数理解析研究所講究録 1339 巻 2003 年 120-128

回転系における一様成層一様剪流の安定性および乱流状態に関する考察

九州大学・応用力学研究所　増田　章 (Masuda Akira)
九州大学・応用力学研究所　吉川　裕 (Yoshikawa Yutaka)
Research Institute for Applied Mechanics,
Kyushu University

回転系の剪断乱流に関する二つの主題を論じる．最初に，一様成層・一様剪断流という基本場における微小擾乱の線形発展問題を回転系で定式化する．安定成層でも不安定成層でも良いし水平剪断でも鉛直剪断でも良い．慣性不安定，水平剪断流を含む熱対流といった現象を対象とする．この定式化で得られる解を基にすれば，初期エネルギーが一定の擾乱の中で，指定した時刻に最大のエネルギーをもつような擾乱を決定するといった議論も可能になる．次に，回転系剪断乱流において絶対渦度零の平均剪断流が発生する理由を考察する．その基礎は密度成層流体との相似性にある．流下方向に一様な二次元流では，密度一様な回転系が密度成層系と完全に対応することが知られている．乱流だと流下方向に一様でない「乱れ」があるのでこの議論はそのままでは成り立たない．しかし流下方向に平均した量に議論を限ればやはり同じであることがわかる．この議論と熱対流の振舞を基にして，回転系で絶対渦度零の平均剪断流が発生する理由を定性的・直感的に理解できることを論じる．実際，回転系と密度成層系で異なり得る乱流輸送項を (中身の曖昧な) 不規則揺動項として加える数値実験を行ったが，やはり中立密度成層 (すなわち絶対渦度零の平均剪断流) が形成されることを確かめることができた．すなわち，回転系と成層系の差から生じる乱流輸送項に多少の差異があろうと，絶対渦度零の平均剪断流の形成・維持を阻害することはないということである．

1　はじめに

慣性系の常識からすると思いもかけないような流れが回転系にはよくある．Johnston et al. (1972)[1] による水槽実験はその良い例であろう．乱流ポアズィユ流 (水路流) が回転系でどうなるかを観察すると様子が非回転系とは全く異なっていた．水路を仕切る二つの壁面のうち片方 (系固有の渦度すなわち「惑星」渦度と平均流の渦度とが逆になる側，プレッシャー側とも言う) の壁近くで，テイラー・ゲルトラー不安定渦らしきものが見られた．もう一方の壁付近では流れの変動が小さく安定のように見えた．奇妙なことに，水路中央部からプレッシャー側の壁近くにかけて絶対渦度がほぼ零の平均剪断流 (一様剪断流) 領域ができていた．クエット流に関する似たような数値実験もある (Bech et al. 1997)[2]．この場合，平均剪断流の渦度が「惑星」渦度と逆になるようにしておくと，やはり平均剪断流の様子が非回転の場合と大きく異なる．二つの壁面近くには流速の急変する境界層ができるし，水路中央部では，絶対渦度がほぼ零の平均剪断流 (惑星渦度が若干勝る) 領域ができる．おまけに，絶対渦度が零の平均剪断流の中には，剪断流に流されるよう

に傾いた縦渦 (coherent vortices) が観測されている．Yanase et al. 2002[3] によれば，この組織渦を発生させ維持するのは系の回転と剪断流に関係する非線形の仕組みらしい．

また Yoshikawa and Akitomo (2003)[4] が行った水平剪断流中の鉛直対流の数値実験でも奇妙な現象が見られた．非回転系では流れに平行なロール状対流が発生した．これは従来の研究で指摘されてきたことと一致する．しかし，回転系においては流れに斜交するロール状対流が (一時的に) 現れることが観察された．彼らは，斜交ロールの発生には剪断流が本質的に重要であることを線形安定性解析 (Rapid Distortion 風の議論) により明らかにしている．

