

## 渦輪の局所安定性解析

九工大 工 服部裕司 (Yuji Hattori)

Department of Computer Aided Science, Kyushu Institute of Technology

九大 数理 福本康秀 (Yasuhide Fukumoto)

Graduate School of Mathematical Science, Kyushu University

## Abstract

細い渦輪の線形安定性を局所安定性解析により調べた。局所安定性解析における Hill-Schrödinger 方程式による定式化を渦輪の場合に拡張した。基本流となる渦輪の流れ場は、渦核半径と渦輪半径の比を展開パラメタとする漸近展開により得られているものを用いる。特に最低次での渦度分布が、Rankine 渦で与えられるもの (Kelvin 型渦輪)、Gauss 分布で与えられるもの (Gauss 型渦輪) を取り扱う。どちらの場合においても 1 次の不安定性が存在することが確認された。不安定成長率を解析的に求め、数値的に求めたものとよく一致することを確認した。1 次の不安定性はどちらの渦輪の場合においても 2 次の不安定性より強いが、その理由は異なる。

## 1 はじめに

渦輪の不安定性は、渦線が曲率をもつ場合の不安定性という点で、研究の多い平行流や二次元流の不安定性と異なるメカニズムを持ちうる。Widnall and Tsai[1] は Kelvin 型の渦輪の安定性をモード解析により調べ、 $\epsilon$  (= 渦核半径と渦輪半径の比) の 2 次で屈曲波 (bending wave) が共鳴により不安定となることを示した ([2] も参照のこと)。ここで Kelvin 型の渦輪とは、 $\epsilon$  の最低次での渦度分布が、Rankine 渦で与えられるものである。この Widnall-Tsai 不安定性を引き起こすのは、2 次の歪み流の効果であり、この意味で Widnall-Tsai 不安定性は円柱渦の歪み流による不安定性 [3, 4] と本質的に同じものである。これに対し、われわれは  $\epsilon$  の 1 次の効果による渦輪の不安定性が存在し、それが  $\epsilon$  の広い範囲について Widnall-Tsai 不安定性よりも大きい最大成長率をもつことをモード解析により示した [5]。細い渦輪の 1 次の流れ場は本質的に渦線の曲率に起因するものであり、この意味でこの 1 次の不安定性は曲率不安定性と呼ぶべきものである。

一方、非粘性流の線形安定性は短波長極限で線形常微分方程式により調べることができる (局所安定性解析)[6, 7]。渦輪の局所安定性解析としては Lifschitz などの研究があるが [8, 9, 10]、そこで調べられた不安定性の起源は必ずしも明らかになっていない。この点で、細い渦輪に漸近展開による基本流を用いた解析を行えば、1 次の曲率不安定性と 2 次の Widnall-Tsai 不安定性を同定し、両者の性質の違いを明らかにすることができると期待される。

また、現在までにモード解析による安定性解析が行われているのは Kelvin 型の渦輪のみである。言い換えれば、実験観測で得られるものと近い渦度分布をもつ渦輪についてはモード解析は困難で、その知見はまだ得られていない。

本研究では、まず局所安定性解析における Hill-Schrödinger 方程式を渦輪の場合に適用できるように拡張する。次に Kelvin 型渦輪と、実験観測で扱われる渦輪に近いと考えられる Gauss 型渦輪 (最低次の渦度分布が Gauss 分布である渦輪) について局所安定性解析を行う。Kelvin 型渦輪については 1 次、2 次の不安定成長率を解析的に求め、数値計算による結果と比較する。また、モード解析による結果との関連を議論する。さらに、Gauss 型渦輪については 1 次の不安定成長率の解析的な表現を導き、数値的に得られたものとの比較を行う。

## 2 局所安定性解析

局所安定性解析 [6, 7] の出発点は、基本流  $U$  に対する擾乱  $u$  を次のような形

$$u = \exp\left(i\frac{\Psi(\mathbf{x}, t)}{\delta}\right) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

に仮定することである。ただし  $\delta \ll 1$  であり、基本流は定常であるとする。この形を線形化された Euler 方程式に代入すると、 $\delta$  の各次数における式から

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = U(\mathbf{X}), \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\mathcal{L}^T \mathbf{k}, \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left(\frac{2\mathbf{k}\mathbf{k}^T}{|\mathbf{k}|^2} - I\right) \mathcal{L}\mathbf{a}, \quad (4)$$

