

# 水平シア一流中での対流

九州大学・応用力学研究所 吉川 裕 (Yutaka Yoshikawa)

Research Institute for Applied mechanics, Kyushu University

京都大学大学院・理学研究科 秋友 和典 (Kazunori Akitomo)

Graduate School of Science, Kyoto University

## 1 はじめに

鉛直対流は背景流にシアがある場合、ロール状に組織化されることが知られている。例えば、背景流に鉛直シアがある場合、背景流に平行なロール状(以下平行ロール状対流と呼ぶ)に組織化されることが実験及び理論的に明らかにされている(Kuettner 1959, Asai 1970)。一方水平シアがある場合にも、対流は平行ロール状に組織化されることが理論的に指摘されていた(Davies-Jones 1971)。しかしながら、幾つかの数値実験(例えば Yoshikawa et al. 2001)によれば、背景流に水平シアがある場合、対流は背景流を斜交する方向のロール状に組織化される(以下斜交ロール状対流と呼ぶ)。このことは、背景流の水平シアが対流の水平構造に及ぼす影響は、必ずしも従来の知見だけで説明が尽きているわけではないことを示唆している。そこで本研究では、(1)背景流に水平シアがある場合対流は実際に斜交方向に組織化されるのか、(2)それはどのような条件で生じるのか、(3)その力学過程は何か、と言う問題を、数値実験及び線形解析から明らかにした。

## 2 モデルの基本設定

直交座標系で上下二つの水平板に挟まれた、拡散係数  $\kappa$ 、粘性係数  $\nu$  の非圧縮・ブシネスク流体を考える(図 1)。背景の密度・流速の基本場は時間変化しないと仮定し、以下のように与える。

$$\bar{u} = \bar{u}(y) = \Lambda y, \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}(z) = \Gamma z.$$

ここで  $\Lambda, \Gamma (> 0)$  は一定値とする。

支配方程式は、流体の深さ ( $D$ ) を長さのスケール、粘性時間 ( $D^2/\nu$ ) を時間 ( $t$ ) のスケール、上下の密度差 ( $\Gamma D$ ) を密度 ( $\rho$ ) のスケールとして無次元化した以下の式で与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \text{Re} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \text{Re} \mathbf{v} \hat{i} + \text{Ta}^{1/2} \hat{k} \times \mathbf{u} = -\nabla p - \text{Pr}^{-1} \text{Ra} \rho \hat{k} + \nabla^2 \mathbf{u} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \text{Re} \frac{\partial \rho}{\partial x} + w = \text{Pr}^{-1} \nabla^2 \rho \tag{3}$$

ここで  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  は無次元速度ベクトル、 $p$  は無次元圧力、 $\hat{i}$  及び  $\hat{k}$  はそれぞれ  $x$  及び  $z$  方向の単位ベクトルである。擾乱の時間発展を支配する無次元パラメータは

$$\begin{aligned} \text{Prandtl number: } Pr &= \frac{\nu}{\kappa}, \\ \text{Rayleigh number: } Ra &= \frac{g\Gamma D^4}{\rho_0 \kappa \nu}, \\ \text{Reynolds number: } Re &= \frac{\Lambda D^2}{\nu}, \\ \text{Taylor number: } Ta &= \frac{4\Omega^2 D^4}{\nu^2}, \end{aligned}$$

である ( $g$  は重力加速度)。以下では簡単のため  $Pr$  は 1.0 とする。上下の境界条件は、摩擦無し・密度一定 ( $=0$ ) とする。ただし異なる境界条件を用いても、ここで得られる結果の本質は変わらないことに注意しておく。

$$\partial u / \partial z = \partial v / \partial z = w = \rho = 0, \quad \text{at } z = -1, 0$$