上に上げた二つの例はいずれも回転系剪断流における現象である．とくに不思議なのは絶対渦度がほぼ零になるような平均剪断流が自発的に形成されてくることである．この状態に落ち着く仕組み・これを維持する仕組みは何だろうか．またその最終状態を予測できるだろうか．その絶対渦度零の平均剪断流の中に存在する組織渦 (縦渦) を形成・維持する仕組みは何だろうか．容易ではないだろうが理解できるところから始めよう．そのために力学イメージを膨らませ，とくに密度成層流体と回転流体との類推を基に進める所まで進もう．また不安定問題はどこまで進んでいるのだろうか．非線形性が本質的という議論もあるが線形論でどこまで行けるだろうか．とりあえず，一様回転・一様剪断・一様成層の無限媒質の線形論を構成しておこう．可能なら定常状態 (絶対渦度零の平均剪断流) の問題もできるだけ並行して考察したい．以上が本研究を始める動機であり目的であった．まだ萌芽的段階 (誤りがあるかもしれない) に過ぎないが，考え方とこれまでに分かってきたことを簡単にまとめておく．

2 無限領域における一様回転・一様成層・一様剪断流の線形発展問題

最初に，一様回転・一様成層・一様剪断という基本場における微小擾乱の線形発展を，一般初期値問題とその解という形に定式化できることを示す．詳細は省略し要点のみを述べる．

設定は以下のとおりである．(x,y) を水平座標，z を鉛直上向き座標，$\boldsymbol{u}=(u,v,w)$ を対応する向きの流れ，t を時刻，$\overline{\bullet}$ を $\bullet$ の平均場とする．系は z 軸の周りに一様に回転しており $\boldsymbol{f}=(0,0,f)=\mathrm{const}$ がコリオリ係数である．また重力加速度を $\boldsymbol{g}=(0,0,-g)=\mathrm{const}$ で表す．基本流 U は一方向 (x 方向) を向いた水平流で一様な剪断をもつ．すなわち以下の条件を充たす．

$$U \equiv \overline{u}, \qquad \overline{v}=\overline{w}=0, \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial y} = S = \mathrm{const} \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} = T = \mathrm{const} \end{cases}$$

微小な密度変化を有する Boussinesq 流体とし，

$$\text{浮力}: \ b \equiv -g\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}, \quad B \equiv \overline{b}, \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial y} = S_b = \mathrm{const} \\ \dfrac{\partial B}{\partial z} = T_b = \mathrm{const} \end{cases}$$

なる基本成層場を考える．ただし，ρ は密度，ρ_0 は基準密度で，S_b と T との間には

$$0 = S_b + fT$$

なる温度風の関係が成りたたねばならない．

基礎方程式系は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}\times\boldsymbol{u} = -\dfrac{\nabla p}{\rho_0} + b\hat{\boldsymbol{g}} + \nu\nabla^2\boldsymbol{u}, \qquad \hat{\boldsymbol{g}} \equiv (0,0,1) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla b = \dfrac{\nu}{Pr}\nabla^2 b \end{cases}$$

である．p は圧力，ν は粘性係数，Pr はプラントル数とする．$\boldsymbol{\omega}$ を渦度として，渦度方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\omega} - ((\boldsymbol{f}+\boldsymbol{\omega})\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} - \nabla b\times\hat{\boldsymbol{g}} = \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}$$

となる．非圧縮条件を用いれば u, w, ω_x, ω_z を v, ω_y の二つで表現することができて

$$\begin{aligned} -\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u &= -\frac{\partial\omega_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \\ -\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w &= +\frac{\partial\omega_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} \\ -\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\omega_z &= -\nabla^2\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\omega_y}{\partial z} \\ -\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\omega_x &= +\nabla^2\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\omega_y}{\partial x} \end{aligned}$$

