数理解析研究所講究録 1336 巻 2003 年 58-72

佐藤超函数の空間における 古典的超局所解析について

On classical microlocal analysis in the space of hyperfunctions

筑波大学数学系
若林誠一郎
Seiichiro Wakabayashi
Institute of Math., Univ. of Tsukuba

解析函数-佐藤超函数の枠組みにおける偏微分方程式の研究においては, 代数解析的な取り扱いが主流であって, 従来からの C^∞-distribution の枠組みにおける方法を適用することは難しいと考えられていた. C^∞-distribution の枠組みにおける最も重要な手法は (微積分学の基本定理の一つの表現である) 部分積分であり, これにより得られる種々のエネルギー評価 (アプリオリ評価) を用いて, 偏微分方程式の研究がなされてきた. その後, 超局所解析的取り扱いにより, 偏微分方程式論が大に発展した. C^∞-distribution の枠組みにおける超局所解析においては, cut-off 函数及びそれをシンボルとする擬微分作用素を用いることができ, これによって問題を容易に超局所化できる. シンボル・カリキュラス (本質的には部分積分) を適用して, 超局所的考察 (標準形への帰着等) によりエネルギー評価等を導き, またパラメトリックスを構成することにより, 偏微分方程式を研究することが可能になった. ここで述べたような超局所解析を古典的超局所解析と呼ぶことにする. 解析函数-佐藤超函数の枠組みでの偏微分方程式の研究に古典的超局所解析的手法を用いるために, cut-off シンボルをもつ擬微分作用素を用いて, [4] において古典的超局所解析の基礎を与えた. すなわち, 我々は [4] において, Hörmander [1] の第 IX 章及び Treves [3] の第 V 章の結果を結び付けて, その上に古典的超局所解析を確立した。

ここでは [4] について簡単に紹介して, 代数解析とは少し異なるアプローチについて述べたい. §1 では佐藤超函数・マイクロ函数に対して我々の立場からの同値な定義を与え, §2 で擬微分作用素の定義及びシンボル・カリキュラスについて簡単に述べる. 最後に §3 において, 一つの例として microhyperbolic 作用素に関する柏原-河合 [2] の結果を紹介して, 古典的超局所解析の立場からの略証を与える.

1. 佐藤超函数

1.1. 函数空間と Fourier 変換

$\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して

$$\widehat{\mathcal{S}}_\varepsilon := \{v(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ e^{\varepsilon\langle\xi\rangle}v(\xi) \in \mathcal{S}\}$$

とおく. ここで $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$, $\mathcal{S}$ は Schwartz 空間を表す. $\widehat{\mathcal{S}}_\varepsilon$ には $\mathcal{S}$ より自然な位相が導入され, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ がそこで稠密になる. さらに $\widehat{\mathcal{S}}_\varepsilon$ の共役空間を $\widehat{\mathcal{S}}'_\varepsilon$ で表すと, $\widehat{\mathcal{S}}'_\varepsilon \subset \mathcal{D}'$ とみなすことができる.

$$\widehat{\mathcal{S}}'_\varepsilon = \{v(\xi) \in \mathcal{D}';\ e^{-\varepsilon\langle\xi\rangle}v(\xi) \in \mathcal{S}'\}$$

が成立する. $\varepsilon \geq 0$ とする. そのとき, $\widehat{\mathcal{S}}_\varepsilon \subset \mathcal{S}$ より

$$\mathcal{S}_\varepsilon := \mathcal{F}^{-1}[\widehat{\mathcal{S}}_\varepsilon]\,(=\mathcal{F}[\widehat{\mathcal{S}}_\varepsilon])\,(\subset \mathcal{S})$$

と定義できる. ここで $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ はそれぞれ $\mathcal{S}'$ における Fourier 変換及び逆 Fourier 変換を表す. 例えば $u \in \mathcal{S}$ に対して, $\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}[u](\xi)(\equiv \hat{u}(\xi)) := \int e^{-ix\cdot\xi}u(x)\,dx$ で定義される. ここで $x\cdot\xi = \sum_{j=1}^n x_j\xi_j$ ($x=(x_1,\cdots,x_n), \xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$) である. $\widehat{\mathcal{S}}_\varepsilon$ の $\mathcal{F}^{-1}$ による像として $\mathcal{S}_\varepsilon$ に自然な位相を導入し, その共役空間を $\mathcal{S}'_\varepsilon$ で表す. $\widehat{\mathcal{S}}_\varepsilon$, $\mathcal{S}_\varepsilon$ は $\mathcal{S}$ で稠密より $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}'_\varepsilon$ とみなせる. $\widehat{\mathcal{S}}_\varepsilon \overset{\mathcal{F},\mathcal{F}^{-1}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \mathcal{S}_\varepsilon$ の共役作用素として, $\mathcal{S}'_\varepsilon \overset{{}^t\mathcal{F},{}^t\mathcal{F}^{-1}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \widehat{\mathcal{S}}'_\varepsilon$ を定義できる. $\widehat{\mathcal{S}}_{-\varepsilon} \subset \widehat{\mathcal{S}}'_\varepsilon$ に注意して

$$\mathcal{S}_{-\varepsilon} := {}^t\mathcal{F}^{-1}[\widehat{\mathcal{S}}_{-\varepsilon}]\ (\supset \mathcal{S})$$

と定義する. $\mathcal{S}_{-\varepsilon}$ に同様に位相を定義してその共役空間を $\mathcal{S}'_{-\varepsilon}$ で表すと, $\mathcal{S}'_{-\varepsilon} = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{\mathcal{S}}'_{-\varepsilon}] \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}'_\varepsilon$ である. さらに ${}^t\mathcal{F}|_{\mathcal{S}'} = \mathcal{F}$, ${}^t\mathcal{F}^{-1}|_{\mathcal{S}'} = \mathcal{F}^{-1}$ であり, 以下 ${}^t\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}$, ${}^t\mathcal{F}^{-1}$ を $\mathcal{F}^{-1}$ とかくことにする.

$\mathcal{A}(\mathbb{C}^n)$ を $\mathbb{C}^n$ 上の整函数の全体とし, K を $\mathbb{C}^n$ のコンパクト部分集合とする. そのとき, K によって "carry" される解析汎函数の全体 $\mathcal{A}'(K)$ は次のように定義される:

$u \in \mathcal{A}'(K)$

$\overset{\text{def}}{\iff}$

(i) $u : \mathcal{A}(\mathbb{C}^n) \ni \varphi \mapsto u(\varphi) \in \mathbb{C}$: 線形汎函数

(ii) $\forall\omega$: K の複素近傍, $\exists C_\omega \geq 0$ s.t.

$$|u(\varphi)| \leq C_\omega \sup_{z\in\omega}|\varphi(z)| \quad \text{for } \forall\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n).$$

さらに $\mathcal{A}'(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{K \Subset \mathbb{R}^n} \mathcal{A}'(K)$, $\mathcal{F}_0 := \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{S}'_\varepsilon$, $\mathcal{E}_0 := \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{S}_{-\varepsilon}$ とおく. そのとき, $\mathcal{A}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{F}_0$ とみなせる. 実際 $u \in \mathcal{A}'(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\mathcal{F}[u](\xi) = u_z(e^{-iz\cdot\xi})\,(\in \mathcal{F}[\mathcal{E}_0])$$

と定義することによって, $\mathcal{A}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}_0$ とみなすことができる ([4] の Lemma 1.1.2 参). ここで $z \cdot \xi = \sum_{j=1}^n z_j \xi_j$ ($z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$) である. ここで定義した $\mathcal{F}_0$ が C^∞-distribution の枠組における $\mathcal{S}'$ の役割を担う.