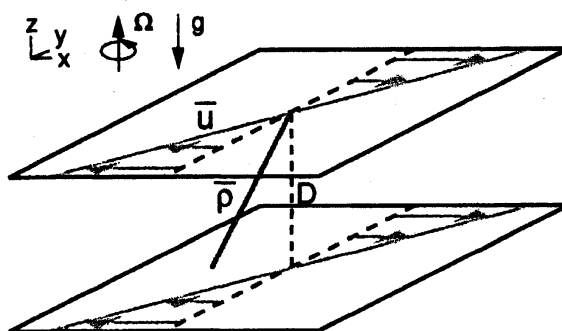


図 1: モデルの概略図

### 3 数値実験

ここでは、水平シアが実際に対流を斜交ロール状に組織化するか、するとすればそれはどのような条件かを明らかにするために数値実験を行う。数値実験では無限領域を扱うことはできないので、 $x$  方向には周期境界条件を  $x = \pm 5$  で与え、 $y$  方向には  $y = \pm 20$  の位置に背景流に平行な鉛直壁を設置した。アスペクト比を小さくしているため、鉛直壁の影響は内部領域では無視できる程に小さい。領域を  $128 \times 256 \times 8$  個の格子で分割し、支配方程式を 2 次精度の中央差分法で近似した。時間積分はカエル飛び法に松野法を組み合わせで行った。初期に密度擾乱 ( $\rho = 2 \times 10^{-5}$ ) をランダムに与え、対流が発生し有限振幅になるまで積分を行った。

### 3.1 非回転系 ( $Ra=5.2 \times 10^3, Ta=0$ )

図2は非回転系 ( $Ra=5.2 \times 10^3, Ta=0$ ) での結果である。水平シアーが弱い場合 ( $Re=1, 2.5$ , 図2a,b)、対流はセル状となり、水平シアーが強い場合 ( $Re=10$ , 図2c) には、対流は平行ロール状に組織化される結果となった。これらの構造は時間が経っても維持される。これらの結果は、非回転系においては水平シアーは平行ロール状に対流を組織化することを示しており、Davies-Jones (1971) の結果と一致する。

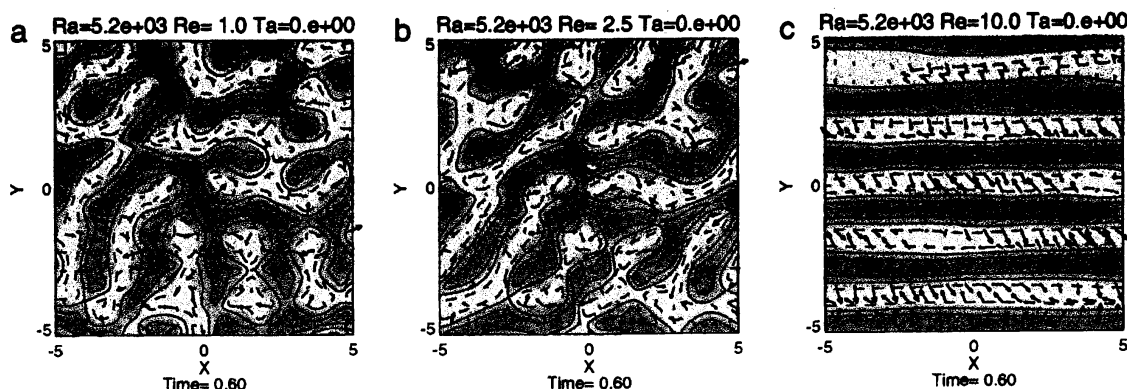


図2: 水平流速 (矢印)、鉛直流速 (印影)、密度 (実・破線) の水平断面図 (非回転系,  $t=0.6$ )。 (a)  $Re=1$ 、 (b)  $Re=2.5$ 、 (c)  $Re=10$ 。

### 3.2 回転系 ( $Ra=Ta=10^4$ )

図3は回転系 ( $Ra=Ta=10^4$ ) での結果 ( $t=0.6$ ) である。水平シアーが弱い場合 ( $Re=1$ , 図3a)、対流はセル状であり、また水平シアーが強い場合 ( $Re=10$ , 図3c) には、対流は平行ロール状に組織化され、非回転系の結果と同じである。しかしながら、水平シアーが中程度の時 ( $Re=2.5$ , 図3b) には、対流は斜交ロール状に組織化される結果となった。斜交ロールは背景流によって移流されているため、ロールが  $x$  軸となす角度は時間と共に変化しており、やがて ( $t \approx 0.72$ ) 斜交ロールはセル状の対流に崩壊した。この斜交ロール状対流は、Yoshikawa et al. (2001) の数値実験で再現されたものに対応する。

