数理解析研究所講究録 1336 巻 2003 年 44-51

Analyticity of Solutions to Schrödinger Equations with Some Derivative Nonlinear Terms

東京理科大学理学部数理情報科学科　内田　英建（Hidetake UCHIDA）
Department of Mathematical Information Science
Tokyo University of Science

1 Introduction

本講究録は，[9] で扱われた非線形 Schrödinger 方程式の解の解析性 ($s=1$) の結果に対する一般の Gevrey 族 ($s\geq 1$) への拡張である.

次のような非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$\text{(NLS)} \qquad \begin{cases} i\partial_t u+\Delta u=\mathcal{N}(u,\nabla u,\bar{u},\nabla\bar{u}), & (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \quad N\geq 3, \\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}^N. \end{cases}$$

ここで，非線形項は

$$\mathcal{N}(u,v,\bar{u},\bar{v})=\sum_{\substack{2\leq|\alpha|+|\beta|\leq l,\\ r\leq|\beta|\leq l}}\lambda_{\alpha\beta}u^{\alpha_1}\bar{u}^{\alpha_2}v^{\beta_1}\bar{v}^{\beta_2},$$

とし，$\lambda_{\alpha\beta}$，$l\geq 2$ とする．また，$N=3,4$ のときは $r\geq 1$，$N\geq 5$ のときは $r\geq 0$ とする.

Hayashi-Kato [3] と Kato-Taniguchi [7] は導関数を含まない非線形項を持った Schrödinger 方程式の解の解析性を示した．Hayashi-Kato は初期データが $x\cdot\nabla$ と ∇ に関して Gevrey 族にあるとき，解が $s(\geq 1)$ の Gevrey 族であることを示した ($s=1$ のとき解析的)．また，Kato-Taniguchi は非線形項が t，x，u に関して Gevrey 族で，初期データが $x\cdot\nabla$ に関して Gevrey 族であるとき，解が $s(\geq 1)$ の Gevrey 族であることを示した.

一方，Hayashi-Naumkin-Pipolo [5] は導関数を含む非線形 Schrödinger 方程式の解の解析性を示した．ただし，彼らが扱った非線形項は，gauge 不変性，すなわち，

$$(1) \qquad \mathcal{N}\left(e^{i\theta}u,e^{i\theta}v,\overline{e^{i\theta}u},\overline{e^{i\theta}v}\right)=e^{i\theta}\mathcal{N}(u,v,\overline{u},\overline{v}) \qquad \text{for any } \theta\in\mathbb{R} \text{ and } u,v\in\mathbb{C},$$

を満足するような 3 次の多項式である．Hayashi-Naumkin-Pipolo は，初期データが $\mathbf{H}^{3,0}$ で十分小さく，さらに無限遠方で指数的に減衰しているときに，解が解析的であることを示した．また，Chihara は，Hayashi-Naumkin-Pipolo と同様に，(1) を満足するような 3 次の多項式を非線形項に持つ Schödinger 方程式に対して，Hayashi-Naumkin-Pipolo の結

果と比べて初期データの Sobolev 空間の微分の階数が高いが，データが小さくなくても解が解析的であることを [1] で発表している．

さらに，楕円型-双曲型の Davey-Stewartson 方程式から導かれる非局所的な非線形項を持つ Schrödinger 方程式に関して，Hayashi-Naumkin-Uchida [6] が [5] と同様な方法を用いて解の解析性を示している．

また，Taniguchi [8] は，[7] と同様な条件の下で，非線形項に導関数を含む Schrödinger 方程式に対しても，解が s(≥ 1) の Gevrey 族であることを示した．

本研究では，より一般的な非線形項を持った Schrödinger 方程式の解が Gevrey 族であることを述べる．

ここで関数空間と記号の定義をする．Sobolev 空間を

$$\mathbf{H}^{m,p} = \{\phi \in \mathbf{L}^p; \|(1-\Delta)^{m/2}\phi\|_p < \infty,\ m \in \mathbb{R}^+\},$$

と定義する．簡単のために，ノルムについて $\|\cdot\|_2$ と $\|\cdot\|_{m,2}$ をそれぞれ $\|\cdot\|, \|\cdot\|_m$ と表す．$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_N^{\alpha_N}$ として，$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ とする．