を得る．

以下では，線形擾乱のみを扱うこととし，平均場を大文字で，それからのずれを小文字で表すことにする．初期擾乱場を (x,y,z) 方向にフーリエ分解する．初期波数を $\boldsymbol{k}=(k,l,n)$ とし，その後の波数 $\tilde{\boldsymbol{k}}(t)=(\tilde{k}(t),\tilde{l}(t),\tilde{n}(t))$ が剪断流のために時刻に依存する (Rapid Distortion) ものとすれば，各初期波数に対応する初期擾乱の線形発展を簡単に記述できる (Yoshikawa and Akitomo[4])．$U(y,z,t)=Sy+Tz$ なる一様剪断流に対しては

$$\begin{aligned} &X \equiv \int_0^t U(y,z,t)\,dt = (Sy+Tz)t \quad \text{として} \\ &\tilde{k}(t) = \text{const} = k \\ &\tilde{l}(t) = l - Stk, \qquad S = \frac{\partial U}{\partial y} = \text{const} \\ &\tilde{n}(t) = n - Ttk, \qquad T = \frac{\partial U}{\partial z} = \text{const} \end{aligned}$$

とする．これを用いると，物理量 $\bullet$ の初期波数 (k,l,n) をもつフーリエ成分 $\hat{\bullet}$ の時間発展を

$$\bullet(x,y,z,t;k,l,n) \;=\; \hat{\bullet}(t;k,l,n)e^{\sqrt{-1}(k(x-X(y,z,t))+ly+nt)}$$

と (初期波数で決まる) 成分に分解できる．

各 (初期波数) フーリエ成分に対し，

$$\begin{aligned} &c(t) \equiv k^2 + \tilde{l}^2(t) + \tilde{n}^2(t) \\ &k(x-X(y,z,t)) + ly + nt = kx + (l-Stk)y + (n-Ttk)z = kx + \tilde{l}(t)y + \tilde{n}(t)z \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial\bullet}{\partial t} &=& \left[\dfrac{d\hat{\bullet}}{dt}-\sqrt{-1}U(y,z,t)\hat{\bullet}\right]\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(k(x-X(y,z,t))+ly+nt)}\\ \dfrac{\partial\bullet}{\partial x} &=& \sqrt{-1}k\hat{\bullet}\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(k(x-X(y,z,t))+ly+nt)}\\ \dfrac{\partial\bullet}{\partial y} &=& \sqrt{-1}\tilde{l}(t)\hat{\bullet}\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(k(x-X(y,z,t))+ly+nt)}\\ \dfrac{\partial\bullet}{\partial z} &=& \sqrt{-1}\tilde{n}(t)\hat{\bullet}\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(k(x-X(x,z,t))+ly+nt)}\end{array}\right.$$

なる関係が成り立つ．これを用いて

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\bullet &= \frac{d\hat{\bullet}}{dt}\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(k(x-X(y,z,t))+ly+nt)}\\ \nabla^2\bullet &= -c(t)\;\hat{\bullet}\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(k(x-X(y,z,t))+ly+nt)}\\ -\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\bullet &= c(t)\left(\frac{1}{c(t)}\frac{dc}{dt}\hat{\bullet}+\frac{d\hat{\bullet}}{dt}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(k(x-X(y,z,t))+ly+nt)}\end{aligned}$$

といった関係式を得る．今 $\boldsymbol{U}=(U,0,0)$, $\nabla U=\mathrm{const},\nabla B=\mathrm{const}$ なので渦度方程式は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\omega}-((\boldsymbol{f}+\boldsymbol{\Omega})\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}-\nabla b'\times\hat{\boldsymbol{g}}=\nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}$$

と書ける．ただし $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\omega}$ は基本場と擾乱の渦度を表す．

また，渦度方程式の回転の y 成分をとれば

$$\nu\nabla^4 v = \left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla\right]\nabla^2 v+f\frac{\partial\omega_y}{\partial z}-\Omega_y\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial x}-\frac{\partial\omega_z}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial z}$$