興味深い結果として、水平シアーが強い ( $Re=10$ ) 場合でも、始め対流はセル状であったが、いったん斜交ロール状になり、その後平行ロール状となり、有限振幅に達していた。様々な ( $RaReTa$ ) の組合せで行った実験においても、上述した回転・非回転系での振る舞いが確認された。これらの結果から対流の水平構造は、

1. 線形発展段階において、対流の水平構造は時間変化する

(a) 非回転系: セル状  $\rightarrow$  平行ロール状

(b) 回転系：セル状 → 斜交ロール状 → 平行ロール状

2. 変形の速さは  $Re$  の大きさに比例する

と予想できる。従って、有限振幅時の水平構造はシアーによる変型の時間と有限振幅に達するまでの時間で決まると予想される (図 4)。

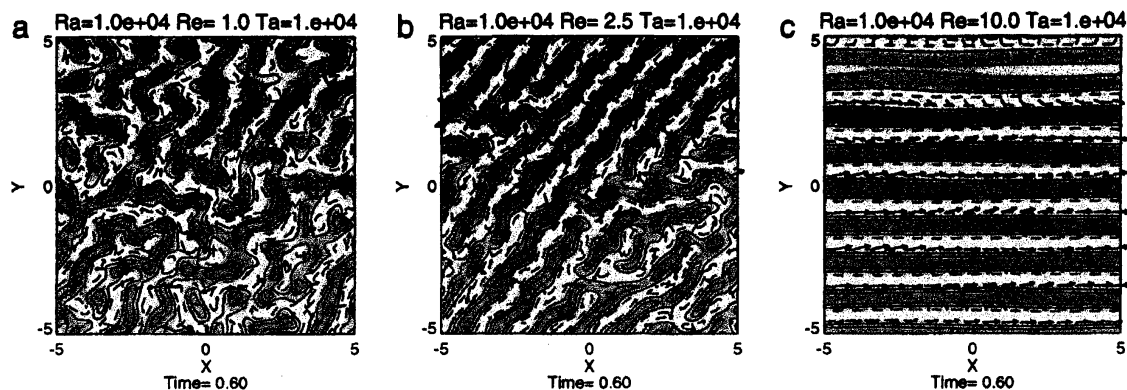


図 3: 図 2 と同じ。ただし回転系 ( $Ta=10^4$ )。

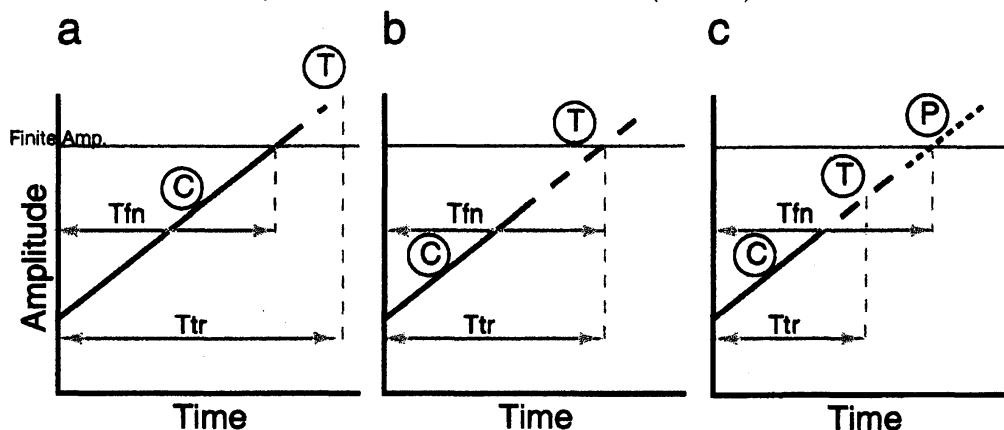


図 4: 対流の変形の時間変化の概念図 (回転系の場合)。横軸は時間、縦軸は振幅を表す。対流の振幅が時間とともに成長する間に、セル状、斜交ロール状、平行ロール状と変形する様子を、○記号に C、T、P の文字で表している。 $T_{fn}$  は有限振幅になるまでの時間。 $T_{tr}$  は斜交ロールに変形されるまでの時間。(a)  $Re = 1.0$ 。(b)  $Re = 2.5$ 。(c)  $Re = 10.0$ 。