1.2. 台・特異台と佐藤超函数

$\mathbb{R}^n$ の有界開集合 X に対して, X 上の佐藤超函数 (hyperfunction) の全体を $\mathcal{B}(X)$ で表し,

$$\mathcal{B}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}'(\overline{X})/\mathcal{A}'(\partial X)$$

によって定義する. $u \in \mathcal{F}_0$ とし, $x_{n+1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(u)(x, x_{n+1}) &\stackrel{\text{def}}{=} (\operatorname{sgn} x_{n+1}) \exp[-|x_{n+1}|\langle D\rangle] u(x)/2 \\ &\bigl(= (\operatorname{sgn} x_{n+1}) \mathcal{F}_\xi^{-1}[\exp[-|x_{n+1}|\langle \xi \rangle]\hat{u}(\xi)](x)/2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\bigr)\end{aligned}$$

と定義する. そのとき, $(1 - \Delta_{x, x_{n+1}})\mathcal{H}(u)(x, x_{n+1}) = 0$ ($x_{n+1} \neq 0$), $\mathcal{H}(u)(x, \pm\varepsilon) \to \pm u(x)/2$ in $\mathcal{F}_0$ ($\varepsilon \downarrow 0$) である. さらに $\operatorname{supp} u$ ($\subset \mathbb{R}^n$) を

$x^0 \notin \operatorname{supp} u$

$\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\exists V$: $(x^0, 0)$ の $\mathbb{R}^{n+1}$ における近傍, $\exists U(x, x_{n+1})$: V で解析的 s.t.

$$\mathcal{H}(u)(x, x_{n+1}) = U(x, x_{n+1}) \quad \text{if } (x, x_{n+1}) \in V \text{ and } x_{n+1} \neq 0$$

によって定義する ([4] 参).

注意. (i) $K\,(\subset \mathbb{R}^n)$: コンパクト, $u \in \mathcal{F}_0$ のとき

$u \in \mathcal{A}'(K) \Longleftrightarrow u$: 解析汎函数かつ $\operatorname{supp} u \subset K$

(ii) $u \in \mathcal{S}'$ ($\subset \mathcal{F}_0$) のとき $\operatorname{supp} u$ は distribution の意味での $\operatorname{supp} u$ と一致する.

定義 1.1. $u \in \mathcal{F}_0$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ とする.

(i) u が x^0 で解析的

$\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\mathcal{H}(u)$ が $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ から $(x^0, 0)$ の近傍へ解析接続される

(ii) $\operatorname{sing\,supp} u \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n;\ u$ が x で解析的でない $\}$

命題 1.2 ([4] の Theorem 1.3.3). K を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合, $u \in \mathcal{F}_0$ とする. そのとき

$\exists v \in \mathcal{A}'(K)$ s.t. $\operatorname{supp}(u-v) \subset \overline{\mathbb{R}^n \setminus K}$

さらに $w \in \mathcal{A}'(K)$ も上の性質を持てば $\operatorname{supp}(v-w) \subset \partial K$ である.

略証. $U(x, x_{n+1}) = \mathcal{H}(u)(x, x_{n+1})$ とおく. $\phi(x, x_{n+1}) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \partial K \times \{0\})$ を

$$\phi(x, x_{n+1}) = \begin{cases} 0 & \text{if } |(x, x_{n+1})| \gg 1, \\ 1 & \text{near } (K \setminus \partial K) \times \{0\}, \\ 0 & \text{near } (\mathbb{R}^n \setminus K) \times \{0\} \end{cases}$$

を満たすようにとる ([1] 参). $1 - \Delta_{x,x_{n+1}}$ は楕円型であるので,

$\exists f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \partial K \times \{0\})$ s.t.

$(1 - \Delta_{x,x_{n+1}})f = (1 - \Delta_{x,x_{n+1}})(\phi U)$ in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \partial K \times \{0\}$

ここで $(1 - \Delta_{x,x_{n+1}})(\phi U)$ は $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ でしか定義されていないが, $(1 - \Delta_{x,x_{n+1}})U = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ より, $(\mathbb{R}^n \setminus \partial K) \times \{0\}$ に零として拡張した. $\widetilde{V} := \phi U - f$ ($\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus K \times \{0\})$) とおいて, v: $\mathcal{A}(\mathbb{C}^n) \ni \varphi \mapsto v(\varphi) \in \mathbb{C}$ を

$$v(\varphi) = \int \widetilde{V}(1 - \Delta_{x,x_{n+1}})(\chi\Phi)\, dx dx_{n+1}$$

で定義すれば, 望む性質をもつことを示すことができる. ここで $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ は $\chi = 1$ near $K \times \{0\}$ を満たす函数, $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ は Cauchy 問題: $(1 - \Delta_{x,x_{n+1}})\Phi = 0$, $\Phi|_{x_{n+1}=0} = 0$, $(\partial\Phi/\partial x_{n+1})|_{x_{n+1}=0} = \varphi$ の解である ($\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n)$ より 1 意解 Φ が存在する). □

注意. $u(\varphi) = \displaystyle\int U(1 - \Delta_{x,x_{n+1}})(\chi\Phi)\, dx dx_{n+1}$ である. ここで上の略証中の記号を用いた.

$\mathbb{R}^n$ の有界開集合 X, Y ($Y \subset X$) に対して, 命題 1.2 より制限写像

$$\mathcal{F}_0 \ni u \mapsto [v](=: u|_X) \in \mathcal{B}(X), \quad \mathcal{B}(X) \ni u \mapsto u|_Y \in \mathcal{B}(Y)$$

を定義できる. ここで $u \in \mathcal{F}_0$ に対して, $v \in \mathcal{A}'(\overline{X})$ を $\operatorname{supp}(u-v) \subset \mathbb{R}^n \setminus X$ を満たすように選んだ. $[v]$ は $\mathcal{B}(X)$ における v の同値類を表す. $\mathbb{R}^n$ の一般の開集合 X に対しては, $\mathcal{B}(X)$ を $\mathcal{F}_0$ (または $\mathcal{A}'(\mathbb{R}^n)$) の局所空間として定義する ([4] の Definition 1.4.5 参). $u \in \mathcal{B}(X)$ とする. X に含まれる有界開集合 Y に対して, $v \in \mathcal{A}'(\overline{Y})$ s.t. $u|_Y = v|_Y$ in $\mathcal{B}(Y)$ が存在する. そのとき, $\operatorname{supp} u$ 及び sing supp u を

$$\operatorname{supp} u \cap Y = \operatorname{supp} v \cap Y, \quad \text{sing supp}\, u \cap Y = \text{sing supp}\, v \cap Y,$$

によって定義することができる (v の選び方によらない). X の各開部分集合 U に $\mathcal{B}(U)$ を対応させてできる X 上の前層を $\mathcal{B}_X$ で表す. そのとき $\mathcal{B}_X$ は脆弱層になる (例えば [4] の Theorem 1.4.8 参).

1.3. 波面集合とマイクロ函数

波面集合の定義として何を採用するかということと，どのような超局所解析を目指そうとしているのかが，密接に関係している．ここでは次の定義を採用する．

定義 1.3. (i) $u \in \mathcal{F}_0$, $(x^0, \xi^0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ ($\simeq \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$) とする．

$(x^0, \xi^0) \notin WF_A(u)$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\exists \Gamma$: ξ^0 の錐近傍, $\exists R_0 > 0$, $\exists \{g^R(\xi)\}_{R \geq R_0} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ s.t.