ここで，解析性の証明で重要な役割をはたす作用素 P を定義する．$P = x\cdot\nabla + 2t\partial_t$ とする．この作用素 P は (NLS) に作用させると，

$$\mathcal{L}P^\nu u = (P+2)^\nu \mathcal{N}(u, \nabla u, \overline{u}, \nabla\overline{u}), \tag{2}$$

という性質を持つ．ただし，$\mathcal{L} = i\partial_t + \Delta$ とする．さらに，

$$(P+1)^\nu \partial_k v = \partial_k P^\nu v, \tag{3}$$

となる．これらを利用することが，本研究のポイントの 1 つである．

次に，今回得られた結果を述べる．

定理 1.1 (大域存在性). 初期データ u_0 は

$$\|u_0\|^2_{\mathbf{Z}_{m,A}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^{2\nu}}{(\nu-1)!^{2s}} \sum_{|a|+b\leq 2} \|\Omega^a (x\cdot\nabla)^{b+\nu}\phi\|^2_{(m-2|a|-2b)} \leq \varepsilon^2$$

を満足し，ε は十分小さいものとする．ただし，$(\nu-1)!$ は $\nu \geq 2$ のときは $(\nu-1)!$，$\nu < 2$ のときは 1 とし，作用素 Ω は $\Omega = (\Omega_{j,k})_{(1\leq k\leq N)}$，$\Omega_{j,k} = x_j\partial_k - x_k\partial_j$ とする．また，m は $m \geq [N/2] + 6$ を満たすものとし，a は multi-index とする．このとき，方程式 (NLS) の解 $u \in C(\mathbb{R}; \mathbf{H}^m)$ は唯一つ存在し，この解 u は，

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^{2\nu}}{(\nu-1)!^{2s}} \|P^\nu u\|^2_{m,0} \leq C\varepsilon^2. \tag{4}$$

を満足する．

定理 1.2 (解析性). u は，定理 1.1 で存在が示された (NLS) の解とする．このとき $t \neq 0$ に対して，不等式

$$\|a(x)^{|\mu|+2\kappa_1}\partial_t^{\kappa_1}\partial^{\mu}u\|_{\mathbf{H}^m} \leq C_{17}|t|^{-\kappa_1}\max\{1,|t|^{-|\mu|-\kappa_1}\}A_3^{|\mu|}A_8^{|\mu|+\kappa_1}A_9^{\kappa_1}(|\mu|+\kappa_1)!^s,$$

を満たす定数 C_{17}, A_3, A_8, A_9 が存在する．ここで，$\kappa_1 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $a(x) = \langle x\rangle^{-N} = 1/(1+|x|^2)^{N/2}$, $\delta > 0$ とする．また，μ は multi-index とする．

2 定理 1.1 の証明の概略

この節では，(NLS) の解の存在を考える．t は $t \in [0,\infty)$ の場合のみで考える．$t \in (-\infty, 0]$ も同様に証明できる．定理 1.1 の証明は，縮小写像の原理を用いる (Hayashi - Miao-Naumkin [4] を参照)．そのために解のエネルギー評価が必要となる．まず，次のような線形化方程式を考える．

$$\text{(LE)}\quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \mathcal{N}(v, \partial_1 v, \ldots, \partial_N v, \overline{v}, \partial_1\overline{v}, \ldots, \partial_N\overline{v}), & (t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

ここで，$\varepsilon = \|u_0\|_{\mathbf{Z}_{m,A}}$ とする．この方程式の表す写像 $u = \Phi(v)$ が次のような閉集合からそれ自身に移すことを示す．

$$\mathbf{Y}_{m,A,\rho} = \left\{\phi \in C([0,\infty);\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^N)); \|\phi\|_{\mathbf{Y}_{m,A}} < \rho\right\},$$