## 4 線形解析

水平シアーによる斜交ロール状対流の形成には、セル状から斜交ロール状、そして平行ロール状へと水平構造が変型して行く重要であると予想されたが、その変型の機構は線形

の力学で説明できることが数値実験の結果を詳しく調べてみた結果わかった。そこでその水平構造変型の力学機構を詳しく理解するため、線形解析を行った。

#### 4.1 問題の定式化

ここでは水平シアーがもたらす効果のみに着目するため鉛直壁は取り除き、水平に無限に拡がった流体を考える。基本方程式を得るため(1)-(3)式を線形化し、 $\nabla \times \text{Eq.}(1)$ のy成分、 $\nabla \times \nabla \times \text{Eq.}(1)$ のy成分、及び $\nabla_z^2 \text{Eq.}(3)$  ( $\nabla_z^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ )の3式を用意する。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \text{Re}y \frac{\partial}{\partial x}\right) \eta - (\text{Ta}^{1/2} - \text{Re}) \frac{\partial v}{\partial z} = \text{Pr}^{-1} \text{Ra} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nabla^2 \eta, \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \text{Re}y \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 v + \text{Ta}^{1/2} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \text{Pr}^{-1} \text{Ra} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial z} + \nabla^4 v, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \text{Re}y \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla_z^2 \rho - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}\right) = \text{Pr}^{-1} \nabla^2 \nabla_z^2 \rho. \quad (6)$$

この3式は、渦度のy成分 $\eta (= \partial u/\partial z - \partial w/\partial x)$ 、 $v$ 、及び $\rho$ に対する閉じた方程式系をなす。上下の境界条件は以下のように表される。

$$\partial v/\partial z = \eta = \rho = 0 \quad \text{at } z = 0, -1,$$

従来の研究 (Davies-Jones 1971) では、擾乱は時間とともに指数関数的に成長するとし、解を $\phi = \Phi(y) \exp(i(kx + mz) + \sigma t)$ のようなモードで展開し、各モードの成長率からどのようなモードが卓越するかを論じていた。しかし、そのようなモード展開では、セル状から斜交ロール状、そして平行ロール状へと変型するトランジェントな様子を表現することはできない。そこで、ここでは数値実験の結果に基づいて、対流の水平構造が背景流とともに移流されるという、従来とは異なる以下のようなモード展開を用いた。

$$\begin{aligned} \eta(x, y, z, t) &= H_{kl}(t) \exp i(k(x - \text{Re}y t) + ly) \sin(\pi z), \\ v(x, y, z, t) &= V_{kl}(t) \exp i(k(x - \text{Re}y t) + ly) \cos(\pi z), \\ \rho(x, y, z, t) &= P_{kl}(t) \exp i(k(x - \text{Re}y t) + ly + \pi/2) \sin(\pi z), \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $H_{kl}(t)$ 、 $V_{kl}(t)$ 及び $P_{kl}(t)$ は渦度のy成分、流速のy成分、及び密度の振幅である。y方向の実際の波数は $l - k\text{Re}t (= \tilde{l}(t))$ で与えられる ( $k\text{Re} \neq 0$ の場合時間変化する) ことに注意が必要である。これによって、対流は平行モード ( $k=0$ ) と斜交モード ( $k>0$ ) に分類される。平行モードが斜交モードよりも卓越した場合は平行ロール状対流に対応し、斜交モードが平行モードよりも卓越した場合は斜交ロール状対流に対応する。両者に大きな差が無い場合、セル状対流に対応する。

(7)式を(4)-(6)式に代入すると、 $H_{kl}(t)$ 、 $V_{kl}(t)$ 及び $P_{kl}(t)$ の時間に対する常微分方程式が

待られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} H_{kl}(t) \\ V_{kl}(t) \\ P_{kl}(t) \end{pmatrix} = A_{kl}(t) \begin{pmatrix} H_{kl}(t) \\ V_{kl}(t) \\ P_{kl}(t) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$A_{kl}(t) = \begin{pmatrix} -(a_{kl}(t)^2 + \pi^2) & -\pi(Ta^{1/2} - Re) & -kPr^{-1}Ra \\ \frac{\pi}{a_{kl}(t)^2 + \pi^2} Ta^{1/2} & \frac{2k\bar{l}(t)}{a_{kl}(t)^2 + \pi^2} Re - (a_{kl}(t)^2 + \pi^2) & \frac{\pi\bar{l}(t)}{a_{kl}(t)^2 + \pi^2} Pr^{-1}Ra \\ -\frac{k}{b^2} & \frac{\pi\bar{l}(t)}{b^2} & -(a_{kl}(t)^2 + \pi^2)Pr^{-1} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