$g^R(\xi) = 1$ in $\Gamma \cap \{\langle \xi \rangle \geq R\}$,

$|\partial_\xi^{\alpha+\tilde{\alpha}} g^R(\xi)| \leq C_{|\tilde{\alpha}|}(C/R)^{|\alpha|}\langle \xi \rangle^{-|\alpha|}$ if $\langle \xi \rangle \geq R|\alpha|$,

$g^R(D)u\,(= \mathcal{F}^{-1}[g^R(\xi)\hat{u}(\xi)])$: analytic at x^0 for $R \geq R_0$

によって，(解析的) 波面集合 $WF_A(u)$ を定義する．

(ii) X を $\mathbb{R}^n$ の開集合, $u \in \mathcal{B}(X)$, $(x^0, \xi^0) \in T^*X \setminus 0$ とする．

$(x^0, \xi^0) \notin WF_A(u)$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\exists U$: x^0 の有界開近傍, $\exists v \in \mathcal{A}'(\overline{U})$ s.t.

$v|_U = u|_U$ in $\mathcal{B}(U)$ & $(x^0, \xi^0) \notin WF_A(v)$

と定義する (v の選び方に依らないことを示すことができる ← [4] の Theorem 2.6.5).

(iii) $\mathcal{U}$ を余球面束 $S^*\mathbb{R}^n$ ($\simeq \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$) の開集合, U を $\mathcal{U} \subset U \times S^{n-1}$ を満たす $\mathbb{R}^n$ の開集合とし,

$$\mathcal{C}(\mathcal{U}) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)/\{u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n);\ WF_A(u) \cap \mathcal{U} = \emptyset\}$$
$$(= \mathcal{B}(U)/\{u \in \mathcal{B}(U);\ WF_A(u) \cap \mathcal{U} = \emptyset\})$$

によって，$\mathcal{U}$ 上のマイクロ函数のつくる空間 $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ を定義する．sp: $\mathcal{B}(U) \to \mathcal{C}(U \times S^{n-1})$ を自然な写像とし，制限写像と組み合わせて,

$$u|_{\mathcal{U}} := \mathrm{sp}(u)|_{\mathcal{U}} \quad \text{in } \mathcal{C}(\mathcal{U}) \quad \text{for } u \in \mathcal{B}(U),$$
$$v|_{\mathcal{U}} := \mathrm{sp}(v|_U)|_{\mathcal{U}} \quad \text{in } \mathcal{C}(\mathcal{U}) \quad \text{for } v \in \mathcal{F}_0$$

が定義される．Ω を $S^*\mathbb{R}^n$ の開集合とし, Ω の各開集合 $\mathcal{V}$ に $\mathcal{C}(\mathcal{V})$ を対応させてできる Ω 上の前層を $\mathcal{C}_\Omega$ で表す．

注意. (i) $WF_A(u)$ は通常の定義と一致する ([4] の Theorem 3.1.6 参).

(ii) $\mathcal{C}_\Omega$ は脆弱層になる (例えば, [4] の Theorem 3.6.1 参).

2. 擬微分作用素

2.1. 定義 (1)

$R \geq 1$, $A \geq 0$, $m_1, m_2, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ とし, $a(\xi, y, \eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ が

$$(2.1) \qquad |\partial_\xi^\alpha D_y^{\beta+\tilde\beta} \partial_\eta^\gamma a(\xi, y, \eta)| \leq C_{|\alpha|+|\tilde\beta|+|\gamma|}(A/R)^{|\beta|}\langle\xi\rangle^{m_1+|\beta|} \times \langle\eta\rangle^{m_2} \exp[\delta_1\langle\xi\rangle + \delta_2\langle\eta\rangle] \quad \text{if } \langle\xi\rangle \geq R|\beta|$$

を満たすと仮定する. ここで $D_y = -i\partial_y$ である. そのとき, 擬微分作用素 $a(D_x, y, D_y)$ を $u \in \mathcal{S}_\infty := \bigcap_\varepsilon \mathcal{S}_\varepsilon$ に対して

$$a(D_x, y, D_y)u(x) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}_\xi^{-1}\Big[\int\Big(\int e^{-iy\cdot(\xi-\eta)}a(\xi, y, \eta)\hat{u}(\eta)\,d\eta\Big)dy\Big](x)$$

と定義する. さらに $b(\xi, y, \eta) = a(\eta, y, \xi)$ とおいて, ${}^r a(D_x, y, D_y)$ を

$${}^r a(D_x, y, D_y)u = b(D_x, y, D_y)u \quad \text{for } u \in \mathcal{S}_\infty$$

によって定義する. そのとき次の命題を得る.

命題 2.1 ([4] の Theorem 2.3.3). 条件

$$\varepsilon_2 - \delta_2 = 2(\varepsilon_1 + \delta_1)_+, \quad \varepsilon_1 + \delta_1 \leq 1/R, \quad R \geq 2e\sqrt{n}A$$

が満たされているとする. ここで $c_+ = \max\{c, 0\}$ である. そのとき $a(D_x, y, D_y)$ は連続線形作用素: $\mathcal{S}_{\varepsilon_2} \to \mathcal{S}_{\varepsilon_1}$ 及び $\mathcal{S}'_{-\varepsilon_2} \to \mathcal{S}'_{-\varepsilon_1}$ に拡張される. 同様に ${}^r a(D_x, y, D_y)$ は連続線形作用素: $\mathcal{S}_{-\varepsilon_1} \to \mathcal{S}_{-\varepsilon_2}$ 及び $\mathcal{S}'_{\varepsilon_1} \to \mathcal{S}'_{\varepsilon_2}$ に拡張される.

略証. $a(D_x, y, D_y)$: $\mathcal{S}_{\varepsilon_2} \to \mathcal{S}_{\varepsilon_1}$ と連続拡張できることを示そう. そのために $|(2\pi)^n\langle\xi\rangle^k D_\xi^\alpha\{e^{\varepsilon_1\langle\xi\rangle}\mathcal{F}[a(D_x, y, D_y)u(x)](\xi)\}|$ ($k \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n$) を評価すればよい. 簡単のために $k = 0$, $\alpha = 0$, $\varepsilon_1 = 0$ の場合を考える. $\xi \in \mathbb{R}^n$ を 1 つ固定して $j \in \mathbb{Z}_+$ を $j < \langle\xi\rangle/R \leq j + 1$ なるように選んで,

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^n\mathcal{F}[a(D_x, y, D_y)u(x)](\xi) \\
&= \int_{\langle\eta\rangle \geq |\xi|/2} e^{-iy\cdot(\xi-\eta)}\langle y\rangle^{-2M}\langle D_\eta\rangle^{2M}\{a(\xi, y, \eta)\hat{u}(\eta)\}\,d\eta dy \\
&\quad + \int_{\langle\eta\rangle \leq |\xi|/2} e^{-iy\cdot(\xi-\eta)}K^j[\langle y\rangle^{-2M}\langle D_\eta\rangle^{2M}\{a(\xi, y, \eta)\hat{u}(\eta)\}]\,d\eta dy
\end{aligned}$$

と書ける. ここで $M \geq [n/2] + 1$,

$$K = |\xi - \eta|^{-2}\sum_{\ell=1}^n(\xi_\ell - \eta_\ell)D_{y_\ell}$$

である. 後は (2.1) を用いて評価すればよい. □

定義 2.2. Γ を $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ の開錐集合, $A, C_0, R_0\geq 0$, $m, \delta, m_j, \delta_j\in\mathbb{R}$ ($j=1,2$) とする. ここで Γ が錐集合であるとは, "$(x,\xi)\in\Gamma$ かつ $\lambda>0$ ならば $(x,\lambda\xi)\in\Gamma$" を意味する.