とする．ただし，$m \geq [N/2]+6$, $A > 0$, $\rho = C\varepsilon$ とし，

$$\|\phi\|^2_{\mathbf{Y}_{m,A}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{A^{2\nu}}{(\nu-1)!^{2s}}\|P^{\nu}\phi\|^2_{\mathbf{X}_m},$$

$$\begin{aligned}\|\phi\|^2_{\mathbf{X}_m} = &\sup_{t\in[0,\infty)}\left\|\Gamma^2\phi\right\|^2_{m-4} + \sup_{t\in[0,\infty)}\|\Gamma\Theta\phi\|^2_{m-4} \\ &+ \sup_{t\in[0,\infty)}\|\Theta\phi\|^2_{m-2} + \sup_{t\in[0,\infty)}\langle t\rangle^{-1}\left\|Q^2\phi\right\|^2_{m-4} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\int_0^{\infty}\left\|\omega_k\mathcal{S}\sqrt{|\partial_k|}\Gamma^2\partial_j^{m-4}\phi(\tau)\right\|^2\frac{d\tau}{\langle\tau\rangle^{1/2+2\sigma}}.\end{aligned}$$

とする．ここで，$\Gamma = (P,\Omega,\Delta,1)$, $\Theta = (Q,\Omega,\Delta,1)$, $Q = x\cdot\nabla + 2it\Delta$, $\omega_j = \varepsilon\langle x_j\langle t\rangle^{-\mu}\rangle^{-\mu}$ とする．

いま，$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\Gamma^2\phi\right\|^2_{m-4}$ の評価を考える．この際，線形化方程式 (LE) にエネルギー法を適用するとき

$$\text{(5)}\quad \begin{aligned}&\sum_{\nu=0}^{\infty}\sup_{t\in[0,\infty)}\left\|\Gamma^2\partial_l^{m-4}\frac{A^{\nu}P^{\nu}}{(\nu-1)!^s}u(t)\right\|^2_{m-2,0} \\ &\leq C\varepsilon^2 + C\varepsilon^2\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\left\|\Gamma^2\partial_l^{m-4}\partial_k\frac{A^{\nu}P^{\nu}}{(\nu-1)!^s}u(t)\right\|^2_{m-2,0}dt,\end{aligned}$$

となる．ところが，$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\|\Gamma^2\partial_l^{m-4}\partial_k\frac{A^\nu P^\nu}{(\nu-1)!^s}u(t)\right\|^2$ の評価が得られていない．(NLS) のような非線形項を持つ方程式は，エネルギー法を適用すると，いわゆる derivative-loss が起きるので，通常の意味でのエネルギー法をそのまま用いることはできない．そこで，これを克服するために Hayashi-Miao-Naumkin [4] が行ったように方程式の持つ解の平滑効果を用いる (Chihara [1] と Doi [2] も参照のこと)．

次のような線形 Schrödinger 方程式の初期値問題

$$
\begin{cases} \mathcal{L}u = f, & (t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{6}
$$

に対する解の平滑効果を考える．$f = f(t,x)$ は与えられた関数とする．ここで，証明に重要な役割を果たす作用素 $\mathcal{S}(\varphi)$ を次のように定義する．

$$
\mathcal{S}(\varphi) = \prod_{j=1}^{n}\mathcal{S}_j(\varphi_j). \tag{7}
$$

ただし，$\mathcal{H}_j$ を j 成分の Hilbert 変換とするとき，$\mathcal{S}_j(\varphi_j) = \cosh(\varphi_j)+\sinh(\varphi_j)\mathcal{H}_j$ として，関数 $\varphi(t,x) = (\varphi(t,x_1),\dots,\varphi(t,x_N))$ を

$$
\varphi_j(t,x_j) = \varepsilon^2\langle t\rangle^{-\sigma}\int_{-\infty}^{x_j\langle t\rangle^{-\mu}}\langle y\rangle^{-2\mu}dy, \tag{8}
$$

とする．ただし，$\mu = 1/2+\sigma$，$\sigma\in(0,1/8)$ とする．

このとき，次の 2 つの補題が成立する．証明は Hayashi-Miao-Naumkin [4]，Uchida [9] を参照されたい．(6) に対して，次の補題が成り立つ．

補題 2.1. 初期値問題 (6) の解 u は不等式

$$
\begin{aligned}
&\|u(\tau)\|^2 + \sum_{j=1}^{n}\int_0^t \|\omega_j\mathcal{S}|\partial_j|^{1/2}u(\tau)\|^2\frac{d\tau}{\langle\tau\rangle^{1/2+2\sigma}} \\
&\le \|u_0\|^2 + C\int_0^t|\mathrm{Im}(\mathcal{S}u,\mathcal{S}f)|d\tau + C\varepsilon^2\int_0^t\|u(\tau)\|^2\frac{d\tau}{\langle\tau\rangle^{1+\sigma}}
\end{aligned}
$$