となる．これを渦度方程式，浮力方程式と組み合わせれば線形方程式系

$$\begin{aligned}\nu\nabla^2\omega_y &= \left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla\right)\omega_y-((\boldsymbol{f}+\boldsymbol{\Omega})\cdot\nabla)\,v+\frac{\partial b}{\partial x}\\ \nu\nabla^4 v &= \left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla\right]\nabla^2 v+f\frac{\partial\omega_y}{\partial z}+\Omega_y\frac{(k^2-\tilde{n}^2)}{k^2+\tilde{n}^2}\frac{\partial\omega_y}{\partial y}-\Omega_y\frac{2k^2k\tilde{n}}{k^2+\tilde{n}^2}v+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial z}\\ \frac{\nu}{Pr}\nabla^2 b &= \left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla\right)b+S_b v+\frac{T_b k}{k^2+\tilde{n}^2}(\sqrt{-1}\omega_y)-\frac{T_b\tilde{n}\tilde{l}}{k^2+\tilde{n}^2}v\end{aligned}$$

を得，ω_y, v, b で方程式系が閉じていることが分かる．

以上を行列の形でまとめて書けば，各初期波数成分ごとに

$$\left[\frac{d}{dt}+\nu c(t)\right]\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\hat{\omega}_y\\ \hat{v}\\ \hat{b}\end{pmatrix}=A(t)\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\hat{\omega}_y\\ \hat{v}\\ \hat{b}\end{pmatrix}$$

$$A(t)\equiv\begin{pmatrix}0 & -(f-S)\tilde{n}(t)-T\tilde{l}(t) & k\\ \dfrac{\tilde{n}(t)f}{c(t)}+T\dfrac{(k^2-\tilde{n}^2(t))\tilde{l}(t)}{(k^2+\tilde{n}^2(t))c(t)} & -\dfrac{\dot{c}(t)}{c(t)}-T\dfrac{2k\tilde{n}(t)}{k^2+\tilde{n}^2(t)} & -\dfrac{\tilde{l}(t)\tilde{n}(t)}{c(t)}\\ -\dfrac{k}{k^2+\tilde{n}^2(t)}T_b & -S_b+T_b\dfrac{\tilde{n}(t)\tilde{l}(t)}{k^2+\tilde{n}^2(t)} & -\dfrac{Pr-1}{Pr}c(t)\end{pmatrix}$$

が求める方程式になる．ここにドット記号˙は，時刻に関する微分を表す．

この定式化は，$S_b \sim Ra \equiv$ Rayleigh 数 の正負を問わない．すなわち安定成層でも不安定成層でも良い．水平剪断でも鉛直剪断でも良いし両方が混在していても良い．指数的に増幅するような解だけでなく代数的に変化する解を含む．ただし無限に広がった流体を仮定する．剪断の向きにも依存するが有限幅でも良い場合がある．

また S, T, S_b, T_b, f を変えると，慣性不安定・対称安定・水平剪断流を含む熱対流といった広範な現象を扱える．例えば $T=0$, $S_b<0$, $T_b=0$ とすれば，Yoshikawa and Akitomo[4] の調べた熱対流の問題を表現する．次節で論じる絶対渦度零の剪断流における擾乱という状況 (Yanase et al. [3]) なら $S=f$, $T=0$, $S_b=T_b=0$ と置けば良い．後者はとくに簡単で

$$\left[\frac{d}{dt}+\nu c(t)\right]\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\hat{\omega}_y\\ \hat{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ \dfrac{fn}{c(t)} & -\dfrac{\dot{c}}{c(t)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\hat{\omega}_y\\ \hat{v}\end{pmatrix}$$

