数理解析研究所講究録 1336 巻 2003 年 29-43

フーリエ積分作用素の大域的有界性とその応用

MICHAEL RUZHANSKY* AND MITSURU SUGIMOTO**

1. 序論

大域的に次の表示を持つ（フーリエ積分）作用素を考える：

$$Tu(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\phi(x,y,\xi)}a(x,y,\xi)u(y)\,dyd\xi \quad (x\in\mathbb{R}^n). \tag{1.1}$$

ここで $a(x,y,\xi)$ は amplitude function であり，$\phi(x,y,\xi)$ は実数値 phase function で

$$\phi(x,y,\xi)=x\cdot\xi+\varphi(y,\xi)$$

の形を持つものとする．相関数の同値性定理より，local graph condition をもつフーリエ積分作用素は，(局所的には) 常にこの積分で表現されることが知られている．実は, Maslov cohomology class の非自明性により，大域的にこのような表示は持ち得ないのだが，ここでは便宜上敢えて，(1.1) により定義される作用素を「フーリエ積分作用素」と呼ぶことにする．実際，以下に述べるように，この作用素は Egorov theorem の具現化に対応し，シュレディンガー方程式の平滑化作用の問題において自然に登場するものである．

作用素 (1.1) の局所 L^2 有界性の理論は，Hörmander [12] と Eskin [10] により確立されている．ここでは大域的な L^2 有界性を論ずることにする．

われわれが念頭においているのは，

$$\phi(x,y,\xi)=x\cdot\xi-y\cdot p(\xi)\frac{\nabla p(\xi)}{|\nabla p(\xi)|} \tag{1.2}$$

となる場合である．ただし $p(\xi)$ は 1 次斉次関数である．特に $p(\xi)=|\xi|$ の場合は $\phi(x,y,\xi)=x\cdot\xi-y\cdot\xi$ となり，このとき (1.1) で定義される T は擬微分作用素となる．また (1.2) で定義される T は，Fourier multiplier

$$L_p=p(D_x)^2=F_\xi^{-1}p(\xi)^2F_x$$

を Laplacian $-\triangle$ に変換するのに用いられる．ここで F_x （あるいは F_ξ^{-1}）は（逆) Fourier transform を表す．実際，適当な $p(\xi)$ に対する仮定の下 (第 4 節参照)，関係式

$$T\cdot(-\triangle)\cdot T^{-1}=L_p$$

が成立する．Laplacian に関する L^2-理論は良く調べられているから，同様の理論を一般的な作用素 L_p に対して展開するためには，この関係式をふまえて T に関する L^2-理論を構築すればよいことになる．

フーリエ積分作用素の，大域的な L^2-有界性についての研究は少ない．これまでに Asada-Fujiwara [1] や Kumano-go [15] などが知られているのみであるが，残念なが

*Department of Mathematics, Imperial College of Science, Technology and Medicine .
**（講演者）杉本 充，大阪大学大学院理学研究科数学専攻
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University .

らこれらの結果は，われわれの念頭に置く例 (1.2) に対しては適用できない．[1] の結果は，行列

$$\begin{pmatrix} \partial_x\partial_y\phi & \partial_x\partial_\xi\phi \\ \partial_\xi\partial_y\phi & \partial_\xi\partial_\xi\phi \end{pmatrix}$$

の各成分のすべての偏導関数が有界であることを要請しており，シュレディンガー方程式の基本解をファインマンの経路積分の方法で構成する際に応用されている．(詳しくは [1] およびそこで引用されている文献を参照) われわれの例 (1.2) では，$\partial_\xi\partial_\xi\phi$ の成分の有界性がくずれており，[1] の結果は使うことができない．一方 [15] の結果は，$J(y,\xi)=\phi(x,y,\xi)-(x-y)\cdot\xi$ がすべての α と β に対して

$$\left|\partial_y^\alpha\partial_\xi^\beta J(y,\xi)\right| \le C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{1-|\beta|}$$

を満たすことを要請しており，双曲型方程式の基本解の構成に応用されている．われわれの例 (1.2) では，$\alpha=0$ の場合に不成立である．

ここでは，われわれの例 (1.2) をカバーする新しい L^2-理論を展開していこう．$m\in\mathbb{R}$ に対して $L^2_m(\mathbb{R}^n)$ を

$$\|f\|_{L^2_m(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\langle x\rangle^m f(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}; \quad \langle x\rangle^m = \left(1+|x|^2\right)^{m/2}$$

が有限になる f 全体として定義する．次は主定理 (Theorem 3.4) の特別な場合であり，様々な応用を持つであろうと期待している：

Theorem 1.1. $n\ge 2$，$m\in\mathbb{R}$ とする．T を (1.1) と (1.2) により定義する．ただし $p(\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus 0)$ は正値でかつ 1 次斉次であるものとする．また $a(x,y,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_y\times\mathbb{R}^n_\xi)$ は，原点付近の ξ に対しては消えているものとする．また，超曲面 $\Sigma=\{\xi; p(\xi)=1\}$ のガウス曲率は消えないものとし，

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\xi^\gamma a(x,y,\xi)\right| \le C_{\alpha\beta\gamma}\langle x\rangle^{m-|\alpha|} \quad \textit{for all } \alpha,\ \beta,\ \textit{and } \gamma$$

または

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\xi^\gamma a(x,y,\xi)\right| \le C_{\alpha\beta\gamma}\langle y\rangle^{m-|\beta|} \quad \textit{for all } \alpha,\ \beta,\ \textit{and } \gamma$$

を仮定する．このとき T は すべての $m_1\in\mathbb{R}$ に対して，$L^2_{m+m_1}(\mathbb{R}^n)$ から $L^2_{m_1}(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素となる．

第 2 節では，あるクラスの振動積分作用素の大域的 L^2-有界性について論じる．これは，Stein [19] 等において解説されている局所的な結果の大域化に相当する．