が得られる。ここで  $\mathcal{L}_{ij} = \partial U_i / \partial x_j(\mathbf{X})$ ,  $T$  は転置を意味し、 $I$  は単位行列である。短波長 ( $\delta \ll 1$ ) の極限を取ることで、偏微分方程式から常微分方程式が導かれている。ある初期条件に対して  $\mathbf{a}$  が時間的に無制限に成長するとき、基本流は線形不安定となる [6]。

渦軸方向の速度成分 (swirl) が 0 であるような渦輪の場合、渦核付近の流線は閉じている。このとき流体粒子運動  $\mathbf{X}$  は周期的であり、したがって  $\mathcal{L}$  も周期的である。波数ベクトル  $\mathbf{k}$  が周期的であると仮定すると、擾乱の振幅  $\mathbf{a}$  の方程式 (4) の右辺の行列も周期的となる。この場合 Floquet の理論により、 $T$  を周期として

$$\mathbf{a}(t+T) = \mathcal{F}(T)\mathbf{a}(t), \quad (5)$$

が成り立つ。擾乱の振幅の成長率は Floquet 行列  $\mathcal{F}$  の固有値  $\mu_i$  により

$$\sigma_i = \frac{\log |\mu_i|}{T}, \quad (6)$$

となる。結局、(2)-(4) を解いて  $\sigma_i$  の最大値  $\sigma$  を求め、 $\sigma > 0$  であれば基本流は指数的に不安定となる。

今の場合、振幅の方程式 (4) は次のように Hill-Schrödinger 方程式に帰着される。Figure 1 のように渦軸に沿った長さ  $s$  と渦輪断面における渦軸を原点とする極座標系  $(r, \theta)$  により構成されるトロイダル座標系をとる。ただし、長さは渦輪の半径によって無次元化され、さらに渦核半径と渦輪半径の比  $\epsilon$  によってスケールされている。このとき、(4) は次のように表現することができる

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \log \frac{k_{\perp}}{k} + \text{tr} \mathcal{L}_{\perp} & \frac{2\rho k_{\parallel}^2 k_{\perp} \mathcal{H} k_{\perp}^T}{k_{\perp}^2 k^2} \\ -\frac{\omega_s}{\rho} & -\frac{d}{dt} \log \frac{k_{\perp}}{k} - \text{tr} \mathcal{L}_{\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \quad (7)$$

ここで  $\perp$  と  $\parallel$  はそれぞれ  $r\theta$  平面、 $s$  成分への射影であり、 $\omega_s$  は渦度、 $\rho = 1 + \epsilon y$  は対称軸からの距離、さらに

$$k = |\mathbf{k}|, \quad k_{\perp} = |\mathbf{k}_{\perp}|, \quad k_{\parallel} = |\mathbf{k}_{\parallel}|, \\ p = \frac{k}{k_{\perp}} \rho \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{a}_{\perp}, \quad q = \frac{k}{k_{\perp}} (\mathbf{k}_{\perp} \times \mathbf{a}_{\perp}) \cdot \mathbf{e}_{\parallel}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{L}_{\perp} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

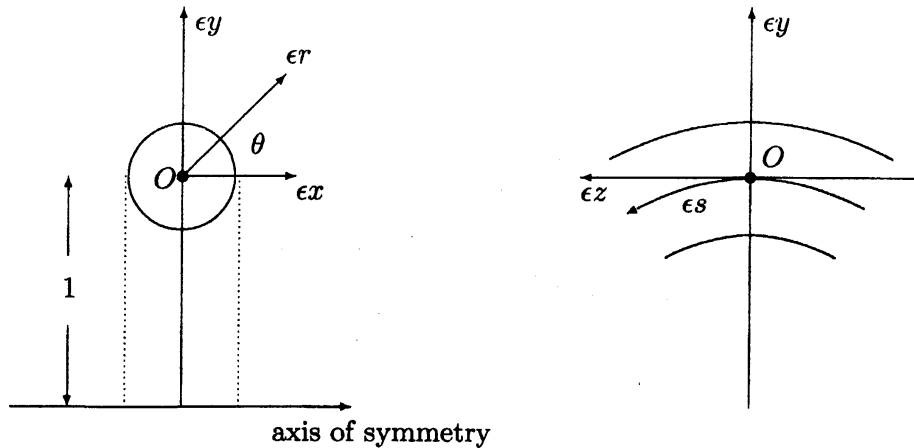


Figure 1: 座標系.