ここで  $a_{kl}(t)^2 = k^2 + \bar{l}(t)^2$ 、 $b^2 = k^2 + \pi^2$ 。上式を時間積分すれば各モードの振幅の時間発展が求まる。 $H_{kl}, V_{kl}, P_{kl}$ の初期値には、 $A_{kl}(0)$ を固有値解析して得られた最大成長率をもつ固有ベクトルを用いた。

## 4.2 各モードの振幅の時間発展

### 4.2.1 非回転系 ( $Ra=5.2 \times 10^3, Ta=0$ )

$Re=0$ の場合には  $P_{kl}(t)$ は常に  $a_{kl} = 3.50$ に最大値を持つ対称的な分布をするが、 $Re=2.5$ の場合(図5)には、 $P_{kl}(t)$ の分布の対称性は時間と共に崩れて行く。始め( $t=0.2$ ) $P_{kl}(t)$ は  $Re=0$ とほぼ同様に対称的な分布をしているが(図5a)、 $t=0.6$ になると  $P_{kl}(t)$ は  $(k, l) = (3.13, 2.13)$ (斜交モード)及び  $(k, l) = (0, \pm 3.50)$ (平行モード)で極大をとるような分布となる(図5b)。さらに時間が経って  $t=1.0$ になると、斜交モードは減衰し平行モードのみが成長を続ける(図5c)。

以上の時間発展は、数値実験の結果から考えられた線形発展段階における対流の水平構造の時間変化と一致する。すなわち、始め( $t \simeq 0.2$ )は斜交モードと平行モードの振幅に大きな違いは見られず、従って対流は物理空間ではセル状となる。 $t \simeq 0.6$ には、 $P_{kl}(t)$ には斜交モードと平行モードの二つの極大が見られるが、両モードの振幅に大きな違いは見られず、従って対流はセル状となる。しかし時間が経つと平行モードのみが卓越するため、対流は平行ロール状となる。

### 4.2.2 回転系 ( $Ra=Ta=10^4$ )

非回転系と同様、 $Re=0$ の場合には  $P_{kl}(t)$ は常に  $a_{kl} = 5.25$ に最大値を持つ対称的な分布をするが、 $Re=2.5$ の場合(図6)には、 $P_{kl}(t)$ の分布の対称性は時間と共に崩れて行く。始め( $t=0.2$ ) $P_{kl}(t)$ は  $Re=0$ の場合と同様ほぼ対称的な分布を示すが(図6a)、 $t=0.6$ では  $(k, l) = (4.75, 3.63)$ (斜交モード)と  $(k, l) = (0, \pm 5.25)$ (平行モード)で極大をとり(図6b)、さらに時間が経つと( $t=1.0$ )斜交モードは減衰し平行モードのみが成長を続ける(図6c)。

以上の結果は非回転系と同様であるが、大きく異なる点は斜交モードの振幅が平行モー

ドのそれよりも  $t=0.6$  付近で大きく (20.1%) なることである。従って、数値実験で見られたように (図 3b)、このときに斜交ロール状対流が発生する。