第 3 節では，第 2 節の振動積分作用素に対する結果を用いることにより，主定理 Theorem 3.4 を始めとして，フーリエ積分作用素に対する様々なタイプの L^2-有界性の定理について述べる．これらの結果のいくつかは，非正則な表象をもつ擬微分作用素の L^2-有界性に関する結果の拡張にもなっている．これらの結果において，通常課せられる事の多い phase function の斉次性は，必ずしも不要であることに注意しておこう．また，phase function の有限階の導関数の有界性のみ要請している事にも注意しておく（このことは，[1] や [15] では必ずしも触れられていない）．

さらに，Theorem 3.4 (および Theorem 3.3) は，SG pseudo-differential (Cordes [8] 参照) や SG Fourier integral operators (Coriasco-Rodino [9] およびその引用文献 Coriasco を参照) の L^2-有界性のための仮定を，実質的に弱くしている．これらの作用素は，SG hyperbolic partial differential equations (大雑把に言って，多項式増大度

の係数を持つ双曲型方程式) を取り扱うために用いられる．表象のクラス SG^{m_1,m_2} は $a=a(y,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n_y\times\mathbb{R}^n_\xi)$ で，評価式

$$|\partial_y^\beta\partial_\xi^\gamma a(y,\xi)|\le C_{\beta\gamma}\langle y\rangle^{m_1-|\beta|}\langle\xi\rangle^{m_2-|\gamma|}\quad\text{for all }\beta\text{ and }\gamma$$

を満たすもの全体として定義する．また，SG Fourier integral operators は

$$Tu(x)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(x\cdot\xi+\varphi(y,\xi))}a(y,\xi)u(y)d\xi dy$$

(またはその adjoint) として定義する．ここで $a\in SG^{m_1,m_2}$，$\varphi\in SG^{1,1}$ であり，ある $C_1,C_2>0$ に関して

$$C_1\langle y\rangle\le\langle\partial_\xi\varphi\rangle\le C_2\langle y\rangle,\quad C_1\langle\xi\rangle\le\langle\partial_y\varphi\rangle\le C_2\langle\xi\rangle,$$

を満たすものとする．[8] および [9] では，これらの仮定の下，$a\in SG^{0,0}$ に対して T は $L^2(\mathbb{R}^n)$-有界となることを主張している．深入りは避けるが，われわれの結果は phase function に対する仮定 $\phi\in SG^{1,1}$ をより弱い減衰度の条件に置き換え，amplitude function に対する仮定 $a\in SG^{0,0}$ を，(有限階の偏導関数の) 有界性に置き換えることが可能であると主張しているのである．

第 4 節では, Theorem 1.1 の応用例として，一般化シュレディンガー方程式

$$\begin{cases}(i\partial_t+Q(D))u(t,x)=0,\\ u(0,x)=f(x)\end{cases}\tag{1.3}$$

の平滑化作用の問題に焦点をしぼって簡単に触れる事にする．Ben-Artzi and Devinatz [2] は，$Q(D)$ の表象 $Q(\xi)$ が主要型実多項式の場合にこの問題を論じている．また，Walther [22] は $Q(\xi)$ が球対称の場合を考察している．しかし，われわれの結果 Theorem 1.1 を用いることにより，もっと一般の $Q(D)$ を取り扱うことが可能となる (Theorem 4.1 参照)．もっと高度な応用例も，論文 [17] において発表予定である．

2. 振動積分作用素

Fujiwara [11] における議論を整理することにより，次の振動積分作用素の L^2-有界性に関する結果を確認することができる．これは [19, p.377] の大域化に相当する．以下, C (添え字を伴うこともあるが) は常に正の定数であり，文脈ごとに異なる値をとるものとする．

Theorem 2.1. 作用素 I_φ を

$$I_\varphi u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\varphi(x,y)}a(x,y)u(y)\,dy\tag{2.1}$$

により定義する．ただし $a(x,y)\in C^\infty(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_y)$，かつ $\varphi(x,y)\in C^\infty(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_y)$ は実数値関数とする．また，$|\alpha|,|\beta|\le 2n+1$ に対し

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta a(x,y)\right|\le C_{\alpha\beta},$$

を満たすものとする．さらに

$$|\det\partial_x\partial_y\varphi(x,y)|\ge C>0,$$

かつ，行列 $\partial_x\partial_y\varphi(x,y)$ の各成分 $h(x,y)$ は，すべての $|\alpha|,|\beta|\le 2n+1$ に対して

$$|\partial_x^\alpha h(x,y)|\le C_\alpha,\qquad\left|\partial_y^\beta h(x,y)\right|\le C_\beta$$

を満たすものとする．このとき I_φ は $L^2(\mathbb{R}^n)$-有界であり，

$$\|I_\varphi\|_{L^2\to L^2} \le C \sup_{|\alpha|,|\beta|\le 2n+1} \left\|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta a(x,y)\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_y\right)}$$

が成立する．

Proof. 正値関数 $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を，$\{g_k(x)\}_{k\in\mathbf{Z}^n}$; $g_k(x)=g(x-k)$ が 1 の分割をなすようにとる．これを用いて，作用素 I_φ を

$$I_\varphi = \sum_{(j,k)\in\mathbf{Z}^n\times\mathbf{Z}^n} I_{(j,k)},$$

ただし $I_{(j,k)}=g_j I_\varphi g_k$，即ち

$$I_{(j,k)}u(x) = g_j(x)\int e^{i\varphi(x,z)}a(x,z)g_k(z)u(z)\,dz$$

と分割する．$I_{(j,k)}$ の adjoint を $I^*_{(j,k)}$ であらわす．すなわち，

$$I^*_{(j,k)}u(z) = g_k(z)\int e^{-i\varphi(y,z)}\overline{a(y,z)}g_j(y)u(y)\,dy.$$

このとき

$$I_{(j,k)}I^*_{(l,m)}u(x) = \int K_{(j,k),(l,m)}(x,y)u(y)\,dy,$$

が成立する．ただし

$$K_{(j,k),(l,m)}(x,y) = g_j(x)g_l(y)\int e^{i(\varphi(x,z)-\varphi(y,z))}a(x,z)\overline{a(y,z)}g_k(z)g_m(z)\,dz$$