$e_{\parallel}$  は  $s$  方向 (=  $z$  方向) への単位ベクトルである。式 (7) は、基本流が二次元の場合、Bayly *et al.* [11] が非圧縮性流について導き、圧縮性流の場合に Leblanc [12] が導いた式の「渦輪版」である。 $p$  を消去すると次の Hill-Schrödinger 方程式 [11, 12] が導かれる

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + V(t)q = 0. \quad (8)$$

ただし、

$$V(t) = \frac{2\omega_s k_{\parallel}^2 k_{\perp}^T \mathcal{H} k_{\perp}}{k_{\perp}^2 k^2} + \left[ \frac{d^2}{dt^2} \left( \log \frac{k_{\perp}}{k} \right) + \frac{d}{dt} (\text{tr} \mathcal{L}_{\perp}) \right] - \left[ \frac{d}{dt} \left( \log \frac{k_{\perp}}{k} \right) + \text{tr} \mathcal{L}_{\perp} \right]^2. \quad (9)$$

$\text{tr} \mathcal{L}$  が渦輪に特有な項である。尚、上の式は Figure 1 に同時に示されているデカルト座標系でも同様な表現となる。

各々の渦輪について議論する前に、波数ベクトルの周期性について注意しておく。波数ベクトルが周期的でない場合、その大きさは代数的に変化し、不安定になるとしても代数的な不安定であることが知られている。したがって、指数不安定を調べるためには波数ベクトルが周期的である場合のみを扱えばよい。一般に

$$U(X(0)) \cdot k(0) = 0 \quad (10)$$

が成り立つ場合、波数ベクトルは厳密に周期的となる。しかしながら、Kelvin 型渦輪の場合には  $O(\epsilon)$  までは任意の  $k(0)$  に対して周期的である。よって、以下では Gauss 型については (10) を課すが、Kelvin 型については課さない場合も扱う。

### 3 Kelvin 型渦輪の場合

#### 3.1 成長率の解析的な評価

Kelvin 型渦輪の速度場  $U$  およびトロイダル方向の渦度場  $\omega_s$  は

$$U = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} \frac{5}{8} - \frac{5}{8}x^2 - \frac{7}{8}y^2 - \frac{1}{2}z^2 \\ \frac{1}{4}xy \\ xz \end{pmatrix} + \epsilon^2 \begin{pmatrix} Ay + \frac{3}{16}x^2y + \frac{1}{16}y^3 - \frac{3}{8}yz^2 \\ Ax + \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{16}xy^2 - \frac{3}{8}xz^2 \\ -\frac{3}{4}xyz \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\omega_s = 2\rho = 2(1 + \epsilon y), \quad (12)$$

で与えられる [1]。ただし  $A = \frac{15}{16} - \frac{3}{4} \log \frac{8}{\epsilon}$  である。これを用いて式 (2) と (3) を解いて、式 (9) より  $V(t)$  を 1 次まで求めると

$$V(t) = 4(1 - \sin^2 \chi) + \epsilon r_0 \left[ \left( \frac{15}{2} - \frac{37}{2} \sin^2 \chi + 12 \sin^4 \chi \right) \sin t + \left( -\frac{15}{4} - \frac{9}{4} \sin^2 \chi + 6 \sin^4 \chi \right) \sin(t + 2\phi) \right] + O(\epsilon^2), \quad (13)$$

となる。ここで  $r_0$  は流体粒子運動の 0 次の半径 (0 次で軌道は円である) であり、 $t = 0$  において波数ベクトルと  $e_{\parallel}$  のなす角度を  $\chi$ 、波数ベクトルと流線に対する法線ベクトルのなす角度を  $\phi$  とした。したがって、共鳴が  $[4(1 - \sin^2 \chi)]^{1/2} = n/2$  のときに起こる。最も主要な共鳴は  $\cos \chi^{(1)} = \pm 1/4$  であるが、 $0 \leq \chi \leq \pi/2$  の範囲で考えても一般性を失わないので以下ではこの範囲で考える。このとき、Hill の方程式の一般論 [13] から不安定成長率が

$$\sigma^{(1)} = \frac{15\epsilon r_0}{256} \sqrt{61 - 60 \cos 2\phi}, \quad (14)$$

であることがわかる。これは  $\phi = \pi/2$  のときに最大値

$$\sigma_{\max}^{(1)} = \frac{165}{256} \epsilon r_0, \quad (15)$$

をとる。

基本流の 2 次の項まで考慮した場合、波数ベクトルの大きさは

$$k^2 = 1 + \epsilon(\text{periodic}) + \epsilon^2 \left[ -\frac{21}{16} \sin^2 \chi \sin 2\phi t + (\text{periodic}) \right], \quad (16)$$