を満たす．

次に非線形項の評価を考える．簡単のために $|\alpha|+|\beta| = 2$ のときを考える．このとき，次の補題が成り立つ．

補題 2.2. 次の不等式が成立する.

$$
\begin{aligned}
&|\mathrm{Im}(\mathcal{S}w\partial_j v, \mathcal{S}u)| \\
\leq& C\varepsilon(\langle t\rangle^{-1/4}\|u\| + \|\omega_j\mathcal{S}|\partial_j|^{1/2}u\|) \\
&\times\left(\left\|\frac{w}{\omega_j^2}\right\|_\infty \|\omega_j\mathcal{S}|\partial_j|^{1/2}v\| + C\left(\left\|\frac{\partial_j w}{\omega_j}\right\|_\infty + \langle t\rangle^{-1/2}\left\|\frac{w}{\omega_j}\right\|_\infty\right)^{1/2-\theta}\right. \\
&\left.\times\left(\left\|\frac{\partial_j w}{\omega_j}\right\|_\infty + (1+\langle t\rangle^{-1/2})\left\|\frac{w}{\omega_j}\right\|_\infty\right)^{1/2+\theta}\|v\| + C\langle t\rangle^{-1/4}\left\|\frac{w}{\omega_j}\right\|_\infty\|v\|\right) \\
&+ C(\|w_{x_j}\|_\infty + \langle t\rangle^{-1/2}\|w\|_\infty)\|u\|\|v\|.
\end{aligned}
$$

方程式 (LE) に上の補題を使うとき，次のような評価を得る.

(9)
$$
\begin{aligned}
&\sum_{\nu=0}^{\infty}\sup_{t\in[0,\infty)}\left\|\Gamma^2\partial_l^{m-4}\frac{A^\nu P^\nu}{(\nu-1)!^s}u(t)\right\|^2 \\
&+\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}\int_0^\infty\left\|\omega_k\mathcal{S}|\partial_k|^{1/2}\Gamma^2\partial_l^{m-4}\frac{A^\nu P^\nu}{(\nu-1)!^s}u(\tau)\right\|^2\frac{d\tau}{\langle\tau\rangle^{1/2+2\sigma}} \\
\leq& C\varepsilon^2 + C\varepsilon^2\sum_{\nu=0}^{\infty}\sup_{t\in[0,\infty)}\left\|\Gamma^2\partial_l^{m-4}\frac{A^\nu P^\nu}{(\nu-1)!^s}u(t)\right\|^2\int_0^\infty\frac{d\tau}{\langle\tau\rangle^{1+\sigma}} \\
&+ C\varepsilon^2\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_0^\infty\sum_{k=1}^{N}\left\|\omega_k\mathcal{S}|\partial_k|^{1/2}\Gamma^2\partial_l^{m-4}\frac{A^\nu P^\nu}{(\nu-1)!^s}u(\tau)\right\|^2\frac{d\tau}{\langle\tau\rangle^{1/2+2\sigma}} + C\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

ここで，十分小さな定数 ε を $1-C\varepsilon^2>0$, となるようにとると，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\nu=0}^{\infty}\sup_{t\in[0,\infty)}\left\|\Gamma^2\partial_l^{m-4}\frac{A^\nu P^\nu}{(\nu-1)!^s}u(t)\right\|^2 \\
\leq& C\varepsilon^2 + C\varepsilon^2\sum_{\nu=0}^{\infty}\sup_{t\in[0,\infty)}\left\|\Gamma^2\partial_l^{m-4}\frac{A^\nu P^\nu}{(\nu-1)!^s}u(\tau)\right\|^2.
\end{aligned}
$$

を得る．よって，

(10)
$$
\sum_{\nu=0}^{\infty}\sup_{t\in[0,\infty)}\left\|\Gamma^2\partial_l^{m-4}\frac{A^\nu P^\nu}{(\nu-1)!^s}u(t)\right\|^2 \leq C\varepsilon^2.
$$