である．部分積分により

$$\begin{aligned}&\int e^{i(\varphi(x,z)-\varphi(y,z))}a(x,z)\overline{a(y,z)}g_k(z)g_m(z)\,dz\\ &=\int e^{i(\varphi(x,z)-\varphi(y,z))}L^{2n+1}\Big(a(x,z)\overline{a(y,z)}g_k(z)g_m(z)\Big)\,dz\end{aligned}$$

となる．ただし L は

$${}^tL = \frac{1}{i}\frac{\partial_z\varphi(x,z)-\partial_z\varphi(y,z)}{|\partial_z\varphi(x,z)-\partial_z\varphi(y,z)|^2}\cdot\partial_z$$

の transpose である．仮定と，ある w に対して

$$\partial_z\phi(x,z)-\partial_z\phi(y,z) = \partial_x\partial_z\phi(w,z)(x-y)$$

が成立することにより，

$$|\partial_z\varphi(x,z)-\partial_z\varphi(y,z)| \ge C|x-y|$$

および

$$\left|\partial_z^\beta\varphi(x,z)-\partial_z^\beta\varphi(y,z)\right| \le C_\beta|x-y|$$

が $1\le|\beta|\le 2n+2$ に対して成立する．したがって，ある正値関数 $h\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($h(x)=\int g(z-x)g(z)\,dz$), および

$$A = \sup_{|\alpha|,|\beta|\le 2n+1}\left\|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta a\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_y\right)}$$

に関して

$$|K_{(j,k),(l,m)}(x,y)| \leq CA^2 \frac{g_j(x)g_l(y)}{1+|x-y|^{2n+1}} h(k-m)$$

が成立する．このとき

$$\sup_x \int |K_{(j,k),(l,m)}(x,y)|\,dy \leq CA^2 \frac{h(k-m)}{1+|j-l|^{2n+1}},$$
$$\sup_y \int |K_{(j,k),(l,m)}(x,y)|\,dx \leq CA^2 \frac{h(k-m)}{1+|j-l|^{2n+1}},$$

従って

$$\left\| I_{(j,k)} I^*_{(l,m)} \right\|_{L^2 \to L^2} \leq CA^2 \frac{h(k-m)}{1+|j-l|^{2n+1}}$$

が成立する．ここで，以下の補題を用いた（Stein [19, p.284] 参照）：

Lemma 2.1. S を

$$(Sf)(x) = \int s(x,y)f(y)\,dy$$

により定義する．ただし $s(x,y)$ は

$$\sup_x \int |s(x,y)|\,dy \leq 1, \qquad \sup_y \int |s(x,y)|\,dx \leq 1$$

を満たすものとする．このとき $\|S\|_{L^2 \to L^2} \leq 1$ である．

同様の議論により，

$$\left\| I^*_{(j,k)} I_{(l,m)} \right\|_{L^2 \to L^2} \leq CA^2 \frac{h(j-l)}{1+|k-m|^{2n+1}}$$

も得る．このとき

$$\left\| I_{(j,k)} I^*_{(l,m)} \right\|_{L^2 \to L^2}, \left\| I^*_{(j,k)} I_{(l,m)} \right\|_{L^2 \to L^2} \leq CA^2 \{\gamma(j-l, k-m)\}^2,$$

ただし

$$\gamma(j_1, j_2) = \sqrt{\left\{ \frac{h(j_2)}{1+|j_1|^{2n+1}} + \frac{h(j_1)}{1+|j_2|^{2n+1}} \right\}}$$

が成立する．さらに

$$\sum_{(j_1,j_2) \in \mathbf{Z}^n \times \mathbf{Z}^n} \gamma(j_1, j_2) < \infty$$

が成り立つことに注意する．よって，以下の Cotlar's lemma（Calderón - Vaillancourt [4], Stein [19, Chapter VII, Section 2] 参照）を用いることにより定理は証明される：

Lemma 2.2. L^2-有界な作用素の族 $\{T_j\}_{j \in \mathbf{Z}^r}$ および正定数の族 $\{\gamma(j)\}_{j \in \mathbf{Z}^r}$ が，

$$\|T_i^* T_j\|_{L^2 \to L^2} \leq \{\gamma(i-j)\}^2, \qquad \|T_i T_j^*\|_{L^2 \to L^2} \leq \{\gamma(i-j)\}^2,$$

および

$$M = \sum_{j \in \mathbf{Z}^r} \gamma(j) < \infty$$

を満たしているものとする．このとき

$$T = \sum_{j \in \mathbb{Z}^r} T_j$$

は

$$\|T\|_{L^2 \to L^2} \le M$$

を満たす.

□

3. フーリエ積分作用素

前節の振動積分作用素 (2.1) に関する結果を用いることにより，フーリエ積分作用素 (1.1) の L^2-有界性が示される．

まず始めに amplitude function $a(x, y, \xi)$ が y に依存しない場合を考察する．

Theorem 3.1. T を

$$Tu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x \cdot \xi + \varphi(y,\xi))} a(x, \xi) u(y) dy d\xi \tag{3.1}$$

により定義する．ただし $a(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$ かつ $\varphi(y,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi)$ とする．また

$$a(X, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi) u(y)\, dy d\xi$$

により定義される擬微分作用素 $a(X, D)$ および

$$I_\varphi u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\varphi(y,\xi)} u(y)\, dy$$

により定義される振動積分作用素 I_φ は，いずれも $L^2(\mathbb{R}^n)$-有界であるとする．このとき T は $L^2(\mathbb{R}^n)$-有界であり，

$$\|T\|_{L^2 \to L^2} \le (2\pi)^{n/2} \|a(X, D)\|_{L^2 \to L^2} \cdot \|I_\varphi\|_{L^2 \to L^2}$$

がなりたつ．

Proof. $T = (2\pi)^n a(X, D) F^{-1} I_\varphi$ に注意すればよい． □

この定理の系として次を得る．

Corollary 3.2. T を (3.1) で定義する．ただし $\varphi(y,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi)$ は実数値関数で

$$|\det \partial_y \partial_\xi \varphi(y,\xi)| \ge C > 0,$$

かつ行列 $\partial_y \partial_\xi \varphi(y,\xi)$ の各成分 $h(y,\xi)$ は，$|\alpha|, |\beta| \le 2n+1$ に対して

$$\left|\partial_y^\alpha h(y,\xi)\right| \le C_\alpha, \qquad \left|\partial_\xi^\beta h(y,\xi)\right| \le C_\beta$$