のように時間変化する。2 次まで周期的であるのは  $\phi = 0, \pi/2$  の場合である。1 次の場合と同様に  $V(t)$  を計算し成長率を求めると、 $\phi = 0$  の場合には

$$\sigma^{(2)} = \epsilon^2 \left( \frac{27}{64} \log \frac{8}{\epsilon} - \frac{135}{512} - \frac{63}{128} r_0^2 \right), \quad (17)$$

$\phi = \pi/2$  の場合には

$$\sigma^{(2)} = \epsilon^2 \left[ \left( \frac{27}{64} \log \frac{8}{\epsilon} - \frac{135}{512} - \frac{5}{8} r_0^2 \right)^2 + \left( \frac{15}{64} r_0^2 \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (18)$$

となる。どちらの場合も  $r_0 = 0$  での成長率が

$$\sigma^{(2)} \Big|_{r_0=0} = \frac{9}{16} \left| A - \frac{15}{32} \right| \epsilon^2, \quad (19)$$

となるが、 $\left| A - \frac{15}{32} \right| \epsilon^2$  が淀み点での strain rate であることに注意すると、楕円型不安定性において Waleffe の得た結果 [14] と対応していることがわかる。

### 3.2 数値計算結果

Figure 2 に、数値計算により得られた不安定成長率の  $(r_0, \chi)$ -平面における等値線図を示す。 $\chi = \chi^{(1)} \approx 0.42\pi$ ,  $\chi^{(2)} = \pi/3$  付近を中心に不安定を示す領域が見られる。1 次の不安定成長率は  $r_0 = 1$  で、2 次の不安定成長率は  $r_0 = 0$  で最大となる。1 次の項の 3 番目の共鳴による狭い不安定領域も見られる。

Figure 3 に不安定成長率の最大値の  $\epsilon$  依存性を示す。数値計算の結果は、全般に解析的に得られた値とよく一致していることがわかる。この図から、1 次の最大成長率は 2 次の最大成長率よりも  $\epsilon$  の広い範囲にわたって大きいことがわかる。

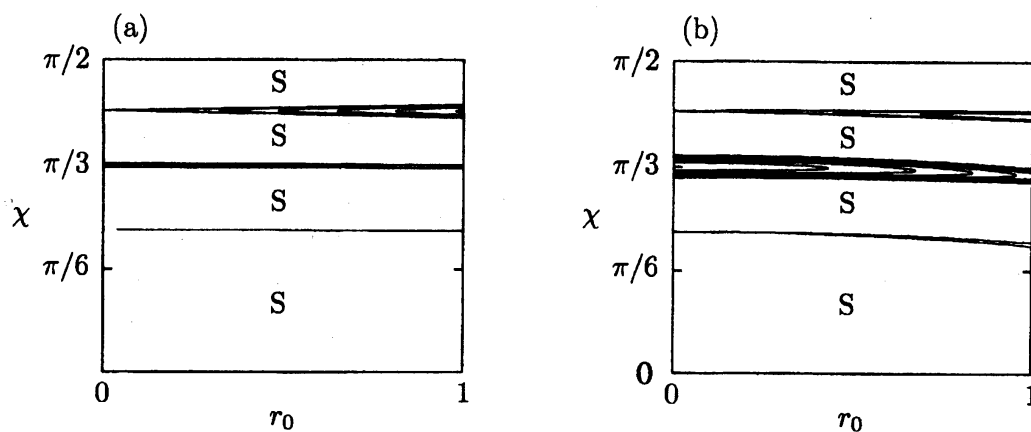


Figure 2: 不安定成長率の等値線図. Kelvin 型渦輪. S は安定領域を示す. (a)  $\epsilon = 0.1, \phi = \pi/2$ , (b)  $\epsilon = 0.3, \phi = 0$ .