(i) $R_0\geq 1$ とする. $a(x,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$a(x,\xi)\in S^{m,\delta}(R_0,A)$$
$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$
$$|a^{(\alpha+\tilde\alpha)}_{(\beta+\tilde\beta)}(x,\xi)|\leq C_{|\tilde\alpha|+|\tilde\beta|}(A/R_0)^{|\alpha|+|\beta|}\langle\xi\rangle^{m+|\beta|-|\tilde\alpha|}e^{\delta\langle\xi\rangle}\quad\text{if }\langle\xi\rangle\geq R_0(|\alpha|+|\beta|)$$

と定義する. ここで $a^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)=\partial^\alpha_\xi D^\beta_x a(x,\xi)$ である. さらに $S^+(R_0,A):=\bigcap_{\delta>0}S^{0,\delta}(R_0,A)$ と定義する.

(ii) $R_0\geq 1$ とする. $a(\xi,y,\eta)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$a(\xi,y,\eta)\in S^{m_1,m_2,\delta_1,\delta_2}(R_0,A)$$
$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$
$$\begin{aligned}|\partial^{\alpha+\tilde\alpha}_\xi D^{\beta^1+\beta^2+\tilde\beta}_y\partial^{\gamma+\tilde\gamma}_\eta a(\xi,y,\eta)|\leq{}& C_{|\tilde\alpha|+|\tilde\beta|+|\tilde\gamma|}(A/R_0)^{|\alpha|+|\beta^1|+|\beta^2|+|\gamma|}\\&\times\langle\xi\rangle^{m_1+|\beta^1|-|\tilde\alpha|}\langle\eta\rangle^{m_2+|\beta^2|-|\tilde\gamma|}\exp[\delta_1\langle\xi\rangle+\delta_2\langle\eta\rangle]\end{aligned}$$
$$\text{if }\ \langle\xi\rangle\geq R_0(|\alpha|+|\beta^1|)\text{ and }\langle\eta\rangle\geq R_0(|\beta^2|+|\gamma|)$$

と定義する. さらに $S^{+,+}(R_0,A):=\bigcap_{\delta>0}S^{0,0,\delta,\delta}(R_0,A)$ と定義する. (混同の恐れがないときは), $S^{+,+}(R_0,A)$ を $S^+(R_0,A)$ と略記する.

(iii) $a(x,\xi)\in C^\infty(\Gamma)$ とする.

$a(x,\xi)\in PS^{m,\delta}(\Gamma;R_0,A)$: 擬解析的シンボル
$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$
$$|a^{(\alpha+\tilde\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)|\leq C_{|\tilde\alpha|}A^{|\alpha|+|\beta|}|\alpha|!|\beta|!\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|-|\tilde\alpha|}e^{\delta\langle\xi\rangle}$$
$$\text{if }\ (x,\xi)\in\Gamma,\ |\xi|\geq 1,\ \langle\xi\rangle\geq R_0|\alpha|$$

と定義する ([3] 参). さらに $PS^+(\Gamma;R_0,A):=\bigcap_{\delta>0}PS^{0,\delta}(\Gamma;R_0,A)$ と定義する.

(iv) $a_j(x,\xi)\in C^\infty(\Gamma)$ ($j\in\mathbb{Z}_+$) とする.

$$a(x,\xi)\equiv\sum_{j=0}^\infty a_j(x,\xi)\in FS^{m,\delta}(\Gamma;C_0,A)$$
$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$
$$|a^{(\alpha)}_{j(\beta)}(x,\xi)|\leq CC_0^jA^{|\alpha|+|\beta|}j!|\alpha|!|\beta|!\langle\xi\rangle^{m-j-|\alpha|}e^{\delta\langle\xi\rangle}\quad\text{if }j\in\mathbb{Z}_+,\ (x,\xi)\in\Gamma,\ |\xi|\geq 1$$

と定義し, $FS^+(\Gamma;C_0,A):=\bigcap_{\delta>0}FS^{0,\delta}(\Gamma;C_0,A)$ と記す.

注意. $\Gamma_0\Subset\Gamma$ を満たす開錐集合 Γ に対して, $a(x,\xi)\in S^{0,0}(R_0,A)$ かつ $\operatorname{supp}a\subset\Gamma$, $a(x,\xi)=1$ for $(x,\xi)\in\Gamma_0$ with $|\xi|\geq R_0$ を満たすシンボルを構成できる. 同様に $a(\xi,y,\eta)\in S^{0,0,0,0}(R_0,A)$ かつ $\operatorname{supp}a\subset\mathbb{R}^n\times\Gamma$, $a(\xi,y,\eta)=1$ for $(\xi,y,\eta)\in\mathbb{R}^n\times\Gamma_0$ with $|\eta|\geq R_0$ を満たすシンボルも構成できる.

2.2. シンボル・カルキュラス

$m_j, \delta_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1,2,3$) とし, $\varepsilon > 0$ とする. シンボル $a(\xi, w, \zeta, y, \eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ が評価

$$
\begin{aligned}
&|\partial_\xi^{\alpha+\tilde{\alpha}} D_w^{\beta^1+\beta^2+\tilde{\beta}} \partial_\zeta^{\gamma+\tilde{\gamma}} D_y^{\lambda^1+\lambda^2+\tilde{\lambda}} \partial_\eta^{\rho+\tilde{\rho}} a(\xi, w, \zeta, y, \eta)| \\
&\le C_{|\tilde{\alpha}|+|\tilde{\beta}|+|\tilde{\gamma}|+|\tilde{\lambda}|+|\tilde{\rho}|} (A/R_0)^{|\alpha|+|\beta^1|+|\beta^2|+|\gamma|+|\lambda^1|+|\lambda^2|+|\rho|} \langle\xi\rangle^{m_1-|\tilde{\alpha}|+|\beta^1|} \\
&\quad \times \langle\zeta\rangle^{m_2-|\tilde{\gamma}|+|\beta^2|+|\lambda^1|} \langle\eta\rangle^{m_3-|\tilde{\rho}|+|\lambda^2|} \exp[\delta_1\langle\xi\rangle + \delta_2\langle\zeta\rangle + \delta_3\langle\eta\rangle] \\
&\quad \text{if } \langle\xi\rangle \ge R_0(|\alpha| + |\beta^1|),\ \langle\zeta\rangle \ge R_0(|\gamma| + |\beta^2| + |\lambda^1|),\ \langle\eta\rangle \ge R_0(|\rho| + |\lambda^2|), \\
&|\partial_\xi^{\alpha+\tilde{\alpha}} D_w^{\beta^1+\beta^2+\tilde{\beta}} \partial_\zeta^{\gamma+\tilde{\gamma}} D_y^{\lambda} \partial_\eta^{\rho+\tilde{\rho}} a(\xi, w, \zeta, y, \eta)| \\
&\le C_{|\tilde{\alpha}|+|\tilde{\beta}|+|\tilde{\gamma}|+|\tilde{\rho}|} (A/R_0)^{|\alpha|+|\beta^1|+|\beta^2|+|\gamma|+|\rho|} B^{|\lambda|} |\lambda|! \langle\xi\rangle^{m_1-|\tilde{\alpha}|+|\beta^1|} \\
&\quad \times \langle\zeta\rangle^{m_2-|\tilde{\gamma}|+|\beta^2|} \langle\eta\rangle^{m_3-|\tilde{\rho}|} \exp[\delta_1\langle\xi\rangle + \delta_2\langle\zeta\rangle + \delta_3\langle\eta\rangle] \\
&\quad \text{if } |w-y| \le \varepsilon,\ |\zeta - \eta| \le \varepsilon|\eta|,\ \langle\xi\rangle \ge R_0(|\alpha| + |\beta^1|), \\
&\qquad \langle\zeta\rangle \ge R_0(|\gamma| + |\beta^2|),\ \langle\eta\rangle \ge R_0|\rho|
\end{aligned}
$$