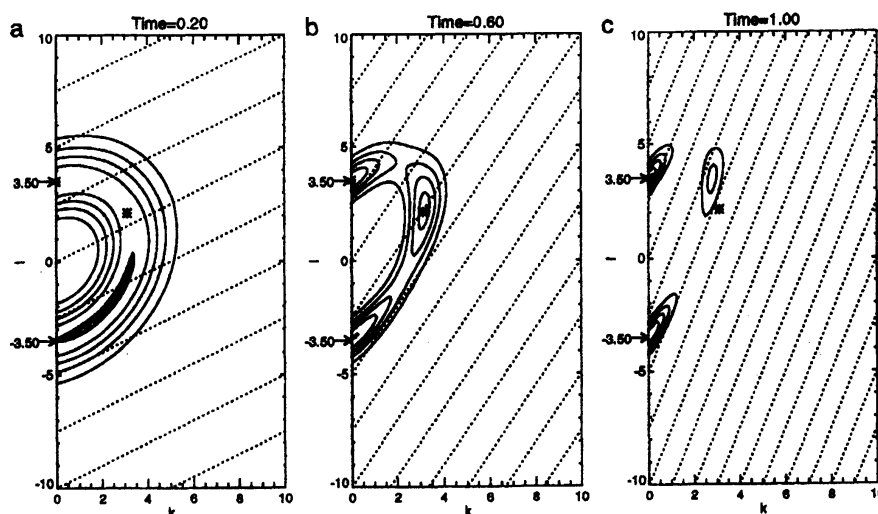


図 5: 非回転系における  $P_k(t)$  の時間発展 ( $Re=2.5$ )。 (a)  $t=0.2$ 、 (b)  $t=0.6$ 、 (c)  $t=1.0$ 。 横軸は  $l$ 、 縦軸は  $k$ 。  $x$  方向の実際の波数  $\tilde{l}$  は破線で表されている。  $k=0$  における  $P_k(t)$  の最大値よりも大きい領域はハッチで示してある。

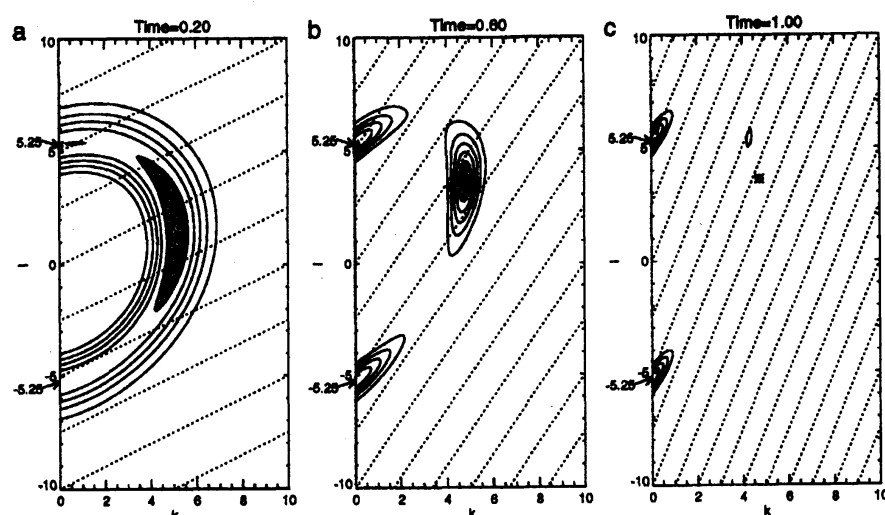


図 6: 図 5 と同じ。ただし回転系 ( $Ta=10^4$ )。

### 4.3 斜交ロール状対流発生機構

各モードの  $P_k(t)$  の時間変化を理解するため、 $P_k(t)$  の成長率と  $A_k(t)$  を各時刻で固有値解析して得られる各時刻での最大固有値を調べた。図 7 の実線は最大であった斜交モードの成長率を示し、破線は最大固有値を示している。点線は平行モードの成長率であり、

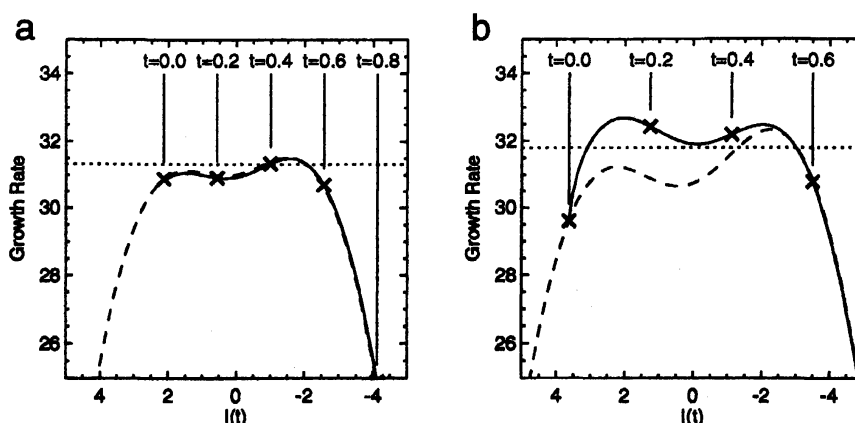


図 7: (7) 式で表される斜交モードの成長率 (実線)、それに対応する固有モードの成長率 (破線)、平行モードの成長率 (点線)。 (a) 非回転系。  $(k, l) = (3.13, 2.13)$  の斜交モードを示す。 (b) 回転系。  $(k, l) = (4.75, 3.63)$  の斜交モードを示す。横軸は  $l(t)$ 。時刻は図の上部に数字で示してある。