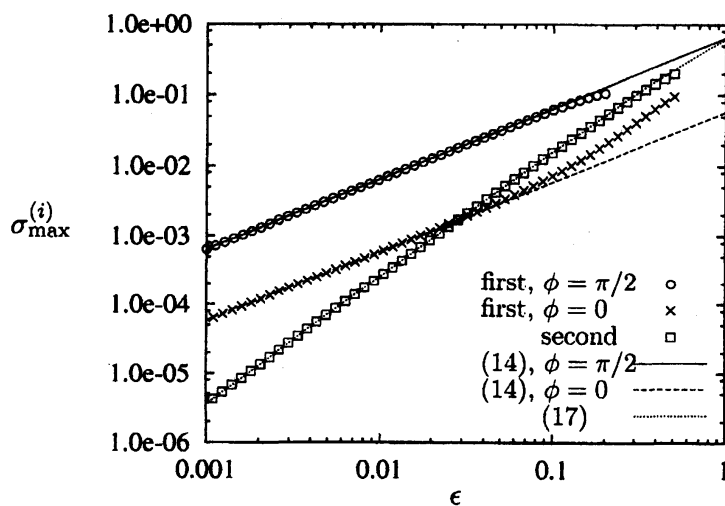


Figure 3: 最大成長率の  $\epsilon$  依存性. Kelvin 型渦輪. 記号が数値計算結果 ( $\circ$ :  $O(\epsilon), \phi = \pi/2$ ,  $\times$ :  $O(\epsilon), \phi = 0$ ,  $\square$ :  $O(\epsilon^2)$ ), 線が解析的な結果 (実線:  $O(\epsilon), \phi = \pi/2$ , 破線:  $O(\epsilon), \phi = 0$ , 点線:  $O(\epsilon^2)$ ).

### 3.3 モード解析との対応

Kelvin 型渦輪の場合、局所安定性解析により得られた成長率は、モード解析の結果 [5] と以下のように対応している

$$\sigma_{\text{normal}} \rightarrow \frac{15\epsilon}{256} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2}, \quad \text{as } \eta \rightarrow \infty \text{ for fixed } m, \quad (20)$$

$$\sigma_{\text{normal}} \rightarrow \frac{165\epsilon}{256}, \quad \text{as } \eta, m \rightarrow \infty, \quad \frac{m}{\eta} \sim 1. \quad (21)$$

ここで  $\eta$  と  $m$  は擾乱のそれぞれ  $r$  方向と  $\theta$  方向の「波数」である。つまり、(20) の極限が  $(\pi/2)^{-2}$  という因子を別にして  $\phi = 0$  の場合と対応しており、(21) の極限が  $\phi = \pi/2$  の場合と対応している。モード解析における不安定モードの形から、前者の場合には  $\phi \sim \tan^{-1} Cm/\eta \rightarrow 0$  であり、後者の場合には  $\phi \sim \tan^{-1} C'm/\eta^{2/3} \rightarrow \pi/2$  である<sup>1</sup> ことを考えると、上の対応が理解される。

## 4 Gauss 型渦輪の場合

### 4.1 基本流の漸近展開

細い渦輪の基本流を漸近展開により求める方法は Fukumoto and Moffatt[16] に述べられている。ここでは以下の解析で使用する 2 次の流れ場までを簡単にまとめておく。

まず 0 次の渦度を次のように Gauss 分布で与える

$$\omega^{(0)} = \frac{\alpha}{\pi} \exp(-\alpha r^2).$$

これに対応する速度場は

$$U_r^{(0)} = 0, \quad U_\theta^{(0)} = \frac{1}{2\pi r} [1 - \exp(-\alpha r^2)],$$

である。1 次の速度場は

$$U_r^{(1)} = -\frac{1}{r} \tilde{\psi}_{11}^{(1)}(r) \cos \theta, \quad U_\theta^{(1)} = \left( \frac{d\tilde{\psi}_{11}^{(1)}}{dr} + rU_\theta^{(0)}(r) \right) \sin \theta,$$

である。ただし、

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{11}^{(1)} &= \Psi_{11}^{(1)} + c_{11}^{(1)} U_\theta^{(0)}, \quad \Psi_{11}^{(1)} = -U_\theta^{(0)} \left\{ \frac{r^2}{2} + \int_0^r \frac{g(r') dr'}{r' [U_\theta^{(0)}(r')]^2} \right\}, \\ g(r) &= \frac{1}{4\pi^2} \left[ E_1(\alpha r^2) - \frac{1}{2} E_1(2\alpha r^2) + \log r + \frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha}{2} \right]. \end{aligned}$$

ここで  $E_1$  は指数積分関数であり  $\gamma = 0.5772156649\dots$  は Euler の定数である。 $c_{11}^{(1)}$  の選び方には任意性があるが、ここでは有限の Reynolds 数のときに運動座標系の中心が  $O(\epsilon^3)$  まで一定とできることに対応して

$$c_{11}^{(1)} \approx \frac{1}{4\alpha} 2.5902739 = \frac{1}{\alpha} 0.6481848,$$

<sup>1</sup>  $1-r = O(m^{1/3})$  のとき  $\eta J'_m(\eta r)/J_m(\eta r) \sim \eta^{2/3}$  なので [15].