を満たすと仮定する. そのとき $u \in \mathcal{S}_\infty$ に対して, $R_0 \gg 1$ かつ $\delta_2 \le 1/(3R_0)$ ならば, $a(D_x, w, D_w, y, D_y)u$ を

$$
\begin{aligned}
a(D_x, w, D_w, y, D_y)u(x) :=& \mathcal{F}_\xi^{-1}\Big[\lim_{\nu \downarrow 0}(2\pi)^{-2n} \int\Big(\int\Big(\int\Big(\int e^{-\nu|\zeta|^2} e^{iw\cdot(\zeta-\xi)+iy\cdot(\eta-\zeta)} \\
&\times a(\xi, w, \zeta, y, \eta)\hat{u}(\eta)\, d\eta\Big)\, dy\Big)\, d\zeta\Big)\, dw\Big](x)
\end{aligned}
$$

によって定義できる ([4] の Lemma 2.4.1 参).

命題 2.3. $R_0 \ge 8nAB$ のとき, $A' > 0$ を適当にとって

$$
\begin{aligned}
p(\xi, y, \eta) &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j^{4R_0}(\eta) \sum_{|\gamma|=j} \frac{1}{\gamma!} \partial_\zeta^\gamma D_w^\gamma a(\xi, y, \eta + \zeta, y + w, \eta)|_{w=0,\zeta=0} \\
&\in S^{m_1, m_2+m_3, \delta_1, \delta_2+\delta_3}(6R_0, A')
\end{aligned}
$$

であり, シンボル $q_0(\xi, y, \eta)$ 及び $R(A) > 0$ が存在して, $R_0 \ge R(A)$, $\delta_2, \delta_3 \le 1/R_0$ ならば

$$
a(D_x, w, D_w, y, D_y) = p(D_x, y, D_y) + q_0(D_x, y, D_y) \quad \text{on } \mathcal{S}_\infty
$$

と表せる. ここで, $q_0(\xi, y, \eta)$ は 各 $\kappa > 0$ に対して $R(A, \kappa) > 0$ が存在して, $R_0 \ge R(A, \kappa)$ ならば

$$
\begin{aligned}
|\partial_\xi^\alpha D_y^{\beta+\tilde{\beta}} \partial_\eta^\gamma q_0(\xi, y, \eta)| &\le C_{|\alpha|+|\tilde{\beta}|+|\gamma|, R_0} (C/\kappa + A''/R_0)^{|\beta|} \\
&\quad \times \langle\xi\rangle^{m_1-|\alpha|+|\beta|} \langle\eta\rangle^{|m_2|+m_3} \exp[\delta_1\langle\xi\rangle - \kappa\langle\eta\rangle/R_0]
\end{aligned}
$$

$$\text{if } \langle\xi\rangle \geq R_0|\beta|,\ \max\{4(\delta_2)_+ + \delta_3, 4\delta_2 + 2|\delta_2| + 2\delta_3\} \leq \kappa/R_0$$

を満たすシンボルであり, C, A'' は κ, R_0 に依存しない正数である. また $\{\phi_j^R(\xi)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ $\subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $0 \leq \phi_j^R \leq 1$, $\phi_j^R(\xi) = \begin{cases} 0 & (\ \langle\xi\rangle \leq 2Rj), \\ 1 & (\ \langle\xi\rangle \geq 3Rj), \end{cases}$

$$|\partial_\xi^{\alpha+\beta}\phi_j^R(\xi)| \leq \widehat{C}_{|\beta|}(\widehat{C}/R)^{|\alpha|}\langle\xi\rangle^{-|\beta|} \quad (\ |\alpha| \leq 2j)$$

を満たす函数列である.

注意. 命題 2.1 より, 例えば $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ のとき, $R_0 \gg 1$ ならば $q_0(D_x, y, D_y)$ $(\mathcal{F}_0) \subset \bigcup_{\varepsilon>0}\mathcal{S}'_{-\varepsilon} \subset \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ が従う. ここで $\mathbb{R}^n$ の開集合 X に対して $\mathcal{A}(X)$ によって X 上の実解析函数の全体を表した.

命題 2.4 ([4] の Corollary 2.4.7). $a(\xi, y, \eta) \in S^{m_1, m_2, \delta_1, \delta_2}(R_0, A)$ とする. そのとき, 次を満たす $p_0(x, \xi) \in S^{m_1+m_2, \delta_1+|\delta_2|/2+\delta_2}(4R_0, A')$, $q_0(x, \xi)$ 及び $R(A) > 0$ が存在する: $R_0 \geq R(A)$, $6|\delta_1| + 2|\delta_2| \leq 1/R_0$ ならば

$$a(D_x, y, D_y) = p_0(x, D) + q_0(x, D) \quad \text{on } \mathcal{S}_\infty,$$
$$|q_{0(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_{|\alpha|, R_0}(4R_0 + 1)^{|\beta|}|\beta|!\exp[-\langle\xi\rangle/(2R_0)].$$

ここで A' は R_0 に依存しない正数である. さらに $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ の開錐集合 Γ 及び $\varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^{\alpha+\tilde\alpha} D_y^\beta \partial_\eta^{\gamma+\tilde\gamma} a(\xi, y, \eta)| \leq {} & C_{|\tilde\alpha|+|\tilde\gamma|}(A/R_0)^{|\alpha|+|\gamma|}B^{|\beta|}|\beta|! \\ & \times \langle\xi\rangle^{m_1-|\tilde\alpha|}\langle\eta\rangle^{m_2-|\tilde\gamma|}\exp[\delta_1\langle\xi\rangle + \delta_2\langle\eta\rangle] \end{aligned}$$
$$\text{if } \exists x \text{ s.t. } (x, \eta) \in \Gamma,\ |x - y| \leq \varepsilon;\ |\xi - \eta| \leq \varepsilon|\eta|,\ \langle\xi\rangle \geq R_0|\alpha|,\ \langle\eta\rangle \geq R_0|\gamma|$$

が成立するならば,

$$|p_{0(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) - p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_{|\alpha|}(R_0 + 1)^{|\beta|}|\beta|!\exp[-\langle\xi\rangle/R_0]$$
$$\text{if } (x, \xi) \in \Gamma,\ R_0 \geq R(A, B, \varepsilon),\ 3|\delta_1| + 2|\delta_2| \leq 1/R_0$$

である. ここで

$$p(x, \xi) = \sum_{j=0}^\infty \phi_j^{4R_0}(\xi) \sum_{|\gamma|=j} \frac{1}{\gamma!}\partial_\eta^\gamma D_y^\gamma a(\xi + \eta, x + y, \xi)|_{y=0, \eta=0}$$

である.

上に述べた 2 つの命題の証明は, C^∞-distribution の枠組での対応する結果の証明と本質的には同じであり, 微分の評価等を精密に計算すればよい.

2.3. 擬局所性

次の命題は C^∞-distribution の枠組では明らかであるが, ここで採用した $\mathrm{supp}\, u$ の定義の下ではそれ程自明ではない.