を満たすものとする．また，$a(x,\xi)$ は $S^0_{0,0}$ に属する（即ち，すべての α, β に対して $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$ が成立する）ものとする．あるいは，以下の条件のうち，どれか一つが成り立つものと仮定する：

(1) $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ *for* $\alpha, \beta \in \{0,1\}^n$.
(2) $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ *for* $|\alpha|, |\beta| \le [n/2]+1$.
(3) $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ *for* $|\alpha| \le [n/2]+1$, $\beta \in \{0,1\}^n$.
(4) $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ *for* $\alpha \in \{0,1\}^n$, $|\beta| \le [n/2]+1$.
(5) ある $\lambda, \lambda' > n/2$ が存在して $(1-\Delta_x)^{\lambda/2}(1-\Delta_\xi)^{\lambda'/2} a(x,\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$.
(6) ある $\lambda > 1/2$ と定数 C が存在して，$\alpha, \beta \in \{0,1\}^n$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $h' = (h_1', \ldots, h_n') \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$||\delta_x^\alpha(h)\delta_\xi^\beta(h')a(x,\xi)||_{L^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)} \le C \prod_{i,j=1}^{n} |h_i|^{\alpha_i \lambda} |h_j'|^{\beta_j \lambda}.$$

ここで，

$$\delta_x^\alpha(h) = \delta_{x_1}^{\alpha_1}(h_1) \cdots \delta_{x_n}^{\alpha_1}(h_n),$$
$$\delta_{x_i}^0(h_i)a(x,\xi) = a(x,\xi), \qquad \delta_{x_i}^1(h_i)a(x,\xi) = a(x+h_ie_i,\xi) - a(x,\xi)$$

ただし e_i は 第 i-番目の $\mathbb{R}^n$ の標準基底. δ_ξ^β の定義も同様.
(7) ある $2 \le p < \infty$ が存在して，$|\alpha|, |\beta| \le [n(1/2-1/p)]+1$ に対して，$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) \in L^p(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$

このとき T は $L^2(\mathbb{R}^n)$-有界である.

Corollary 3.2 の $\varphi(y,\xi) = -y \cdot \xi$ の場合は，非正則な表象を持つ擬微分作用素の L^2-有界性に関する代表的な結果の改良版である：(1) で $\alpha, \beta \in \{0,1,2,3\}^n$ としたものは Calderón and Vaillancourt [4] による. (2) と (5) は Cordes [7], (6) は Childs [5] による. (3) で $|\alpha| \le [n/2]+1$, $\beta \in \{0,1,2\}^n$, (7) で $\alpha \le [n(1/2-1/p)]+1$, $|\beta| \le 2n$ としたものは Coifman and Meyer [6] による.

Proof. Theorem 3.1 と Sugimoto [20] の結果を用いればよい. □

次に amplitude function $a(x,y,\xi)$ が x によらない場合を考えよう.

Theorem 3.3. T を

$$Tu(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x\cdot\xi+\varphi(y,\xi))} a(y,\xi)u(y)dyd\xi \tag{3.2}$$

により定義する. ただし $a(y,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$, かつ $\varphi(y,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ は実数値関数とする. また，$|\alpha|, |\beta| \le 2n+1$ に対して

$$\left|\partial_y^\alpha \partial_\xi^\beta a(y,\xi)\right| \le C_{\alpha\beta}$$

が成立するものとする. さらに

$$|\det \partial_y \partial_\xi \varphi(y,\xi)| \ge C > 0,$$

および行列 $\partial_y \partial_\xi \varphi(y,\xi)$ の各成分 $h(y,\xi)$ が，$|\alpha|, |\beta| \le 2n+1$ に対して

$$\left|\partial_y^\alpha h(y,\xi)\right| \le C_\alpha, \qquad \left|\partial_\xi^\beta h(y,\xi)\right| \le C_\beta$$

を満たすものとする．このとき T は $L^2(\mathbb{R}^n)$-有界であり，

$$\|T\|_{L^2\to L^2} \le C \sup_{|\alpha|,|\beta|\le 2n+1} \left\|\partial_y^\alpha \partial_\xi^\beta a(y,\xi)\right\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}_y^n\times\mathbb{R}_\xi^n\right)}$$

が成立する．

Proof. $T=(2\pi)^n F^{-1} I_\varphi$，ただし

$$I_\varphi u(\xi)=\int e^{i\varphi(y,\xi)} a(y,\xi)u(y)\,dy$$

となることに注意すれば，Theorem 2.1 と Plancherel's theorem により従う． □

最後に，amplitude function $a(x,y,\xi)$ が x にも y にも依存する一般の場合を考察しよう．Asada-Fujiwara [1] では，$a(x,y,\xi)$ および行列 $\partial_\xi\partial_\xi\varphi$ の各成分のすべての導関数の有界性を要請した．次の定理は，もし $a(x,y,\xi)$ にある種の減衰条件を課せば，$\partial_\xi\partial_\xi\varphi$ の有界性の仮定は不要であることを主張するものである．さらにこの場合には，重みつき空間での有界性も同時に述べることができる．次節で示すが，このことは応用上重要である．

Theorem 3.4. $m\in\mathbb{R}$ とする．T を

$$Tu(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x\cdot\xi+\varphi(y,\xi))} a(x,y,\xi)u(y)dyd\xi \tag{3.3}$$

により定義する．ただし $\varphi(y,\xi)\in C^\infty\left(\mathbb{R}_y^n\times\mathbb{R}_\xi^n\right)$ は実数値関数で

$$|\det\partial_y\partial_\xi\varphi(y,\xi)|\ge C>0, \qquad \langle y\rangle\le C\langle\partial_\xi\varphi(y,\xi)\rangle$$

を満たすものとする．また $a(x,y,\xi)\in C^\infty\left(\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_y^n\times\mathbb{R}_\xi^n\right)$ とする．さらに，以下のうちいずれかを仮定する:

(1) すべての α, β, γ に対し

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\xi^\gamma a(x,y,\xi)\right|\le C_{\alpha\beta\gamma}\langle x\rangle^{m-|\alpha|},$$

