 2^n}=\infty\oplus c^{\oplus 2^n}=c^{\oplus 2^n}.$$

∎

6 作用素 $\oplus$ と Halley 法について

$K=\mathbb{C}$ のとき十分滑らかな関数 $f(x)$ に対し $L_f(z)=\frac{f(z)f''(z)}{f'(z)^2}$ とする。このとき関数 $f(x)$ の零点を求める Halley 法は、次のように定義される:

$$z_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}\left(\frac{2}{2-L_f(z_n)}\right)=z_n-\frac{1}{\frac{f'(z_n)}{f(z_n)}-\frac{f''(z_n)}{2f'(z_n)}}.$$

この数列 $\{z_n\}$ を Halley 列と呼ぶ。
$\theta(x)=x^2-az-b$ に対する Halley 列 $\{z_n\}$ は、

$$z_{n+1} = z_n-\frac{1}{\frac{2z_n-a}{z_n^2-az_n-b}-\frac{2}{2(2z_n-a)}}=z_n-\frac{(2z_n-a)(z_n^2-az_n-b)}{(2z_n-a)^2-(z_n^2-az_n-b)}$$

$$
\begin{aligned}
&= z_n - \frac{2z_n^3 - 3az_n^2 + (a^2-2b)z_n + ab}{3z_n^2 - 3az_n + a^2 + b} \\
&= \frac{3z_n^3 - 3az_n^2 + (a^2+b)z_n - \{2z_n^3 - 3az_n^2 + (a^2-2b)z_n + ab\}}{3z_n^2 - 3az_n + b + a^2} = \frac{z_n^3 + 3bz_n - ab}{3z_n^2 - 3az_n + b + a^2}
\end{aligned}
$$

となる。

第 4 章で述べた $x^{\oplus n}$ と Halley 法との関係についてみる。$x^{\oplus n}$ で定義される有理関数を $g^{(n)}(x)$ とおく。例として $n=4$ まで示す。

$$
\begin{aligned}
g^{(0)}(x) &= x^{\oplus 0} = \infty \\
g^{(1)}(x) &= x^{\oplus 1} = x \\
g^{(2)}(x) &= x^{\oplus 2} = x \oplus x = \frac{x^2+b}{2x-a} \\
g^{(3)}(x) &= x^{\oplus 3} = x \oplus \frac{x^2+b}{2x-a} = \frac{x^3+3bx-ab}{3x^2-3ax+b+a^2} \\
g^{(4)}(x) &= x^{\oplus 4} = x \oplus x^{\oplus 3} = x \oplus \frac{x^3+3bx-ab}{3x^2-3ax+b+a^2} \\
&= \frac{x^4+6bx^2-4abx+b(a^2+b)}{4x^3-6ax^2+4(a^2+b)-a^3-2ab}
\end{aligned}
$$

$g^{(3)}(x)$ は、$\theta(x) = x^2 - ax - b$ に対しての Halley 法である。

定義 10

k 次 Halley 列 $\{t_n^{(k)}\}$ を次のように定義する：$t_{n+1}^{(k)} = g^{(k)}(t_n^{(k)})$.

定理 11

$t_0^{(k)} = c$ のとき、k 次 Halley 列 $\{t_n^{(k)}\}$ は、メビウス列 $\{r_n\}$ と $t_n^{(k)} = (a - r_0) \oplus r_{k^n}$ の関係を持つ。

証明 k 次 Halley 列の定義と初期値 $t_0^{(k)} = c$ より

$$
t_n^{(k)} = g^{(k)}(t_{n-1}^{(k)}) = (t_{n-1}^{(k)})^{\oplus k} = (g^{(k)}(t_{n-2}^{(k)}))^{\oplus k} = (t_{n-2}^{(k)})^{\oplus k^2} = (g^{(k)}(t_0^{(k)}))^{\oplus k^{(n-1)}} = (t_0^{(k)})^{\oplus k^n} = c^{\oplus k^n}.
$$