となり，その解は直ちに

$$\sqrt{-1}\hat{\omega}_y(t)=\sqrt{-1}\hat{\omega}_y(0)\mathrm{e}^{-\nu\int_0^t c(\tau)\,d\tau}$$
$$\hat{v}(t)=\frac{c(0)\hat{v}(0)+fn\sqrt{-1}\hat{\omega}_y(0)t}{c(t)}\mathrm{e}^{-\nu\int_0^t c(\tau)\,d\tau}$$

と表せる．$c(t)=k^2+(l-Stk)^2+n^2$ と変化することを考えると，初期波数を指定したモードの擾乱は，必ずしも単調に減衰するものではなく，増幅段階が見られることもある．

この定式化で得られるような解を基にすれば，初期エネルギーが一定の擾乱の中で，指定した時刻に最大のエネルギーをもつような擾乱を決定するといった議論も可能になるであろう．ここでは定式化のみとし具体的な応用は次の機会とする．

3 絶対渦度零の平均剪断流を維持する仕組み

絶対渦度零の平均剪断流とは，惑星渦度 f と平均剪断流による相対渦度 Ω_z の和が相殺し

$$f-\frac{\partial U}{\partial y}=0$$

となるような平均流のことである．最初に述べたように，密度一様な回転系剪断乱流では，絶対渦度がほぼ零となる領域が自発的に形成されてくることが知られている．非回転系には見られないこのような流れがどのようにして維持されるのかその仕組みを直感で理解できるようにしたい．

実際，これまでにもその理由を解明しようとする研究が行われてきた．多くは，よく知られているように密度成層流体と回転流体の類似性に関係する．古くは，Bradshaw (1969)[5] が曲率をもつ流れと密度成層流との相似性を詳しく調べ回転系とも似ていることにも言及している．ただし密度一様な回転系が密度成層系と完全に相似であるためには流下方向に流れが一様な二次元流でなければならない．しかし乱流剪断流は，流下方向に流れは一様ではなく二次元流ではないので，そのままではこの相似性の議論を適用できない．理解を深めるため，回転流体と成層流体との相似性を確認するところから考察を始めよう．

Boussinesq 流体とするが，この節では浮力 b でなく $s \equiv -b$ を用いて相似性を見やすくする．また，$S \equiv -\bar{b}$ は剪断でなく，平均の "$-$ 浮力"を表す．なお，値は 1 であるが，$g^* = 1$ を重力の効きを表すために残しておく．流下方向には一様とすると線形の場合なら

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = fv - \dfrac{dU}{dy}v = -\left(\dfrac{dU}{dy} - f\right)v \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -fu - \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial z} \\ 0 = \nabla\cdot\boldsymbol{u} = \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial t} = -\dfrac{dS}{dz}w \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = -(g^*)s - \dfrac{\partial p}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ 0 = \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

となる．左側が回転系 (密度一様)，右側が密度成層系である．非線形でも全く同様で，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\left(\dfrac{dU}{dy} - f\right)v \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} = -fu - \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + v\dfrac{\partial w}{\partial z} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{\partial p}{\partial z} \\ 0 = \nabla\cdot\boldsymbol{u} = \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial t} + v\dfrac{\partial s}{\partial y} + w\dfrac{\partial s}{\partial z} = -\dfrac{dS}{dz}w \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = -g^*s - \dfrac{\partial p}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ 0 = \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

となる．

$$\begin{cases} u \leftrightarrow s & \dfrac{dU}{dy} - f \leftrightarrow \dfrac{dS}{dz} \\ v \leftrightarrow w, \quad y \leftrightarrow z, & f \leftrightarrow g^*(=1) \\ w \leftrightarrow v, \quad z \leftrightarrow y & \end{cases}$$

という対応関係で，回転系と密度成層系が完全に相似になる．

この相似関係からはいろいろなことが分かる．例えば，$dU/dy - f > 0 \to dS/dz > 0$ の場合，回転系では慣性不安定 (遠心力による不安定) が生じ，密度成層系では熱対流が生じる．運動形態としては流下方向に軸を持つ縦渦である．回転系における u が s に対応すること，y 座標と z 軸が入れ替わることにも注意が必要である．