かつ，すべての $|\alpha|\ge 1$, $|\beta|\ge 1$ に対し，

$$\left|\partial_\xi^\beta\varphi(y,\xi)\right|\le C_\beta\langle y\rangle, \qquad \left|\partial_y^\alpha\partial_\xi^\beta\varphi(y,\xi)\right|\le C_{\alpha\beta}.$$

(2) すべての α, β, γ に対し

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\xi^\gamma a(x,y,\xi)\right|\le C_{\alpha\beta\gamma}\langle y\rangle^{m-|\beta|},$$

かつ，すべての α，$|\beta|\ge 1$ に対し，

$$\left|\partial_y^\alpha\partial_\xi^\beta\varphi(y,\xi)\right|\le C_{\alpha\beta}\langle y\rangle^{1-|\alpha|}.$$

このとき T は，すべての $m_1\in\mathbb{R}$ に対し $L^2_{m+m_1}(\mathbb{R}^n)$ から $L^2_{m_1}(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素

Proof. 次で定義される作用素

$$T_b u(x) = \int\int e^{i(x\cdot\xi+\varphi(y,\xi))} b(x,y,\xi)u(y)dyd\xi$$

の，L^2-有界性を示せばよい．ただし

$$b(x,y,\xi) = \langle x\rangle^{m_1} a(x,y,\xi)\langle y\rangle^{-(m+m_1)}.$$

$\chi(x) \in C_0^\infty(|x| \le 1/2)$ を原点の近傍で 1 となるものとして，b を以下の 2 つに分割する：

$$b^I(x,y,\xi) = b(x,y,\xi)\chi((x+\partial_\xi\varphi(y,\xi))/\langle\partial_\xi\varphi(y,\xi)\rangle),$$
$$b^{II}(x,y,\xi) = b(x,y,\xi)(1-\chi)((x+\partial_\xi\varphi(y,\xi))/\langle\partial_\xi\varphi(y,\xi)\rangle).$$

これに対応して，T_b もそれぞれ T^I と T^{II} とに分解する．

$b^I(x,y,\xi)$ の support 上では, $|x+\partial_\xi\varphi(y,\xi)| \le (1/2)\langle\partial_\xi\varphi(y,\xi)\rangle$, 従って

$$|x| \le |\partial_\xi\varphi(y,\xi)| + \frac{1}{2}\langle\partial_\xi\varphi(y,\xi)\rangle, \qquad |\partial_\xi\varphi(y,\xi)| \le |x| + \frac{1}{2}\langle\partial_\xi\varphi(y,\xi)\rangle$$

が成立する．最初の評価式と φ に対する仮定とから, $\langle x\rangle \le C\langle y\rangle$ を得る．2 番目の評価式からは, $\langle\partial_\xi\varphi(y,\xi)\rangle \le 2\langle x\rangle + (1/2)\langle\partial_\xi\varphi(y,\xi)\rangle$ を得るので，$\langle\partial_\xi\varphi(y,\xi)\rangle \le 4\langle x\rangle$ 従ってやはり φ に対する仮定から $\langle y\rangle \le C\langle x\rangle$ を得る．かくして $\langle y\rangle$ と $\langle x\rangle$ の同値性が示されたので, 仮定 (1) または (2) からそれぞれ

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\xi^\gamma b^I(x,y,\xi)\right| \le C_{\alpha\beta\gamma}\langle x\rangle^{-|\alpha|} \tag{3.4}$$

または

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\xi^\gamma b^I(x,y,\xi)\right| \le C_{\alpha\beta\gamma}\langle y\rangle^{-|\beta|} \tag{3.5}$$

を得る．

そこで，(3.4) を仮定する．さもなくば (3.5) を仮定して，以下において x と y を入れかえて同じ議論をすればよい．正値関数の族 $\Phi_0(x)$, $\Phi_k(x) = \Phi(x/2^k)$ $(k \in \mathbb{N})$ で，$\operatorname{supp}\Phi_0 \subset \{x; |x| < 2\}$, $\operatorname{supp}\Phi \subset \{x; 1/2 < |x| < 2\}$ を満たし，かつ 1 の分割をなすものを取る．これを用いて，b^I を $b_k^I(x,y,\xi) = \Phi_k(x)b^I(x,y,\xi)$ の和に分解する．b^I の support 上での $\langle x\rangle$ と $\langle y\rangle$ との同値性から，ある関数 $\tilde\Psi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ で，大きな k に対して $\tilde\Psi_k(y) = \tilde\Psi(y/2^k)$, $\tilde\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ となるものを用いて，

$$b_k^I(x,y,\xi) = \Phi_k(x)b^I(x,y,\xi)\tilde\Psi_k(y)$$

と書ける．さらに，

$$b_k^I(2^k x,y,\xi) = \Psi_k(2^k x)\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} e^{il\cdot x} b_{kl}(y,\xi)\tilde\Psi_k(y)$$

と展開する．ただし Ψ_k は Φ_k の support の定義関数で，

$$\begin{aligned} b_{kl}(y,\xi) &= \int e^{-il\cdot x} b_k^I(2^k x,y,\xi)\,dx \\ &= (1+|l|^2)^{-n}\int e^{-il\cdot x}(1-\triangle_x)^n\left\{\Phi_k(2^k x)b^I(2^k x,y,\xi)\right\}dx \end{aligned}$$

は，関数 $b_k^I(2^k x,y,\xi)$ の変数 x に関するフーリエ係数である．このとき, (3.4) より

$$\left|\partial_y^\alpha\partial_\xi^\beta b_{kl}(y,\xi)\right| \le C_{\alpha\beta}(1+|l|^2)^{-n}$$

を得る．ここで $C_{\alpha\beta}$ は $k,l\in\mathbb{Z}^n$ には依存しない．かくして，次の分解に到達する：

$$T^I=\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}e^{il\cdot x/2^k}\Psi_k T_{kl}\tilde{\Psi}_k,$$