一方、$r_{k^n} = r_0 \oplus c^{\oplus k^n}$ が成り立っている。この r_{k^n} に $(a - r_0)$ を $\oplus$ で作用させると

$$
(a - r_0) \oplus r_{k^n} = (a - r_0) \oplus r_0 \oplus c^{\oplus k^n} = \infty \oplus c^{\oplus k^n} = c^{\oplus k^n}.
$$

∎

命題 12

k 次 Halley 列 $\{t_n^{(k)}\}$ に対して $k=2$ ならば数列 $\{t_n^{(2)}\}$ はニュートン列、$k=3$ ならば数列 $\{t_n^{(3)}\}$ は Halley 列である。

7 $x^{\oplus n}$ で定義される有理関数について

$x^{\oplus n}$ で定義される有理関数を $g^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ とする。$x^{\oplus 0} = \dfrac{P_0(x)}{Q_0(x)} = \infty$ より $P_0 = 1,\ Q_0 = 0$ とする。

定理 13

$M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ に対してメビウス変換 $\Phi_{M+xI}(y) = \dfrac{xy+b}{x+y-a} = x \oplus y$, $x^{\oplus n} = \dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ に対して

$\begin{pmatrix} P_{n+1}(x) \\ Q_{n+1}(x) \end{pmatrix} = (M + xI) \begin{pmatrix} P_n(x) \\ Q_n(x) \end{pmatrix}$ が成り立つ。

証明 第3章の結合律を示した M について

$$(M+xI)\begin{pmatrix} P_{n+1}(x) \\ Q_{n+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & b \\ 1 & x-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_n(x) \\ Q_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xP_n(x)+bQ_n(x) \\ P_n(x)+(x-a)Q_n(x) \end{pmatrix}.$$

$$\frac{P_{n+1}(x)}{Q_{n+1}(x)} = x^{\oplus n+1} = x \oplus x^{\oplus n} = x \oplus \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{x\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}+b}{x+\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}-a} = \frac{xP_n(x)+bQ_n(x)}{P_n(x)+(x-a)Q_n(x)}.$$

∎

系 14
$P_n(x)$ は、monic, centered であり、$Q_n(x)$ の最高次係数は、n である:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_0 \\ Q_n(x) &= nx^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + \cdots + b_0. \end{aligned}$$

証明 $n=4$ までは、すでに第6章で示したように成り立っている。
帰納法により $n=k$ のとき

$$\begin{aligned} P_k(x) &= x^k + a_{k-2}x^{k-2} + a_{k-3}x^{k-3} + \cdots + a_0 \\ Q_k(x) &= kx^{k-1} + b_{k-2}x^{k-2} + b_{k-3}x^{k-3} + \cdots + b_0 \end{aligned}$$

と仮定すると

$$\begin{pmatrix} P_{k+1}(x) \\ Q_{k+1}(x) \end{pmatrix} = (M+xI)\begin{pmatrix} P_k(x) \\ Q_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xP_k(x)+bQ_k(x) \\ P_k(x)+(x-a)Q_k(x) \end{pmatrix}$$

が成り立つことから、一般の n に対して成り立つ。 ∎

$x^{\oplus n}$ で定義される有理関数 $g^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ については、次の性質を持つ。$\{u_n\}$ を $u_0=0,\ u_1=1,\ u_{n+2} = au_{n+1}+bu_n$ と定義する。この3項間漸化式を満たす数列 $\{u_n\}$ を一般的なフィボナッチ数列と呼ぶ。この数列を用いて $P_n(x),\ Q_n(x)$ を具体的に表現できる。

命題 15
一般的なフィボナッチ数列 $\{u_n\}$ を用いて $P_n(x),\ Q_n(x)$ は、次のように表現される。

$$\begin{aligned} P_n(x) &= b\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k}(-1)^k u_{k-1} \\ Q_n(x) &= -\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k}(-1)^k u_k \end{aligned}$$