上に述べたことは以前から良く知られていたことである．ただし以上は流下方向に一様な場合の話である．最近 Tanaka et al. (2000)[6] は，この相似性を基に二次元性を仮定した上で，絶対渦度零の剪断流が形成されてくる過程を数値実験で調べ，中立密度成層との関係も論じている．しかし，乱流は流下方向に一様でない運動を含むので，ここに述べた厳密な対応関係は崩れる．

にも拘わらず別種の対応が成り立つことを示すことができる．それには流下方向に平均した場について対応関係を見れば良い．基本場 U，流下方向に平均した場 $\overline{u}$，それからのずれ u' といった具合に分けよう．実は，$U + \overline{u}$ を $\overline{u}$ と書いても同じで，区別できないけれども，対応を分かりやすくするため U を残すことにする．この場合，$0 = -fU - d\check{P}/dy$ なる圧力勾配が陰に入るが，

力学には無関係である．このとき，回転系では

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{v}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial z} = -\dfrac{\partial P}{\partial x} - \left(\dfrac{dU}{dy} - f\right)\overline{v} - \dfrac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \dfrac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \overline{v}\dfrac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \overline{w}\dfrac{\partial \overline{v}}{\partial z} = -f\overline{u} - \dfrac{\partial \overline{p}}{\partial y} - \dfrac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} - \dfrac{\partial \overline{v'w}}{\partial z} = -f\overline{m} - \dfrac{\partial \overline{p}}{\partial y} - \dfrac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} - \dfrac{\partial \overline{v'w}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial t} + \overline{v}\dfrac{\partial \overline{w}}{\partial y} + \overline{w}\dfrac{\partial \overline{w}}{\partial z} = -\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial z} - \dfrac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} - \dfrac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \\ 0 = \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial z} \end{cases}$$

となる．ここでは $0 < -\partial P/\partial x =$ 所与 を残している．Johnston[1] らの水槽実験 (乱流水路流) のような場合，流下方向に一様なのは圧力ではなくその向きの圧力勾配である．そのためこの項が必要である．一方，密度成層系なら

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{s}}{\partial t} + \overline{v}\dfrac{\partial \overline{s}}{\partial y} + \overline{w}\dfrac{\partial \overline{s}}{\partial z} = -\dfrac{dS}{dz}\overline{w} - \dfrac{\partial \overline{s'v'}}{\partial y} - \dfrac{\partial \overline{s'w'}}{\partial z} + Q \\ \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial t} + \overline{v}\dfrac{\partial \overline{w}}{\partial y} + \overline{w}\dfrac{\partial \overline{w}}{\partial z} = -g^*\overline{s} - \dfrac{\partial \overline{p}}{\partial z} - \dfrac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} - \dfrac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \overline{v}\dfrac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \overline{w}\dfrac{\partial \overline{w}}{\partial z} = -\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial y} - \dfrac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} - \dfrac{\partial \overline{v'w}}{\partial w} \\ * \ \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{v}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial z} = -\dfrac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \dfrac{\partial \overline{u'w}}{\partial w} \\ 0 = \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial z} \end{cases}$$

となる．$\overline{u}$ についての式も併記しているが，他の x-平均変量と直接の関係はない (乱流項を経由する関係は考えられる)．ここで，重要なのは Q の項であり

$$-\frac{\partial P}{\partial x} \quad \leftrightarrow Q$$

なる対応がある．例えば内部冷却の場合 $0 < Q =$ 所与 とする．x-平均流についてみれば，水路流 (ポアズィユ流) の場合の流下方向に加速する圧力勾配は，成層系では密度を重くして対流を内部から発生させるような働きをするものだということである．また，この項は回転系で見て $y < 0$ の側 (成層系で見て下側) の向きの所謂プレッシャー側に向かって落ちてくる対流を引き起こす．逆に $y > 0$ の側 (成層系で見て上側) には安定成層を作り出す作用がある．