ただし

$$T_{kl}v(x)=\int\int e^{i(x\cdot\xi+\varphi(y,\xi))}b_{kl}(y,\xi)v(y)dyd\xi.$$

ここで Theorem 3.3 より，

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}e^{il\cdot x/2^k}\Psi_k T_{kl}\tilde{\Psi}_k u\right\|_{L^2}^2 &\le C\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left\|\Psi_k T_{kl}\tilde{\Psi}_k u\right\|_{L^2}^2\\ &\le C\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\|T_{kl}\|_{L^2\to L^2}^2\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left\|\tilde{\Psi}_k u\right\|_{L^2}^2\\ &\le C\left(1+|l|^2\right)^{-2n}\|u\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

が成り立つことに注意する．これより

$$\begin{aligned}\left\|T^I\right\|_{L^2\to L^2} &\le C\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}\left(1+|l|^2\right)^{-n}\\ &\le C,\end{aligned}$$

すなわち T^I の L^2-有界性を得る．

次に，T^{II} の有界性を示そう．$\rho\in C_0^\infty$ を，実数値関数で

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\rho(\xi-k)=1$$

をみたすようにとる．これを用いて $b^{II}(x,y,\xi)$ を

$$b_k^{II}(x,y,\xi)=b^{II}(x,y,\xi)\rho(\xi-k)$$

の和に分解し，これに対応して

$$T_k u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(x\cdot\xi+\varphi(y,\xi))}b_k^{II}(x,y,\xi)u(y)dyd\xi$$

とおく．ここで，$b_k^{II}(x,y,\xi)$ を，これと同じ（あるいはより小さい）support をもち，

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\xi^\gamma b_k^{II}(x,y,\xi)\right|\le C_{\alpha\beta\gamma}\langle x\rangle^{-(n+1)}\langle y\rangle^{-(n+1)} \tag{3.6}$$

（ただし $C_{\alpha\beta\gamma}$ は $k\in\mathbb{Z}^n$ によらない）を満たすものに置き換えてもよいことを主張する．（これを同じ記号 $b_k^{II}(x,y,\xi)$ であらわす．）実際，部分積分により

$$T_k u(x)=\int\int e^{i(x\cdot\xi+\varphi(y,\xi))}L^m b_k^{II}(x,y,\xi)u(y)dyd\xi$$

を得る．ここで L は

$${}^tL=\frac{x+\partial_\xi\varphi}{i|x+\partial_\xi\varphi|^2}\cdot\partial_\xi$$

の transpose であり，m は自然数である．$b^{II}(x,y,\xi)$ の support 上では $\langle\partial_\xi\varphi(y,\xi)\rangle \le C|x+\partial_\xi\varphi(y,\xi)|$ となることに注意すれば，φ の仮定より

$$\langle x\rangle \le |x+\partial_\xi\varphi(y,\xi)| + 2\langle\partial_\xi\varphi(y,\xi)\rangle \le C|x+\partial_\xi\varphi(y,\xi)|,$$
$$\langle y\rangle \le C\langle\partial_\xi\varphi(y,\xi)\rangle \le C|x+\partial_\xi\varphi(y,\xi)|$$

を得る．したがって $|x+\partial_\xi\varphi|^{-1}$ は $\langle x\rangle^{-1}$ と $\langle y\rangle^{-1}$ とにおさえられるので, m を大きく取ることにより，この主張は正当化される．

さらに T_k^* を T_k の adjoint として，

$$T_kT_l^*v(x) = \int K_{kl}(x,y)v(y)\,dy, \qquad T_k^*T_lv(x) = \int \tilde{K}_{kl}(x,y)v(y)\,dy,$$

ただし

$$K_{kl}(x,y) = \int\int\int e^{i\{x\cdot\xi - y\cdot\eta + \varphi(z,\xi) - \varphi(z,\eta)\}} b_k^{II}(x,z,\xi)\overline{b_l^{II}(y,z,\eta)}\,dzd\xi d\eta,$$
$$\tilde{K}_{kl}(x,y) = \int\int\int e^{i\{\varphi(y,\xi) - \varphi(x,\eta) + z\cdot(\xi-\eta)\}} b_l^{II}(z,y,\xi)\overline{b_k^{II}(z,x,\eta)}\,dzd\xi d\eta$$

となる．部分積分により

$$\int e^{i(\varphi(z,\xi)-\varphi(z,\eta))} b_k^{II}(x,z,\xi)\overline{b_l^{II}(y,z,\eta)}\,dz$$
$$= \int e^{i(\varphi(z,\xi)-\varphi(z,\eta))} L^{2n+1}\Big(b_k^{II}(x,z,\xi)\overline{b_l^{II}(y,z,\eta)}\Big)\,dz$$

となることに注意する．ただし L は

$${}^tL = \frac{1}{i}\frac{\partial_z\varphi(z,\xi) - \partial_z\varphi(z,\eta)}{|\partial_z\varphi(z,\xi) - \partial_z\varphi(z,\eta)|^2}\cdot\partial_z$$

の transpose である．仮定より，すべての β に対して

$$|\partial_z\varphi(z,\xi) - \partial_z\varphi(z,\eta)| \ge C|\xi-\eta|$$

および

$$\left|\partial_z^\beta\varphi(z,\xi) - \partial_z^\beta\varphi(z,\eta)\right| \le C_\beta|\xi-\eta|$$

が成立するので，(3.6) より，

$$|K_{kl}(x,y)| \le C\langle x\rangle^{-(n+1)}\langle y\rangle^{-(n+1)}\big(1+|k-l|^{2n+1}\big)^{-1}$$

を得る．ここで C は $k,l\in\mathbb{Z}^n$ に依存しない．このとき，

$$\sup_x\int|K_{kl}(x,y)|\,dy \le C\big(1+|k-l|^{2n+1}\big)^{-1},$$
$$\sup_y\int|K_{kl}(x,y)|\,dx \le C\big(1+|k-l|^{2n+1}\big)^{-1}$$

が成立し，Lemma 2.1 より

$$\|T_kT_l^*\|_{L^2\to L^2} \le C\big(1+|k-l|^{2n+1}\big)^{-1}$$

が従う．同様に

$${}^tL = \frac{1}{i}\frac{\xi-\eta}{|\xi-\eta|^2}\cdot\partial_z$$

ととれば,

$$\|T_k^* T_l\|_{L^2\to L^2} \le C\big(1+|k-l|^{2n+1}\big)^{-1}$$

が得られる．このとき

$$\|T_k T_l^*\|_{L^2\to L^2},\ \|T_k^* T_l\|_{L^2\to L^2} \le C\{\gamma(k-l)\}^2$$