証明 $M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ とすると $\begin{pmatrix} P_n(x) \\ Q_n(x) \end{pmatrix} = (M+xI)\begin{pmatrix} P_{n-1}(x) \\ Q_{n-1}(x) \end{pmatrix}$ が成り立つことから、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_n(x) \\ Q_n(x) \end{pmatrix} &= (M+xI)\begin{pmatrix} P_{n-1}(x) \\ Q_{n-1}(x) \end{pmatrix} = (M+xI)^2\begin{pmatrix} P_{n-2}(x) \\ Q_{n-2}(x) \end{pmatrix} = (M+xI)^n\begin{pmatrix} P_0(x) \\ Q_0(x) \end{pmatrix} \\ &= (M+xI)^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k}M^k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k}(-1)^k(-1)^kM^k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix} = (-1)^n M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} P_{n(x)} \\ Q_n(x) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k x^{n-k} \begin{pmatrix} v_k \\ w_k \end{pmatrix}.$$

M は、特性多項式 $M^2 + aM - bI = 0$ を満たす。そして数列 $\{v_n\}$, 数列 $\{w_n\}$ は、差分方程式 $x_{n+2} = ax_{n-1} + bx_n$ を満たす。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} &= M^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} &= (-1)M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって $v_0 = 1,\ v_1 = 0,\ w_0 = 0,\ w_1 = -1$ となる。数列 $\{u_n\}$ は、$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ を満たし $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ より $u_{-1} = \frac{1}{b}$ となる。数列 $\{v_n\}$, 数列 $\{w_n\}$ も $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ を満たすことから

$$v_n = bu_{n-1},\ w_n = -u_n$$

と表すことができる。よって

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= b \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k} (-1)^k u_{k-1} \\
Q_n(x) &= -\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k} (-1)^k u_k
\end{aligned}$$

と表現することができる。 ∎

8 作用素 $\oplus$ と Secant 法について

$K = \mathbb{C}$ のとき 2 つの初期値 s_0, s_1 に対し関数 $f(x)$ の零点を求める Secant 法は、次のように定義される:

$$s_{n+1} = s_n - f(s_n) \frac{s_n - s_{n-1}}{f(s_n) - f(s_{n-1})}.$$

この数列 $\{s_n\}$ を Secant 列と呼ぶ。

定理 16

$\theta(x) = x^2 - ax - b$ の *Secant* 列 $\{s_n\}$ は、作用素 $\oplus$ に関して次の三項間漸化式を満たす：

$$s_{n+1} = s_n \oplus s_{n-1}$$

証明 $\theta(x)$ に対する Secant 法の定義より

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= s_n - \theta(x) \frac{s_n - s_{n-1}}{\theta(s_n) - \theta(s_{n-1})} = \frac{s_{n-1}\theta(s_n) - s_n\theta(s_{n-1})}{\theta(s_n) - \theta(s_{n-1})} \\
&= \frac{s_{n-1}s_n^2 - as_{n-1}s_n - s_{n-1}b - s_n s_{n-1}^2 + as_n s_{n-1} + s_n b}{s_n^2 - as_n - b - s_{n-1}^2 + as_{n-1} + b} \\
&= \frac{s_n s_{n-1}(s_n - s_{n-1}) + b(s_n - s_{n-1})}{(s_n + s_{n-1})(s_n - s_{n-1}) - a(s_n - s_{n-1})} \\
&= \frac{s_n s_{n-1} + b}{s_n + s_{n-1} - a} = s_n \oplus s_{n-1}.
\end{aligned}$$

■

シード (1, 1) で決まるフィボナッチ数列 $\{F_n\}$ とする。

定理 17
$\theta(x)=x^2-ax-b$ に対する *Secant* 列 $\{s_n\}$ に関して次式が成り立つ。

$$s_n = s_0^{\oplus F_{n-1}} \oplus s_1^{\oplus F_n}$$

証明 $F_{-1}=1,\ F_0=0$ を補う。帰納法により
$n=0$ のとき

$$s_0^{\oplus F_{-1}} \oplus s_1^{\oplus F_0} = s_0^{\oplus 1} \oplus s_1^{\oplus 0} = s_0^{\oplus 1} \oplus \infty = s_0.$$