と選ぶ。2次の速度場は

$$U_r^{(2)} = \left( \frac{1}{2} \tilde{\psi}_{11}^{(1)} - \frac{2\tilde{\psi}_{21}^{(2)}}{r} \right) \sin 2\theta, \quad U_\theta^{(2)} = \left( \frac{r^2}{2} U_\theta^{(0)} + \frac{r}{2} \frac{d\tilde{\psi}_{11}^{(1)}}{dr} - \frac{d\tilde{\psi}_{21}^{(2)}}{dr} \right) \cos 2\theta,$$

で与えられる。ここで  $\tilde{\psi}_{21}^{(2)}$  は次の常微分方程式

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} - a \right) \tilde{\psi}_{21}^{(2)} = \frac{b}{4} \left( \tilde{\psi}_{11}^{(1)} \right)^2 + r a \tilde{\psi}_{11}^{(1)} + \frac{1}{2} \left( r U_\theta^{(0)} + r^2 \omega^{(0)} + \frac{d\tilde{\psi}_{11}^{(1)}}{dr} - \frac{\tilde{\psi}_{11}^{(1)}}{r} \right),$$

$$a = -\frac{1}{U_\theta^{(0)}} \frac{d\omega^{(0)}}{dr}, \quad b = -\frac{1}{U_\theta^{(0)}} \frac{da}{dr},$$

を、境界条件

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{21}^{(2)} &\propto r^2 && \text{as } r \rightarrow 0, \\ \tilde{\psi}_{21}^{(2)} &\sim \frac{r^2}{4} \left\{ \dot{Z}^{(0)} + \frac{1}{8\pi} \left[ \log \left( \frac{8}{\epsilon r} \right) - 2 \right] \right\} + \frac{d^{(1)}}{4} && \text{as } r \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

の下で解いて得られる。ただし、 $d^{(1)} = c_{11}^{(1)}/2\pi$ 。  $\alpha$  は 1 に固定する。

#### 4.2 成長率の解析的な評価

上で得られた基本流を用いて (2) と (3) を解き、(9) より  $V(t)$  を 1 次まで求めると

$$V(t) = 2\omega^{(0)}(r_0)\Omega^{(0)}(r_0)\cos^2\chi + \epsilon U_\theta^{(0)}(r_0)F(r_0)\sin(\Omega^{(0)}(r_0)t) + O(\epsilon^2), \quad (22)$$

となる。ここで  $\Omega^{(0)} = U_\theta^{(0)}/r$  であり、

$$F(r) = \Omega^{(0)} + 2\cos^2\chi \left[ \left( 1 - 4\sin^2\chi \right) \omega^{(0)} - \Omega^{(0)} - \frac{g}{r^2 \left( U_\theta^{(0)} \right)^2} \left\{ \left( 2\sin^2\chi - 1 \right) \omega^{(0)} + \frac{1}{2} \Omega^{(0)} \right\} \right],$$

である。したがって共鳴条件は  $\left( 2\omega^{(0)}\Omega^{(0)}\cos^2\chi \right)^{1/2}$  が  $\Omega^{(0)}/2$  の整数倍、つまり

$$\frac{\omega^{(0)}}{\Omega^{(0)}} = \frac{n^2}{8\cos^2\chi} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (23)$$

となる。不安定成長率は

$$\sigma^{(1)} = \epsilon |U_\theta^{(0)}| \left| \frac{1}{2} \sin^2\chi - \frac{3}{8} - \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \sin^2\chi \right) \frac{g}{r_0^2 \left( U_\theta^{(0)} \right)^2} \right|, \quad (24)$$

と表される。

Kelvin 型との違いの一つは共鳴条件を満たす  $\chi$  が  $r_0$  (または流線) によって一般に異なることである。Kelvin 型の場合、(23) の左辺は渦核内で一定値 2 となるため、(1 次までは) 流線によらない。Gauss 型の場合、(23) で決まる共鳴線は Figure 4 のようになる。  $n = 1, 2, 3$  については  $r_0$  についてカットオフを持つ有限の長さの曲線となる。  $n = 4$  では原点一点に縮退し、  $n \geq 5$  の場合には小さい  $\epsilon$  に対しては共鳴が起こらない。