命題 2.5 ([4] の Corollary 2.6.2). $a(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ が

$$|a_{(\beta+\tilde\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)| \le C_{|\alpha|+|\tilde\beta|,\delta}(A/R_0)^{|\beta|}\langle\xi\rangle^{|\beta|}e^{\delta\langle\xi\rangle} \quad \text{if } \delta > 0,\ \langle\xi\rangle \ge R_0|\beta|$$

を満たすとする. そのとき $R_0 \ge 8e\sqrt{n}A$ ならば, $a(x,D)\colon \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0$ かつ

$$\mathrm{supp}\, a(x,D)u \subset \overline{\{x \in \mathbb{R}^n;\ (x,\xi) \in \mathrm{supp}\, a \text{ for some } \xi\}} \quad (\, u \in \mathcal{F}_0)$$

である.

次に擬局所性に関するいくつかの結果を与える.

定理 2.6. Γ を開錐集合, $a(\xi,y,\eta) \in S^+(R_0,A)$ とし, ある $\varepsilon > 0$ に対して

$$a(\xi,y,\eta) = 0 \quad \text{if } (y,\eta) \in \Gamma_\varepsilon,\ |\xi/|\xi| - \eta/|\eta|| \le \varepsilon/4,\ \langle\xi\rangle \ge R_0$$

を満たすとする. ここで $\Gamma_\varepsilon := \{(x,\xi);\ \xi \ne 0,\ |(x,\xi/|\xi|) - (y,\eta/|\eta|)| < \varepsilon \text{ for some } (y,\eta) \in \Gamma\}$ である. そのとき, $R(\varepsilon) > 0$ が存在して $R_0 \ge R(\varepsilon)A$ ならば,

$$WF_A(a(D_x,y,D_y)u) \cap \Gamma = \emptyset \quad \text{for } u \in \mathcal{F}_0$$

である.

定理 2.7 (擬局所性, [5] の Lemma 2.2). $a(\xi,y,\eta) \in S^+(R_0,A)$, Γ, Γ_1 を開錐集合で $\Gamma_1 \Subset \Gamma$ を満たすものとする. そのとき $R(\Gamma_1,\Gamma) > 0$ が存在して

$$WF_A(a(D_x,y,D_y)u) \cap \Gamma_1 = \emptyset \quad \text{if } u \in \mathcal{F}_0,\ WF_A(u) \cap \Gamma = \emptyset,\ R_0 \ge R(\Gamma_1,\Gamma)A$$

が成立する.

命題 2.8 ([5] の Lemma 2.9). Γ を開錐集合で $\Gamma \Subset T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ を満たすものとし, シンボル $a(\xi,y,\eta)$ が $\mathrm{supp}\, a \subset \mathbb{R}^n \times \Gamma$ かつ

$$\begin{aligned}|\partial_\xi^\alpha D_y^{\beta+\tilde\beta}\partial_\eta^{\gamma+\tilde\gamma}a(\xi,y,\eta)| &\le C_{|\alpha|+|\tilde\beta|+|\tilde\gamma|}(A/R)^{|\beta|+|\gamma|}\langle\xi\rangle^{m_1-|\alpha|+|\beta|}\\ &\quad\times \langle\eta\rangle^{m_2-|\tilde\gamma|}\exp[\delta_1\langle\xi\rangle + \delta_2\langle\eta\rangle] \quad \text{if } \langle\xi\rangle \ge R_0|\beta|,\ \langle\eta\rangle \ge R_0|\gamma|\end{aligned}$$

を満たすと仮定する. $\varepsilon > 0$ とし, $u \in \mathcal{F}_0$ が $WF_A(u) \cap \Gamma_\varepsilon = \emptyset$ 満たすものとする. そのとき, 正数 $R(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon,u)$, $\delta_j(\varepsilon,u)$ ($j = 1,2$) が存在して

$$\begin{aligned}a(D_x,y,D_y)u \in \mathcal{S}_\delta \quad &\text{if } R_0 \ge R(\varepsilon)A,\ 2\delta_1 + |\delta_2| < 1/R_0,\\ &\delta_j \le \delta_j(\varepsilon,u)\ (\, j = 1,2),\ \delta < \min\{1/(2R_0),\delta(\varepsilon,u)\}\end{aligned}$$

が成立する.

2.4. 定義 (2)

$a(x,\xi) \in PS^+(\Gamma; R_0, A)$ とする. 開錐集合 Γ_j ($j=1,2$) が $\Gamma_0 \Subset \Gamma_1 \Subset \Gamma_2 \Subset \Gamma$ を満たすものとする. $\Phi^R(\xi,y,\eta) \in S^{0,0,0,0}(R, C(\Gamma_1,\Gamma_2))$ を $\mathrm{supp}\,\Phi^R \subset \mathbb{R}^n \times \Gamma_2$, $\Phi^R(\xi,y,\eta)=1$ for $(\xi,y,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \Gamma_1$ with $\langle\eta\rangle \geq R$ を満たすように選び, $a^R(\xi,y,\eta) = \Phi^R(\xi,y,\eta)a(y,\eta)$ とおく. $\Gamma_j^0 := \Gamma \cap (\mathbb{R}^n \times S^{n-1})$ 等と書くことにする. $u \in \mathcal{C}(\Gamma_0^0)$ に対して, 定義より $v|_{\Gamma_0^0} = u$ なる $v \in \mathcal{F}_0$ が存在する. そのとき

$$a(x,D)u \overset{\mathrm{def}}{=} (a^R(D_x,y,D_y)v)|_{\Gamma_0^0} \text{ in } \mathcal{C}(\Gamma_0^0) \quad \text{if } R \geq R(A,\Gamma_0,\Gamma_1,\Gamma_2)$$

によって, $a(x,D)\colon \mathcal{C}(\Gamma_0^0) \to \mathcal{C}(\Gamma_0^0)$ が定義される (Φ^R 及び v の選び方に依存しない). そのとき定理 2.7 より, 層準同型 $a(x,D)\colon \mathcal{C}_{\Gamma^0} \to \mathcal{C}_{\Gamma^0}$ が定義される. $a(x,\xi) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,\xi) \in FS^+(\Gamma; C_0, A)$ のとき,

$$\tilde{a}(x,\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j^{R/2}(\xi) a_j(x,\xi) \in PS^+(\Gamma; R, A') \quad \text{if } R > C_0$$

であり,

$$a(x,D)u \overset{\mathrm{def}}{=} \tilde{a}(x,D)u \quad \text{for } u \in \mathcal{C}(\Gamma^0)$$

によって, $a(x,D)\colon \mathcal{C}(\Gamma_0^0) \to \mathcal{C}(\Gamma_0^0)$ を定義できる ($\{\phi_j^R\}$ の取り方に依存しない). また層準同型 $a(x,D)\colon \mathcal{C}_{\Gamma^0} \to \mathcal{C}_{\Gamma^0}$ が定義される. U, X を $\mathbb{R}^n$ の開集合で $U \Subset X$ を満たすものとする. $a(x,\xi) \in PS^+(X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}); R_0, A)$ (or $\in FS^+(X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}); C_0, A)$) のとき, 同様に $a(x,D)\colon \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U) \to \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)$, $\mathcal{B}(U) \to \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)$ 及び層準同型 $a(x,D)\colon \mathcal{B}_X/\mathcal{A}_X \to \mathcal{B}_X/\mathcal{A}_X$, $\mathcal{B}_X \to \mathcal{B}_X/\mathcal{A}_X$ を定義できる. ここで, $\mathcal{A}_X$ は X 上の実解析函数の層を表す. また同様に Fourier 積分作用素を定義することができる ([4] の第 2, 3 章参).

3. microhyperbolic 作用素

この節では, 古典的超局所解析の応用として, microhyperbolic 作用素に対する柏原-河合 [2] の結果の略証を与える. 他のいくつかの応用については, [4] の第 4, 5 章において述べられている.