時間変化しない (最大固有値と一致する)。この最大固有値には、水平シアーに起因するレイノルズストレスの効果や波長の時間変化の効果が陽に含まれている。

最大固有値 (斜線) で見た場合、回転・非回転系で質的な違いはなく、ともにレイノルズ応力や波数の時間変化に起因して、水平シアー流中では斜交モードの方が平行モードよりも「一時的に」成長が加速される傾向にあることがわかった。ただしその期間はわずかであるため、全体として見ればその効果は小さい。

しかし実際の成長率 (実線) と最大固有値 (斜線) を比較すると、非回転系の場合 (図 7a) には、両者に大きな違いは見られなかったが、回転系の場合 (図 7b) には、実際の成長率が最大固有値より大きくなっていった。この違いが非回転系と回転系との違い、即ち斜交モードが卓越する機構を表している。

この違いは以下のように説明される (図 8)。斜交ロールは水平シアーによって時々刻々と剪断されるため、実際の斜交モードと最大固有値を持つ固有モードとはズレが生じる。非回転系ではこのズレは小さいが、回転系では、コリオリ力によって水平流速が右に転向しているため、ズレはロールの水平収束・発散を強化する結果となる。その結果、鉛直流も強化され位置エネルギーの開放が促進される。したがって、斜交モードの成長率は固有モードの成長率より大きくなり、斜交モードが平行モードよりも大きく卓越する結果となる。

## 5 おわりに

水平シアー流中に発生する対流の数値実験及び、水平構造を線形解析により調べた。その結果、回転系の場合コリオリ力が位置エネルギーの解放を促進する作用を働かせるため、斜交ロール状対流が一時的に発生することがわかった。従って自転速度の速い木星大



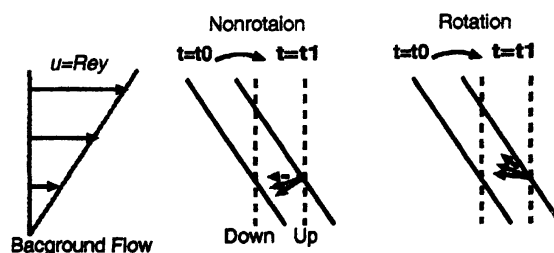


図 8: 斜交モードの時間変化と各時刻での最大固有値を持つ固有モードとの関係。二本の平行な線は斜交ロール対流における上昇・下降流域を、矢印は上面 ( $z=0$ ) での水平流速ベクトルを表す。斜交ロールが  $t=t_0$  から  $t=t_1 > t_0$  まで、水平シアーによって剪断された場合、固有モードから得られる流速ベクトル (破線矢印) はそれに応じて時計回りに向きを変えるが、実際の流速ベクトル (灰色) は剪断に完全には応答しない。従って、斜交モードと固有モードにズレが生じる。(a) 非回転系。ロールの水平収束・発散が弱まる。(b) 回転系。ロールの水平収束・発散が強まる。

気に見られる横断方向に組織化された対流ロール (Hathaway and Sommerville 1987) は、上述のような水平シアーの影響である可能性が指摘される。

## 参考文献

- Asai, T. , Three dimensional features of thermal convection in a pale Couette flow, *J. Met. Soc. Jpn.*, 48, 18-129, 1970.
- Davies-Jones, R. , Thermal convection in a horizontal plane Couette flow, *J. Fluid Mech.*, 49, 193-205, 1971.
- Hathaway, R.C. and J. Sommerville , Thermal convection in a rotating shear flow, *J. Fluid Mech.*, 38, 43-68, 1987.
- Kuettner, J. , The band structure of the atmosphere, *Tellus*, 11, 267-294, 1959.
- Yoshikawa, Y., K. Akitomo, and T. Awaji , Formation process of intermediate water in baroclinic current under cooling, *J. Geophys. Res.*, 106, 1033-1052, 2001.