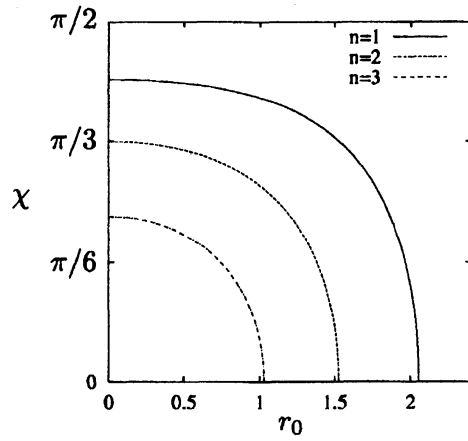


Figure 4: 式 (23) で決まる共鳴線, Gauss 型渦輪.

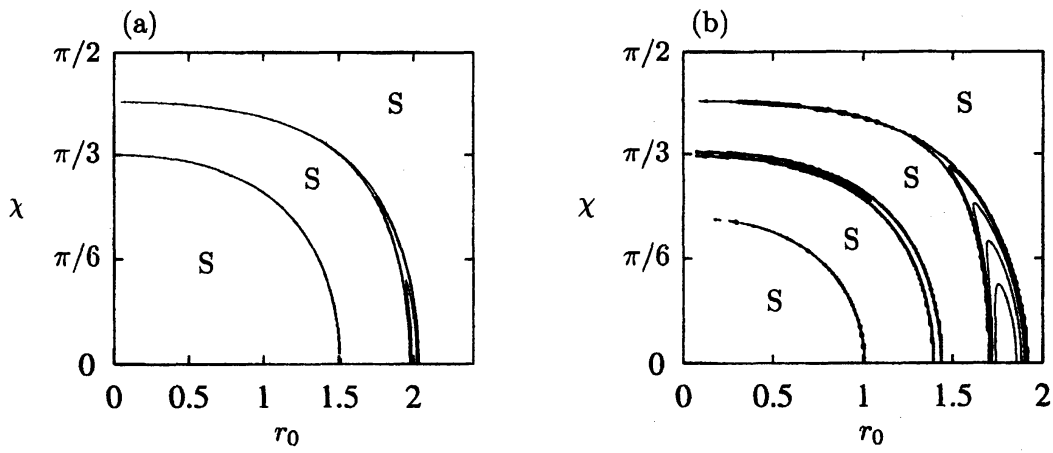


Figure 5: 不安定成長率の等値線図. Gauss 型渦輪. (a)  $\epsilon = 0.02$ , (b)  $\epsilon = 0.1$



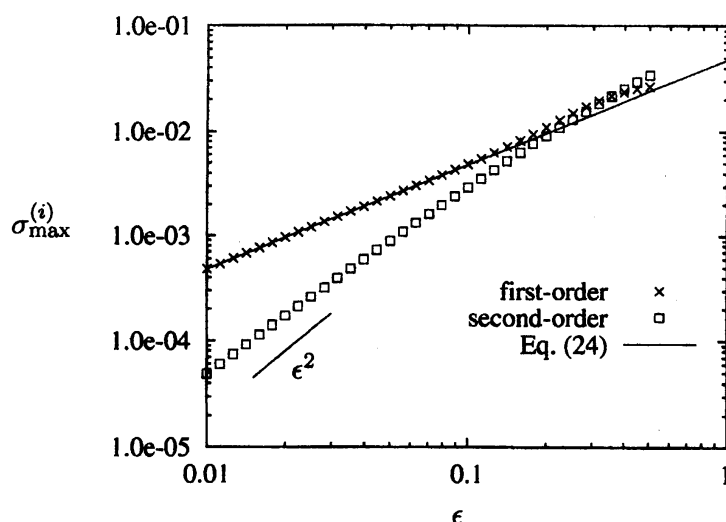


Figure 6: 最大成長率の  $\epsilon$  依存性. Gauss 型渦輪. 記号が数値計算結果 ( $\times$ :  $O(\epsilon)$ ,  $\square$ :  $O(\epsilon^2)$ ),  $O(\epsilon)$  の解析的な値が実線.