となる．ここで

$$\gamma(j) = \big(1+|j|^{2n+1}\big)^{-1/2}$$

であり,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \gamma(j) < \infty$$

が成り立つ．よって Lemma 2.2 により, T^{II} の L^2-有界性が示された． □

この定理の特別の場合として, 次が得られる:

Corollary 3.5. $m\in\mathbb{R}$ とする．T を

$$Tu(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x\cdot\xi - y\cdot\psi(\xi))} a(x,y,\xi)u(y)dyd\xi$$

により定義する．ここで，$a(x,y,\xi)\in C^\infty\big(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_y\times\mathbb{R}^n_\xi\big)$ である．また $\psi:\mathbb{R}^n\setminus 0\to\mathbb{R}^n\setminus 0$ は C^∞-*map* で，すべての $\lambda>0$ および $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus 0$ に対して．$\psi(\lambda\xi)=\lambda\psi(\xi)$ を満たすものとする．さらに ψ の *Jacobian* は消えないものとし，$a(x,y,\xi)$ は原点付近の ξ に対しては消えているものとする．さらに,

$$\big|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\xi^\gamma a(x,y,\xi)\big| \le C_{\alpha\beta\gamma}\langle x\rangle^{m-|\alpha|}\quad \textit{for all } \alpha,\ \beta,\ \textit{and } \gamma$$

または

$$\big|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\partial_\xi^\gamma a(x,y,\xi)\big| \le C_{\alpha\beta\gamma}\langle y\rangle^{m-|\beta|}\quad \textit{for all } \alpha,\ \beta,\ \textit{and } \gamma$$

を仮定する．このとき T はすべての $m_1\in\mathbb{R}$ に対して，$L^2_{m+m_1}(\mathbb{R}^n)$ から $L^2_{m_1}(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素となる.

4. 応用

以下，常に $n\ge 2$ を仮定する．$p(\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus 0)$ を正値かつ 1 次斉次な関数とし,

$$L_p = p(D_x)^2 = F_\xi^{-1}p(\xi)^2F_x$$

を，対応する Fourier multiplier とする．また，$\Sigma=\{\xi; p(\xi)=1\}$ の Gaussian curvature は消えないものと仮定する．これは，Gauss map

$$\frac{\nabla p}{|\nabla p|}:\Sigma\to S^{n-1}$$

が大域的に微分同相で，その Jacobian が消えないことと同値である．(Kobayashi-Nomizu [14] 参照)．それ故，Corollary 3.5 の仮定が

$$\psi(\xi) = p(\xi)\frac{\nabla p(\xi)}{|\nabla p(\xi)|},$$

に対して成立することがわかり，Theorem 1.1 が示される.

さて，Theorem 1.1 が，一般化シュレディンガー方程式

$$(4.1)\qquad \begin{cases} (i\partial_t + L_p)u(t,x) = 0, \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

の平滑化作用の問題にどのように応用されるのかについて説明しよう．主要な道具として，次のフーリエ積分作用素を用いる：

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} T_\psi u(x) &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x\cdot\xi - y\cdot\psi(\xi))}u(y)dyd\xi, \\ T_\psi^{-1}u(x) &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x\cdot\xi - y\cdot\psi^{-1}(\xi))}u(y)dyd\xi. \end{aligned}$$

ここで $\psi, \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus 0 \to \mathbb{R}^n \setminus 0$ は C^∞-maps で $\psi\circ\psi^{-1} = \psi^{-1}\circ\psi = id$ をみたすものとする．この時，

$$(4.3)\qquad T_\psi u(x) = F_\xi^{-1}[(F_x u)(\psi(\xi))](x), \qquad T_\psi^{-1}u(x) = F_\xi^{-1}\left[(F_x u)(\psi^{-1}(\xi))\right](x)$$

が成り立つことに注意しておく．これより $T_\psi^{-1}\circ T_\psi u = T_\psi \circ T_\psi^{-1}u = u$ が成り立つ．さらに，関係式

$$(4.4)\qquad T_\psi \circ a(D)\circ T_\psi^{-1} = (a\circ\psi)(D)$$

も成立する．ただし $a(D) = F_\xi^{-1}a(\xi)F_x$ である．特に

$$(4.5)\qquad \psi(\xi) = p(\xi)\frac{\nabla p(\xi)}{|\nabla p(\xi)|}$$

と取れば，(4.4) より

$$(4.6)\qquad T_\psi\circ(-\Delta_x)\circ T_\psi^{-1} = L_p$$

が成立する．ここで，Σ の Gauss map が大域的微分同相であることより，$\psi(\xi)$ の inverse C^∞-map $\psi^{-1}(\xi)$ が構成できることに注意しておく．(4.3) と Plancherel's theorem により，T_ψ と T_ψ^{-1} は L^2-有界である．

(4.2) と (4.5) によって定義される T_ψ^{-1} を方程式 (4.1) に作用し, $v = T_\psi^{-1}u$ および $g = T_\psi^{-1}f$ とおくことにより，(4.1) は方程式

$$(4.7)\qquad \begin{cases} (i\partial_t - \Delta_x)v(t,x) = 0, \\ v(0,x) = g(x), \end{cases}$$

へと変換される．ここで (4.6) を用いた．通常のシュレディンガー方程式 (4.7) が，平滑化作用

$$(4.8)\qquad \|\sigma(X,D)v\|_{L^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x^n)} \le C\|g\|_{L^2(\mathbb{R}_x^n)}$$