となり，得たい評価が得られる．他の評価も同様にして得られる．ゆえに，Φ は閉集合 $\mathbf{Y}_{m,A,\rho}$ から $\mathbf{Y}_{m,A,\rho}$ 自身に移す写像であることが示された．同様に行うとき，縮小写像であることも示され，(NLS) の解の存在が証明される．

3 解の解析性

この節は，定理 1.2 の (NLS) の解の解析性の証明の概略にあてられる．証明の方法として，Kato-Taniguchi [7]，Taniguchi [8] も参照されたい．証明は 5 段階に分けられる．

定理 1.1 の結果より，次の補題が得られる．

補題 3.1. u は，定理 1.1 で存在が示された (NLS) の解とする．このとき，$t \neq 0$ に対して，不等式

$$\|a(x)^{|\mu|}\partial^\mu P^\nu u\|_m \leq C_2 \max\{1, |t|^{-|\mu|}\} A_2^{|\mu|+\nu} A_3^{|\mu|}(|\mu|+\nu)!^s, \tag{11}$$

を満たすような定数 C_2，A_2，A_3 が存在する．ただし，$\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし，μ は multi-index とする．関数 $a(x)$ は，$a(x) = \langle x \rangle^{-N} = (1+|x|^2)^{-N/2}$ とする．

作用素 P の性質 (2) より，方程式から

$$t\Delta P^\nu u = -iP^{\nu+1}u + i(x\cdot\nabla)P^\nu + 2t(P+2)^\nu \mathcal{N}(u, \nabla u, \overline{u}, \nabla\overline{u})$$

を得るのでこれを用いる．このとき，右辺第二項を評価するときに $(x\cdot\nabla)$ が評価ができないので，関数 $a(x)$ の助けを借りる．さらに，例えば $|\alpha|+|\beta| = 2$ となるような非線形項を例にして考えるとき，

$$(P+2)^\nu(vw) = \sum_{\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3} \frac{\nu!}{\nu_1!\nu_2!\nu_3!} P^{\nu_1} v (P+1)^{\nu_2} w,$$

などと (3) を用いて非線形項を整理する．これらにより，補題 3.1 は定理 1.1 の不等式 (4) から数学的帰納法によって証明される．

補題 3.2. u は補題 3.1 を満たすとする．このとき，$t \neq 0$ に対して，

$$\|a(x)^{|\mu|+2\sigma}\partial^\mu (x\cdot\nabla)^\sigma P^\nu u\|_m \leq C_{14} \max\{1, |t|^{-|\mu|-\sigma}\} A_3^{|\mu|} A_4^{|\mu|+\nu+\sigma} A_5^\sigma (|\mu|+\nu+\sigma)!^s, \tag{12}$$

となるような定数 C_{14}，A_3，A_4，A_5 が存在する．ただし，$\nu, \sigma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし，μ は multi-index とする．

証明は数学的帰納法による．不等式 (12) の左辺で，$\sigma+1$ の場合を考えるとき，

$$[\partial^\mu, (x\cdot\nabla)] = |\mu| \sum_{j=1}^N \partial_j \partial^\beta, \qquad \text{for any multi-index } \beta \text{ with } \mu = \beta + \theta \text{ and } |\theta| = 1,$$

を用いると，補題 3.1 により，不等式の右辺のように上から評価することができ，補題 3.2 は示される．

補題 3.3. u は補題3.2を満たすとする．このとき，$t \neq 0$ に対して，

$$\|a(x)^{|\mu|+2\sigma+2\kappa}(t\partial_t)^\kappa \partial^\mu (x\cdot\nabla)^\sigma u\|_m \leq C_{15}\max\{1,|t|^{-|\mu|-\sigma-\kappa}\} \times A_3^{|\mu|}A_5^\sigma A_6^{|\mu|+\sigma+\kappa}A_7^\kappa(|\mu|+\sigma+\kappa)!^s, \tag{13}$$

となるような定数 C_{15}，A_3，A_5，A_6，A_7 が存在する．ただし，$\sigma,\kappa\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ とし，μ は multi-index とする．

この補題は，作用素 P の定義より，

$$(t\partial_t)^l = \frac{1}{2^l}\sum_{l_1+l_2=l}\frac{l}{l_1!l_2!}(x\cdot\nabla)^{l_1}P^{l_2}$$