この式を見れば，乱流輸送項まで含めて各項が完全に対応することが分かる．ただし乱流変動項の大きさや傾向は違っているかもしれない．乱流場では割合普通の近似をすれば、回転系における帯状平均流の方程式が

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{v}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial z} = -\left(\dfrac{dU}{dy} - f\right)\overline{v} - \dfrac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \overline{v}\dfrac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \overline{w}\dfrac{\partial \overline{v}}{\partial z} = -f\overline{u} - \dfrac{\partial \overline{p}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial t} + \overline{v}\dfrac{\partial \overline{w}}{\partial y} + \overline{w}\dfrac{\partial \overline{w}}{\partial z} = -\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial z} \\ 0 = \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial z} \end{cases}$$

と書けるし，密度成層系なら

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\overline{s}}{\partial t}+\overline{v}\dfrac{\partial\overline{s}}{\partial y}+\overline{w}\dfrac{\partial\overline{s}}{\partial z}=-\dfrac{dS}{dz}\overline{w}-\dfrac{\partial\overline{s'w'}}{\partial z}+Q \\
\dfrac{\partial\overline{w}}{\partial t}+\overline{v}\dfrac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\overline{w}\dfrac{\partial\overline{w}}{\partial z}=-g^*\overline{s}-\dfrac{\partial\overline{p}}{\partial z} \\
\dfrac{\partial\overline{v}}{\partial t}+\overline{v}\dfrac{\partial\overline{v}}{\partial y}+\overline{w}\dfrac{\partial\overline{w}}{\partial z}=-\dfrac{\partial\overline{p}}{\partial y} \\
0=\dfrac{\partial\overline{v}}{\partial y}+\dfrac{\partial\overline{w}}{\partial z}
\end{cases}
$$

となる．繰り返しになるが強調しておきたいのは，流下方向に平均した量に議論を限れば回転系と成層系が同じ型の方程式を満たし，付随して出てくる乱流輸送量も同じ形を持つことである．

ただし現象が全く同じということを言っているわけではないはない．乱流項の様子が違ってもよいからである．二次相関の方程式からは，例えば流下方向圧力勾配の変動が，いわば密度の「対生成」を引き起こすことが分る．当然ながら完全な相似性を期待することはできない．乱流輸送項の実態は回転系と成層系で異なり得るのである．しかし，歩を進めて，乱流輸送項の違いが絶対渦度零の平均剪断流領域の形成・維持という特性にどれほど効くかという問題を考えてみよう．回転系についての直感は働きにくいので密度成層系を基にする．

絶対渦度零の平均剪断流領域の形成・維持とは中立密度成層領域の形成・維持に他ならない．後者の場合，不安定成層を不断に作り出す仕組みさえあれば，中立密度成層になるまで激しく混合する働きが熱対流にはある．すなわち熱対流 (慣性不安定) は粒子を遠方まで運ぶ強い混合作用を持つ．一方，境界壁近くには流体層に加えられた (負の) 熱を壁の外側に逃がすに足る強い境界層が出来ていなければならない．回転系で実験された Couette 流型，Poiseullie 流型のいずれの場合にも強い熱対流 (回転系で言えば慣性不安定) を起こす仕組みがある．Couette 流型の場合は壁面からの加熱・冷却による普通の熱対流と相似であり Poiseullie 流型の場合は、壁面からの安定化させるような加熱・冷却に加えて内部冷却が直接加えられている対流と相似だからである．前者では，対流境界層は両側の壁近くにできる．後者なら，内部冷却で重くなった流体が落ちてくるプレッシャー側のみに強い境界層ができることになる．そこでは壁面から強い伝導性加熱を受ける．対流による冷却と釣り合う定常状態を維持しなければならないからである．以上をまとめると，ほぼ絶対渦度零の平均剪断流の領域 (中立密度成層) を形成する仕組みは系を不安定にするよう不断に加わる速度差・流下方向圧力勾配 (加熱・冷却) である．