Ω を $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ の開錐集合とし, $m \in \mathbb{R}$, $p(x,\xi) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j}(x,\xi) \in FS^{m,0}(\Omega; C_0, A)$ とする. $p_m(x,\xi)$ は ξ について m 次正斉次であると仮定する. $z^0 = (x^0,\xi^0) \in \Omega^0 \equiv \Omega \cap \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$, $\vartheta \in T_{z^0}\Omega$ ($\simeq \mathbb{R}^{2n}$) とする. そのとき

$p(x,\xi)$ は z^0 で ϑ に関して microhyperbolic

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\exists \mathcal{U} (\subset \Omega)$: z^0 の近傍, $\exists t_0 > 0$ s.t. $p_m(z - it\vartheta) \neq 0$ for $z \in \mathcal{U}$, $0 < t \leq t_0$

と定義する. 以下, 次の仮定をおく:

仮定. $p(x,\xi)$ は z^0 で ϑ に関して microhyperbolic である.

localization 多項式 $p_{m\,z^0}(X)$ ($\not\equiv 0$ in $X \in \mathbb{R}^{2n}$) を

$$p_m(z^0+tX) = t^\mu(p_{m\,z^0}(X)+o(1)) \quad (\ t \to 0)$$

によって定義する. そのとき $p_{m\,z^0}(X)$ は ϑ に関して双曲型, すなわち

$$p_{m,z^0}(X - i\vartheta) \neq 0 \quad \text{for } X \in \mathbb{R}^{2n}$$

を満たす.

$$\Gamma(p_{m\,z^0},\vartheta) \stackrel{\text{def}}{=} \text{“}\{X \in \mathbb{R}^{2n};\ p_{m\,z^0}(X) \neq 0\} \text{ の } \vartheta \text{ を含む連結成分”}$$

と定義する.

命題 3.1 ([4] の Proposition 4.3.3). (i) $\tilde{\vartheta} \in \Gamma(p_{m\,z^0},\vartheta)$ ならば, $p(x,\xi)$ は z^0 で $\tilde{\vartheta}$ に関しても microhyperbolic である.

(ii) $\forall M\ (\subset \Gamma(p_{m\,z^0},\vartheta)$: コンパクト, $\exists\mathcal{U}\ (\subset \Omega)$: z^0 の近傍, $\exists t_0 > 0$, $\exists c_0 > 0$ s.t.

$$|p_m(z - itX)| \geq c_0 t^\mu \quad \text{for } z \in \mathcal{U},\ X \in M,\ 0 \leq t \leq t_0$$

定理 3.2 (柏原-河合). $\varphi(x,\xi) \in C^2(\Omega)$ は実数値かつ ξ について 0 次正斉次で $\varphi(z^0) = 0$ を満たすものとする. さらに

$$H_\varphi(z^0) \equiv (\nabla_\xi\varphi(z^0), -\nabla_x\varphi(z^0)) = -\vartheta$$

と仮定する. そのとき,

$u \in \mathcal{C}(\Omega^0)$, $z^0 \notin \operatorname{supp} p(x,D)u$,
$\exists\mathcal{U}\ (\subset \Omega^0)$: z^0 の近傍 s.t. $\operatorname{supp} u \cap \{z \in \mathcal{U};\ \varphi(z) < 0\} = \emptyset$
$\Longrightarrow$
$z^0 \notin \operatorname{supp} u$
が成り立つ.

略証. 定理 3.2 の証明のアイデアのみを与える. $\vartheta \neq 0$ と仮定してよい. $\mathcal{U}$ を Ω^0 における z^0 の近傍として, $u \in \mathcal{C}(\Omega^0)$ が $z^0 \notin \operatorname{supp} p(x,D)u$, $\operatorname{supp} u \cap \{z \in \mathcal{U};\ \varphi(z) < 0\} = \emptyset$ を満たすとする. $\Gamma_j \equiv X_j \times \gamma_j$ ($0 \leq j \leq 5$), Γ を開錐集合で $z^0 \in \Gamma_{j+1} \Subset \Gamma_j$, $\Gamma_0 \Subset \Gamma \Subset \Omega$, $\Gamma_1^0 \subset \mathcal{U}$ を満たすものとする. $\Phi^R(\xi,y,\eta) \in S^{0,0,0,0}(R, C(\Gamma_0,\Gamma))$ を

$$\operatorname{supp}\Phi^R \subset \mathbb{R}^n \times \Gamma, \quad \Phi^R(\xi,y,\eta) = 1 \text{ if } (y,\eta) \in \Gamma_0,\ \langle\eta\rangle \geq R$$

を満たすように選ぶ. 以下これを $\Gamma_0 \subset \Phi^R \subset \Gamma$ と記すことにする.

$$\tilde{p}(x,\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j^{R/2}(\xi) p_{m-j}(x,\xi), \quad p^R(\xi,y,\eta) := \Phi^R(\xi,y,\eta)\tilde{p}(y,\eta)$$

とおく. 定義より $v|_{\Gamma_1^0} = u|_{\Gamma_1^0}$ in $\mathcal{C}(\Gamma_1^0)$ を満たす $v \in \mathcal{A}'(\overline{X}_1)$ が存在する. $f := p^R(D_x, y, D_y)v$ とおいて,

$$WF_A(f) \cap \Gamma_1 = \emptyset, \quad WF_A(v) \cap \Gamma_1 \subset \{z \in \Gamma_1;\ \varphi(z) \geq 0\}$$

としてよい. $\kappa > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\Phi_\kappa(x,\xi) :=& (x - x^0) \cdot \nabla_x \varphi(z^0) + (\xi/|\xi| - \xi^0) \cdot \nabla_\xi \varphi(z^0) \\
&+ \kappa(|x - x^0|^2 + |\xi/|\xi| - \xi^0|^2), \\
\Lambda_j(x,\xi) :=& (\Phi_\kappa(x,\xi) - 1/j)|\xi| \quad (\ j \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

とおく. シンボル $\varphi^R(\xi,y,\eta)$ を $\Gamma_3 \Subset \varphi^R \Subset \Gamma_2$ を満たすようにとる (定義は明らかであろう). そのとき命題2.8 より, $\delta > 0$ が存在して $R \gg 1$ ならば

$$\varphi^R(D_x,y,D_y)p^R(D_x,y,D_y)v = \varphi^R(D_x,y,D_y)f =: g \in \mathcal{S}_\delta \tag{3.1}$$