$n=1$ のとき

$$s_0^{\oplus F_0} \oplus s_1^{\oplus F_1} = s_0^{\oplus 0} \oplus s_1^{\oplus 1} = \infty \oplus s_1^{\oplus 1} = s_1.$$

$n=k-1,\ k$ のとき

$$s_{k-1} = s_0^{\oplus F_{k-2}} \oplus s_1^{\oplus F_k},\ s_k = s_0^{\oplus F_{k-1}} \oplus s_1^{\oplus F_k}$$

が成り立つとする。

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k \oplus s_{k-1} = (s_0^{\oplus F_{k-1}} \oplus s_1^{\oplus F_k}) \oplus (s_0^{\oplus F_{k-2}} \oplus s_1^{\oplus F_{k-1}}) \\ &= s_0^{F_{k-1}} \oplus s_0^{\oplus F_{k-2}} \oplus s_1^{\oplus F_k} \oplus s_1^{\oplus F_{k-1}} = s_0^{\oplus F_k} \oplus s_1^{\oplus F_{k+1}}. \end{aligned}$$

■

9 作用素 $\oplus$ による収束について

今、$K=\mathbb{C}$ あるいは $\mathbb{R}$ とする。収束について示すために一般の K は、任意の $x,\ y\in K$ に対し以下のようなノルムが定義されているとする。

$$\begin{array}{ll} (a) & |x|=0 \Leftrightarrow x=0 \\ (b) & |x+y| \le |x|+|y| \\ (c) & |xy|=|x||y| \end{array}$$

$G=K\cup\{\infty\}-\{\xi_1,\ \xi_2\}$ 上の関数を定義する。

定義 18
$f(\infty)=1$ とし、$x\in K-\{\xi_1,\ \xi_2\}$ に対して G 上の関数を次のように定義する。

$$f(x)=\left|\frac{x-\xi_1}{x-\xi_2}\right|$$

補題 19
任意の $x,\ y\in K-\{\xi_1,\ \xi_2\}$ に対して次式が成り立つ。

$$f(x\oplus y)=f(x)f(y)$$

この関数方程式を用いて収束について示すことができる。メビウス列 $\{r_n\}$ の収束についていくつか言うことができる。

$m(x) = z \oplus c$ とし $m_n(x)$ は、$m(x)$ を n 回反復させたものとする。

a) $|c-\xi_1| > |c-\xi_2|$ ならば任意の $z \neq \xi_1$ に対して $m_n(z)$ は、ξ_2 に収束する。

b) $|c-\xi_1| = |c-\xi_2|$, $\xi_1 \neq \xi_2$ ならば任意の $z \notin \{\xi_1, \xi_2\}$ に対して $m_n(z)$ は、ξ_1, ξ_2 に収束しない。

c) K が *Archimedean* のとき ξ が θ の唯一の零点ならば任意の $z \neq \xi$ に対して $m_n(x)$ は、ξ に収束する。

$|x_{n+1}-x| = O|x_n - x|^k$, $n \to \infty$ となれば x_n は、k 次収束する。例えば、ニュートン法は 2 次収束して、Halley 法は 3 次収束する。

定理 21
$\theta(x)$ が相異なった解を持ち、メビウス列 $\{r_n\}$ が $\theta(x)$ の解 ξ に収束するならば、k 次 Halley 列 $\{t_n^{(k)}\}$ は ξ に k 次収束する。

参 考 文 献

[1] S. Northshield, On Iterates of Möbius Transformations on Fields, Math. Comp. Vol. 70, 2000, pp.1305 –1310.

[2] S. Northshield, Associativity of the Secant Method, Amer. Math. Monthly Vol. 109, 2002, pp.246 – 257.