となる．これを不等式(13)の左辺に用いると，補題3.2により不等式の右辺のように上から評価することができる．これにより，補題3.3は成立する．

補題 3.4. u は補題3.3を満たすとする．このとき，$t \neq 0$ に対して，

$$\|a(x)^{|\mu|+2(\kappa_1+\kappa_2)}\partial_t^{\kappa_1}(t\partial_t)^{\kappa_2}\partial^\mu u\|_m \leq \frac{C_{16}}{|t|^{\kappa_1}}\max\{1,|t|^{-|\mu|-\kappa_1-\kappa_2}\} \times A_3^{|\mu|}A_7^{\kappa_2}A_8^{|\mu|+\kappa_1+\kappa_2}A_9^{\kappa_1}(|\mu|+\kappa_1+\kappa_2)!^s, \tag{14}$$

となるような定数 C_{16}，A_3，A_7，A_8，A_9 が存在する．ただし，$\kappa_1\kappa_2\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ とし，μ は multi-index とする．

$\kappa_1 = j$ のとき，(14)の不等式が成り立つと仮定する．このとき，$\kappa_1 = j+1$ のときを

$$\begin{aligned} t^{j+1}\partial_t^{j+1}(t\partial_t)^l &= t^j[t,\partial_t^j]\partial_t(t\partial_t)^l + t^j\partial_t^j(t\partial_t)^{l+1} \\ &= -jt^j\partial_t^j(t\partial_t)^l + t^j\partial_j(t\partial_t)^{l+1} \qquad \text{for } j<l,\ j,l\in\mathbb{N}, \end{aligned}$$

を用いると，補題3.3により上から評価することができる．これにより，数学的帰納法が成立することにより，補題3.4は示される．

補題 3.5. u は補題3.4を満たすとする．このとき，$t \neq 0$ に対して，

$$\|a(x)^{|\mu|+2\kappa_1}\partial_t^{\kappa_1}\partial^{|\mu|}u\|_{m,0} \leq \frac{C_{17}}{|t|^{\kappa_1}}\max\{1,|t|^{-|\mu|-\kappa_1}\}A_3^{|\mu|}A_8^{\kappa_1+|\mu|}A_9^{\kappa_1}(|\mu|+\kappa_1)!^s, \tag{15}$$

となるような C_{17}，A_3，A_8，A_9 が存在する．ただし，$\kappa_1\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ とし，μ は multi-index とする．

補題3.4で $\kappa_2 = 0$ とすれば成り立つ．これは，定理1.2の結果である．

参考文献

[1] H. Chihara, *Gain of analyticity for semilinear Schrödinger equations*, Proceedings of Sapporo Guest House Minisymposium on Nonlinear Wave Equations, (1999), 28–29.

[2] S. Doi, *On the Cauchy problem for Schrödinger type equations and regularity of solutions*, J. Math. Kyoto Univ., **79** (1994), 319–328.

[3] N. Hayashi and K. Kato, *Regularity in time of solutions to nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal., **128** (1995), 253–277.

[4] N. Hayashi, C. Miao and P.I. Naumkin, *Global existence of small solutions to the generalized derivative nonlinear Schrödinger equation*, Asymptotic Analysis, **21** (1999), 133–147.

[5] N. Hayashi, P.I. Naumkin and P.N. Pipolo, *Analytical smoothing effects for some derivative nonlinear Schrödinger equations*, Tsukuba J. Math., **24** (2000), 21–34.

[6] N. Hayashi, P.I. Naumkin and H. Uchida, *Analytic smoothing effect and global existence of small solutions to the elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson system*, Adv. Differential Equations, **7** (2002), 469–492.

[7] K. Kato and K. Taniguchi, *Gevrey regularizing effect for nonlinear Schrödinger equations*, Osaka J. Math., **33** (1996), 863–880.

[8] K. Taniguchi, *Gevrey regularizing effect for a nonlinear Schrödinger equation in one space dimension*, J. Math. Soc. Japan, **50** (1998), 1015–1026.

[9] H. Uchida, *Analicity of Solutions to Nonlinear Schrödinger Equations*, SUT J. Math., **37** (2001), 105–135.