となる. 故に

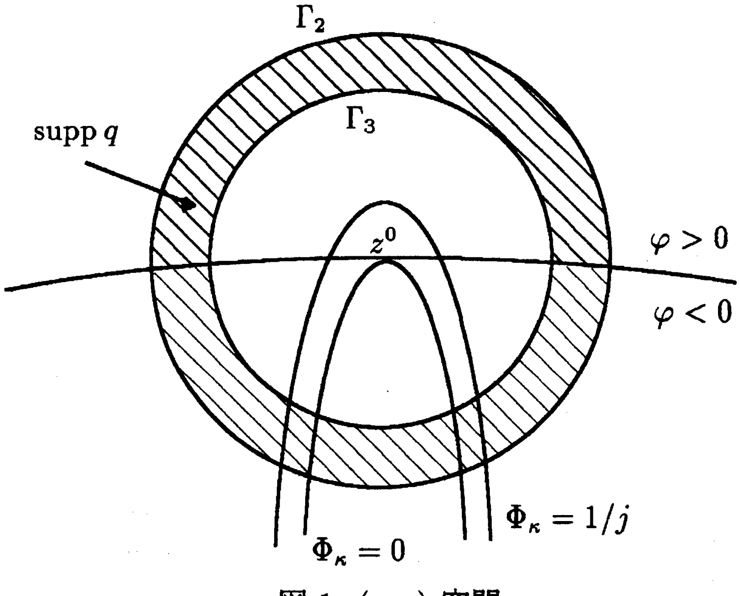

図 1: (y,η)-空間

$$p^R(D_x,y,D_y)\varphi^R(D_x,y,D_y)v = [p^R, \varphi^R]v + g \tag{3.2}$$

ここで $[p^R,\varphi^R]=p^R\varphi^R-\varphi^Rp^R\sim q(D_x,y,D_y)$. $j\gg 1$ のとき図 1 を得る. $\varphi^R\Subset\psi^{1,R}\Subset\psi^{2,R}\Subset\psi^{3,R}\Subset\Gamma_1$ を満たすようにシンボル $\psi^{k,R}(\xi,y,\eta)$ を選ぶ. ここで例えば $\varphi^R\Subset\psi^{1,R}$ は, 開錐集合 $\widetilde{\Gamma}_3\subset\widetilde{\Gamma}_2\subset\widetilde{\Gamma}_1$ が存在して $\widetilde{\Gamma}_3\subset\varphi^R\Subset\widetilde{\Gamma}_2$, $\widetilde{\Gamma}_2\Subset\psi^{1,R}\subset\widetilde{\Gamma}_1$ を意味するものとする. シンボル・カリキュラスより, 楕円型シンボル $e^R(\xi,y,\eta)$ で

$$
\begin{aligned}
(3.3)\quad &(Op(\exp[t\Lambda_j(y,\xi)]\psi^{2,R}(\eta,y,\xi))Op(\exp[-t\Lambda_j(y,\eta)]\psi^{3,R}(\xi,y,\eta))\\
&\qquad\times e^R(D_x,y,D_y)-1)\varphi^R(D_x,y,D_y):\ \text{regularizer}
\end{aligned}
$$

を満たすものが存在する. ここで $Op(a(\xi,y,\eta))=a(D_x,y,D_y)$ である.

$$
\begin{aligned}
p^R_{t\Lambda_j}(D_x,y,D_y):=&Op(\exp[-t\Lambda_j(y,\eta)]\psi^{1,R}(\xi,y,\eta))p^R(D_x,y,D_y)\\
&\times Op(\exp[t\Lambda_j(y,\xi)]\psi^{2,R}(\eta,y,\xi))
\end{aligned}
$$

とおいて, 図 1 に注意して, (3.1)-(3.3) より, δ に対して $t>0$ を十分小にとって

$$
(3.4)\qquad p^R_{t\Lambda_j}(D_x,y,D_y)w=g'\in L^2
$$

を得る. ここで

$$
w:=Op(\exp[-t\Lambda_j(y,\eta)]\psi^{3,R}(\xi,y,\eta))e^R(D_x,y,D_y)\varphi^R(D_x,y,D_y)v
$$

である. Fourier 積分作用素に対するカリキュラスにより

$$
\begin{aligned}
(3.5)\quad &p^R_{t\Lambda_j}(D_x,y,D_y)=p(x,D;t\Lambda_j)\quad \text{in } \Gamma_4,\\
&p(x,D;t\Lambda_j)=p_m(x+it(\nabla_\xi\varphi(z^0)+O(|x-x^0|+|\xi/|\xi|-\xi^0|+1/j+t)),\\
&\qquad \xi-it(\nabla_x\varphi(z^0)|\xi|+O(|x-x^0|\,|\xi|+t|\xi|)))(1+O(t))+O(|\xi|^{m-1})
\end{aligned}
$$

を示すことができる. microhyperbolic の仮定より, $\exists t_0>0$, $\exists c(t)>0$ ($0<t\le t_0$), $\exists j_0$ s.t.

$$
(3.6)\qquad |p(x,\xi;t\Lambda_j)|\ge c(t)|\xi|^m\quad \text{if }\ j\ge j_0,\ (x,\xi)\in\Gamma_5,\ |\xi|\ge 1,\ 0<t\le t_0
$$

が従う. 実際はもう少し厳密な議論を要するが, (3.4)-(3.6) より $w\in H^m$ near z^0 を示すことができる. また (3.3) より $\varphi^R(D_x,y,D_y)v-Op(\exp[t\Lambda_j(y,\xi)]\psi^{2,R}(\eta,y,\xi))w$ は解析的である. $\Lambda_j(x,\xi)\le -|\xi|/(2j)$ near z^0 より, $z^0\notin WF_A(v)$ を得る. □

次を仮定する:

仮定. ϑ: $\Omega\ni z\mapsto\vartheta(z)\in T_z\Omega$ を連続なベクトル場とし, p_m が各 $z\in\Omega$ において $\vartheta(z)$ に関して microhyperbolic である.

このとき, $z^0\in\Omega$ に対して Lipschitz 連続な曲線 $\{z(s)\}_{\pm s\in[0,a_\pm)}$ ($\subset\Omega$) がそれぞれ (ϑ に関して) 正方向 ($+$ に対応), 負方向 ($-$ に対応) に z^0 からでる p の一般

化された半陪特性帯である (generalized semi-bicharacteristics) とは,

$$\begin{cases} (d/ds)z(s) \in \Gamma(p_{m\,z(s)}, \vartheta(z(s))^\sigma \cap \{X \in \mathbb{R}^{2n};\ |X| = 1\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{for } a.e.\ s \text{ with } \pm s \in [0, a_\pm), \\ z(0) = z^0 \end{cases}$$

を満たすときをいう. ここで $a_\pm > 0$ かつ σ はシンプレクティック形式を表す. すなわち $X = (\delta x, \delta\xi), Y = (\delta y, \delta\eta) \in T_z\Omega$ ($\simeq \mathbb{R}^{2n}$) に対して $\sigma(X, Y) = \delta y \cdot \delta\xi - \delta x \cdot \delta\eta$ である. $z \in \Omega$, $\Gamma \subset T_z\Omega$ に対して,

$$\Gamma^\sigma := \{X \in T_z\Omega;\ \sigma(X, Y) \geq 0 \text{ for } \forall Y \in \Gamma\}$$

と定義する. そのとき, 定理 3.2 より次の定理が得られる.

定理 3.3 ([4] の Theorem 4.3.8). $u \in \mathcal{C}(\Omega^0)$, $p(x, D)u = 0$ in $\mathcal{C}(\Omega^0)$, $z^0 \in \operatorname{supp} u$ とする. そのとき, $a \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$ と負の方向に z^0 からでる p の一般化された半陪特性帯 $\{z(s)\}_{s \in (a,0]}$ ($\subset \Omega$) が存在して

$$(x(s), \xi(s)/|\xi(s)|) \in \operatorname{supp} u \quad \text{for } s \in (a, 0],$$
$$\lim_{s \to a+0} z(s) \in \partial\Omega \quad \text{if } a > -\infty$$

を満たす. ここで曲線のパラメータ s は, 半陪特性帯に沿っての z^0 から $z(s)$ まで測った長さが $-s$ となるようにとられている. また $z(s) = (x(s), \xi(s))$ と表した.

参考文献

[1] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983.

[2] M. Kashiwara and T. Kawai, Micro-hyperbolic pseudodifferential operators I, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), 359–404.

[3] F. Treves, Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators I, Plenum Press, New York-London, 1980.

[4] S. Wakabayashi, Classical Microlocal Analysis in the Space of Hyperfunctions, Lecture Notes in Math. vol. 1737, Springer, 2000.

[5] S. Wakabayashi, Remarks on analytic hypoellipticity and local solvability in the space of hyperfunctions, to appear in J. Math. Sci. Univ. Tokyo **10** (2003).