このように熱対流の振舞いを理解すれば，回転系と成層系とで乱流熱輸送項に多少の違いがあろうと，絶対渦度零の剪断流 (中立密度成層) を維持する働きまでは阻害できないと考えられる．つまり，系の違いにより乱流輸送項が多少異なっていたとしても絶対渦度零の剪断流 (中立密度成層) を頑健に形成するだろうと推論できる．確認のため，乱流輸送項を不規則変動に置き換えて揺動を与える数値実験を密度成層系で行ったところ，いつでも中立密度成層領域を形成した．

不安定成層を解消し中立密度成層になるまで熱対流で混合するということは

$$U(y)=U_0+fz\leftrightarrow S(z)=\mathrm{const} \tag{1}$$

ということを意味する．次に U の境界値を所与とし境界層が必要な壁面がどちらにあるかを考えて，平均密度成層を平均流速分布に翻訳する．こうして数値実験・室内実験で得られた回転系の絶対渦度零の剪断流を基本的に説明することができる．換言すれば，不断に熱対流が起こるよう

な系との相似を通じて，回転系における絶対渦度零の平均剪断流ほかを一応理解できるということである．

4 おわりに

最初に一様成層・一様剪断流という基本場における微小擾乱の線形発展問題を回転系で定式化し，回転・成層・剪断が入る様々な状況を統一的に見る視点を得た．ただし定式化可能なことを示しただけで応用はこれからである．

次に回転系剪断乱流において絶対渦度零の平均剪断流が発生する理由を考察した．乱流状態でも流下方向に平均した量に議論を限れば密度成層流体との類推が成り立つことを先ず示した．この事実と熱対流が強い不安定解消作用をもつことから，回転系剪断乱流において絶対渦度零の平均剪断流が発生し維持される仕組みを理解できる．また Couette 流の場合は壁面からの加熱・冷却による対流と相似であり Poiseullie 流の場合は壁面からの安定化させるような加熱・冷却に加えて内部冷却が直接加えられている対流と相似であることに注意する．このように考えれば従来の実験で報告されている回転系の平均剪断流分布を定性的に理解できる．

とはいえ成層系と回転剪断流系では乱流輸送項が違う．例えば Yanase et al. [3] が考察したような組織渦構造が密度成層系にも見られるという話は聞いたことがない．このような違いを明らかにすることは今後の課題である．

参考文献

[1] J. P. Johnston, R. M. Halleen, and D. K. Lezius (1972): Effects of spanwise rotation on the structure of two-diminsional fully developed turbulent channel flow. *J. Fulid Mech.*, **56**, 533–557.

[2] K. H. Bech and H. I. Anderson (1997): Turbulent plane Couette flow subject to strong system rotation. *J. Fulid Mech.*, **347**, 289–314.

[3] S. Yanase, M. Tanaka, S. Kida, and G. Kawahara (2000): Positive feedback mechanism to generate coherent vortical structures in rotating shear flow turbulence. In: Proc. International Symposium "Dynamics and Statistics of Coherent Structures in Turbulence: Roles of Elementary Vortices", October 21-23, Tokyo, Japan, 2002, ed. by S. Kida, 159–174.

[4] Y. Yoshikawa and K. Akitomo (2003): Transverse roll convection formed in a horizontal plane Couette flow. submitted to *J. Fluid Mech.*

[5] P. Bradshaw (1969): The analogy beween streamline curvature an and buoyancy in turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, **36**, 177-191.

[6] M. Tanaka, S. Kida, S. Yanase, and G. Kawahara (2000): Zero-absolute-vorticity state in a rotating turbulent shear flow. *Phys. Fluids*, **12**, No.8, 1979–1985.