を持つことは既に知られている．ただし

$$\sigma(X,D) = \langle x\rangle^{-1}\langle D\rangle^{1/2}$$

である．(Ben-Artzi and Klainerman [3], Simon [18], Kato and Yajima [13], Walther [21] 参照）．この事実より，一般化シュレディンガー方程式 (4.1) に対する同様の評価式を導き出すことができる．実際，原点の cut-off function χ に対して

$$\tilde{T}_\varphi = (1-\chi)(D)T_\varphi$$

とおけば，これは (3.3) において $\varphi(y,\xi)=-y\cdot\psi(\xi)$，$a(x,y,\xi)=(1-\chi)(\xi)$ とした場合のフーリエ積分作用素となる．このとき，

$$\langle D\rangle^{1/2}(1-\chi)(D)u=M\bigl(1+p(D)^2\bigr)^{1/4}\tilde{T}_\varphi v=M\tilde{T}_\varphi\langle D\rangle^{1/2}v$$

が成立する．ただし

$$M=\langle D\rangle^{1/2}\bigl(1+p(D)^2\bigr)^{-1/4}$$

である．ここで，関係式 (4.4) を $a(\xi)=(1+|\xi|^2)^{1/4}$ に関して用い，また Fourier multipliers は互いに可換であることに注意した．従って

$$\sigma(X,D)(1-\chi)(D)u=\langle x\rangle^{-1}M\tilde{T}\langle x\rangle\sigma(X,D)v$$

を得る．Theorem 1.1 により M と $\tilde{T}_\psi$ は $L^2_{-1}(\mathbb{R}^n_x)$-有界であるから，(4.8) および

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}=\bigl\|T_\psi^{-1}f\bigr\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}\le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}$$

とから

$$\|\sigma(X,D)(1-\chi)(D)u\|_{L^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x)}\le C\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}$$

を得る．一方，すべての α に対して

$$\|D^\alpha\chi(D)u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x)}\le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}$$

が成立する．実際 $u(t,x)=F_\xi^{-1}\exp\bigl(itp(\xi)^2\bigr)F_xf$ であるので，Schwartz's inequality と Plancherel's theorem により

$$|D^\alpha\chi(D)u(t,x)|\le C\bigl\|\exp\bigl(itp(\xi)^2\bigr)\xi^\alpha\chi(\xi)(F_xf)(\xi)\bigr\|_{L^1(\mathbb{R}^n_\xi)}\le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}$$

が成立する．

かくして，以下の結果に到達した（これは Ben-Artzi and Devinatz [2] が，ある種の多項式 $p(\xi)^2$ に対して示した結果の一般化になっている）：

Theorem 4.1. $\chi(\xi)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は，原点の近傍で 1 であるものとする．このとき，方程式 (4.1) の解 $u(t,x)$ は，すべての α に対して

$$\|D^\alpha\chi(D)u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x)}\le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)},$$
$$\bigl\|\langle x\rangle^{-1}\langle D\rangle^{1/2}(1-\chi)(D)u\bigr\|_{L^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x)}\le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}$$

を満たす．

最後に未解決な問題について触れておく．上述の議論においては，truncated operator $\tilde{T}_\psi$ の L^2_{-1}-有界性を用いた．しかしながら ψ が原点で特異性をもつため，T_ψ そのものが L^2_{-1}-有界であるかについては不明である．もしこれが正しければ，方程式 (4.1) に対する評価式

$$\bigl\|\langle x\rangle^{-1}\langle D\rangle^{1/2}u\bigr\|_{L^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x)}\le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}$$

が成立することになる．

REFERENCES

[1] K. Asada and D. Fujiwara, *On some oscillatory integral transformations in $L^2(\mathbb{R}^n)$*, Japan. J. Math. (N.S.) **4** (1978), 299–361.

[2] M. Ben-Artzi and A. Devinatz, *Local smoothing and convergence properties of Schrödinger type equations*, J. Funct. Anal. **101** (1991), 231–254.

[3] M. Ben-Artzi and S. Klainerman, *Decay and regularity for the Schrödinger equation*, J. Analyse Math. **58** (1992), 25–37.

[4] A. P. Calderón and R. Vaillancourt, *On the boundedness of pseudo-differential operators*, J. Math. Soc. Japan **23** (1971), 374–378.

[5] A. G. Childs, *On the L^2-boundedness of pseudo-differential operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **61** (1976), 252–254.

[6] R. R. Coifman and Y. Meyer, *Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque **57** (1978).

[7] H. O. Cordes, *On compactness of commutators of multiplications and convolutions, and boundedness of pseudodifferential operators*, J. Funct. Anal. **18** (1975), 115–131.

[8] H. O. Cordes, *The technique of pseudodifferential operators*, Cambridge Univ. Press, 1995.

[9] S. Coriasco and L. Rodino, *Cauchy problem for SG-hyperbolic equations with constant multiplicities*, Ricerche Mat. 48 (1999), suppl., 25–43.

[10] G. I. Eskin, *Degenerate elliptic pseudo-differential operators of principal type*, Math. USSR Sbornik, **11** (1970), 539–585.

[11] D. Fujiwara, *On the boundedness of integral transformations with highly oscillatory kernels*, Proc. Japan Acad. **51** (1975), 96–99.

[12] L. Hörmander, *Fourier integral operators. I*, Acta Math.**127** (1971), 79–183.

[13] T. Kato and K. Yajima, *Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect*, Rev. Math. Phys. **1** (1989), 481–496.

[14] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry. Vol. II*, Interscience, New York 1969

[15] H. Kumano-go, *A calculus of Fourier integral operators on $\mathbb{R}^n$ and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type*, Comm. Partial Differential Equations **1** (1976), 1–44.

[16] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *Global L^2 estimates for a class of Fourier integral operators with symbols in Besov spaces*, to appear in Russian Math. Surveys.

[17] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *A smoothing property of Schrödinger equations*, (preprint).

[18] B. Simon, *Best constants in some operator smoothness estimates*, J. Funct. Anal. **107** (1992), 66–71.

[19] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton University Press, Princeton, 1993.

[20] M. Sugimoto, *L^2-boundedness of pseudo-differential operators satisfying Besov estimates I*, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), 105–122.

[21] B. G. Walther, *A sharp weighted L^2-estimate for the solution to the time-dependent Schrödinger equation*, Ark. Mat. **37** (1999), 381–393.

[22] B. G. Walther, *Regularity, decay, and best constants for dispersive equations*, J. Funct. Anal. **189** (2002), 325–335.