### 4.3 数値計算結果

Figure 5 に、不安定成長率の等値線図を示す。Figure 4 の共鳴線の周りに不安定を示す領域が見られることがわかる。 $r_0$  について少しずれが見られるのは、数値計算において  $r_0$  を  $Y(t)$  の最大値で置き換えていることによると考えられる。1 次の成長率の大きさおよび不安定領域の幅が  $\chi = 0$  付近で大きくなっていることがわかる。

Figure 6 に最大成長率の  $\epsilon$  依存性を示す。1 次の成長率については、解析的な値 (24) と数値計算による値がよく一致していることがわかる。 $\epsilon$  のある値  $\epsilon_c$  で 1 次と 2 次の最大成長率の大小関係が入れ替わるが、 $\epsilon_c$  の値は 1 次の解析的な値によれば 0.2 程度、数値計算の値によれば 0.35 程度となる。いずれにせよ、1 次の方が強い範囲  $\epsilon < \epsilon_c$  は細いとみなされる渦輪の範囲の大部分をカバーしている。

1 次の不安定性について特徴的な点の一つは、成長率が最大となる流線が渦度の弱い部分 ( $\epsilon = 0.1$  の場合、最大渦度の約 1.7%) に存在し、その流線の周りで成長率が幅の狭いピークをもつことである。これに対し、2 次の成長率はカットオフの範囲内では大きさは緩やかに変化する。両者が実験観測やモード解析において不安定モードとしてどのように表れるかは今後の研究の興味の一つである。

## 5 まとめ

渦輪の局所安定性解析を行い、不安定成長率を評価した。基本流は漸近接続展開により与えられ、1 次の曲率の効果による不安定性と 2 次の Widnall-Tsai 不安定性を個別に得ることができた。解析的に求めた成長率の値は数値計算による結果とよく一致する。Kelvin 型渦輪、Gauss 型渦輪ともに 1 次の不安定性が 2 次の不安定性よりも広い  $\epsilon$  の範囲について強いが、そのメカニズムはそれぞれの渦輪について異なる。すなわち、Kelvin 型渦輪では波数ベクトルが流線と平行である場合 ( $\phi = \pi/2$ ) に 1 次の成長率が大きくなるのに対し、Gauss 型では共鳴条件 (23) による  $\chi$  の変化により成長率が大きくなる。

## References

- [1] S. E. Widnall and C.-Y. Tsai, "The instability of the thin vortex ring of constant vorticity," *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **287**, 273-305 (1977).
- [2] S. E. Widnall, D. B. Bliss and C.-Y. Tsai, "The instability of short waves on a vortex ring," *J. Fluid Mech.* **66**, 35-47 (1974).
- [3] C.-Y. Tsai and S. E. Widnall, "The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field," *J. Fluid Mech.* **73**, 721-733 (1976).
- [4] D. W. Moore and P. G. Saffman, "The instability of a straight vortex filament in a strain field," *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **346**, 413-425 (1975).
- [5] Y. Fukumoto and Y. Hattori, "Linear stability of a vortex ring revisited," *Proc. IU-TAM Symposium on tubes, sheets and singularities in fluid dynamics* (2003) pp. 37-48; Y. Fukumoto and Y. Hattori, "Curvature instability of a vortex ring," in preparation.
- [6] A. Lifschitz and E. Hameiri, "Local stability conditions in fluid dynamics," *Phys. Fluids A* **3**, 2644-2651 (1991).
- [7] S. Friedlander and M. M. Vishik, "Instability criteria for the flow of an inviscid incompressible fluid," *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2204-2206 (1991).
- [8] A. Lifschitz, "Instabilities of ideal fluids and related topics," *Z. angew. Math. Mech.* **75**, 411-422 (1995).
- [9] A. Lifschitz, W. H. Suters and J. T. Beale, "The onset of instability in exact vortex rings with swirl," *J. Comp. Phys.* **129**, 8-29 (1996).
- [10] T. Rozi and Y. Fukumoto, "The most unstable perturbation of wave-packet form inside Hill's vortex," *J. Phys. Soc. Japan* **69**, 2700-2701 (2000).
- [11] B. J. Bayly, D. D. Holm and A. Lifschitz, "Three-dimensional stability of elliptical vortex columns in external strain flows," *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **354**, 895-926 (1996).
- [12] S. Leblanc, "Destabilization of a vortex by acoustic waves," *J. Fluid Mech.* **414**, 315-337 (2000).
- [13] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations* (Dover, New York, 1956).
- [14] F. Waleffe, "On the three-dimensional instability of strained vortices," *Phys. Fluids A* **2**, 76-80 (1990).
- [15] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1965).
- [16] Y. Fukumoto and H. K. Moffatt, "Motion and expansion of a viscous vortex ring. Part 1. A higher-order asymptotic formula for the velocity," *J. Fluid Mech.* **417**, 1-45 (2000).