数理解析研究所講究録 1340 巻 2003 年 89-103

区分的定数遅れを持つロジスティック方程式の大域吸引性

富士通㈱ 上杉 和也 (Kazuya Uesugi)
早稲田大学理工学部 室谷 義昭 (Yoshiaki Muroya)
東京理科大学理学部 石渡 恵美子 (Emiko Ishiwata)

1 はじめに

単体の生物の人口変動を表すモデルの 1 つとして知られているロジスティック方程式

$$\frac{dx(t)}{dt}=rx(t)\{1-\frac{x(t)}{K}\}, \qquad r,K>0$$

に加え，定数遅れを持つロジスティック方程式

$$\frac{dx(t)}{dt}=rx(t)\{1-\frac{x(t-\tau)}{K}\}, \qquad r,\tau,K>0$$

や区分的定数遅れのあるロジスティック方程式

$$\frac{dx(t)}{dt}=rx(t)\{1-\frac{x([t])}{K}\}, \qquad r,K>0$$

が考えられている．ここで，$[t]$ は t を超えない最大整数を表す．

本報告では，次の複数の区分的定数遅れを持つロジスティック方程式

$$\begin{cases} N'(t)=rN(t)\{1-\sum_{j=0}^{m}a_jN([t-j])\}, & t\geq 0, \quad m\geq 1, \\ N(0)=N_0>0, \quad N(-j)=N_{-j}\geq 0, & j=1,2,\cdots,m \end{cases} \tag{1.1}$$

$$r>0, \qquad a_0,a_1,\cdots,a_m\geq 0, \qquad \sum_{j=0}^{m}a_j>0 \tag{1.2}$$

に対し，$a_0>\sum_{j=1}^{m}a_j$ という条件の下で，(1.1) の正の平衡点 $N^*=\dfrac{1}{(\sum_{j=0}^{m}a_j)}$ が大域吸引性 (global attractivity):

$$\text{任意の } N(0)>0 \text{ に対し，} \lim_{t\to\infty}N(t)=N^*$$

を持ち，かつ一様安定，つまり大域漸近安定性 (global asymptotic stability) を満たすための十分条件を調べる．

補題 1.1 (*Gopalsamy et al.*[1]) $N_0>0$ かつ $N_{-j}\geq 0$, $j=1,2,\cdots,m$ とする．このとき，(1.2) の下で，(1.1) は次式で定義される唯一の正の解 $N(t)$ を $[0,\infty)$ 上で持つ．

$$N(t)=N_n\exp\{r(1-\sum_{j=0}^{m}a_jN_{n-j})(t-n)\}, \qquad n\leq t<n+1, \qquad n=0,1,2,\cdots.$$

$N_n=N(n)$, $n=0,1,2,\cdots$ とするとき，数列 $\{N_n\}_{n=0}^{\infty}$ は次の差分方程式を満たす．

$$N_{n+1}=N_n\exp\{r(1-\sum_{j=0}^{m}a_jN_{n-j})\}, \qquad n=0,1,2,\cdots. \tag{1.3}$$

(1.1) の正の平衡点 $N^* = 1/(\sum_{j=0}^{m} a_j)$ の大域漸近安定の十分条件については，1991 年に Gopalsamy et al.[1] が $r < \frac{\log 2}{m+1}$ を示し，1995 年に So and Yu[9] が $r \leq \frac{3}{2(m+1)}$ まで拡張している．一方で，$m = 0$ の大域漸近安定の必要十分条件として $r \leq 2$ が知られている (たとえば，Matsunaga et al.[3])．

2001 年に Wang et al.[10] は (1.1) の正の平衡点 N^* が大域漸近安定となる十分条件を求めた．Muroya[4] は同じ条件の下で (1.3) の解の縮小性 (contractivity)，つまり，

$$|N(n+1) - N^*| \leq \max_{0 \leq j \leq m} |N(n-j) - N^*|, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1.4}$$

を持つことを示した．

定理 A. (Wang et al.[10] and Muroya [4])

$$a_j \geq 0, \quad a_0 > \sum_{j=1}^{m} a_j \quad \text{かつ} \quad 0 < r \leq 1 \tag{1.5}$$

ならば，(1.3) の解は縮小性を持ち，(1.1) の正の平衡点 N^* は大域漸近安定である．

Wang et al.[10] は Lyapunov-like 関数による証明法で，一般的な非自励方程式系の正の平衡点が大域漸近安定となる十分条件を求め，Muroya [6] がそれを改良している．Muroya[7] はこの結果を (1.3) の場合に具体的に適用して次の条件を得た．

定理 B. (Muroya [7])

$$a_j \geq 0, \quad a_0 > \sum_{j=1}^{m} a_j \quad \text{かつ} \quad r < 1 + \ln\{2/(1 + (\sum_{j=1}^{m} a_j)/a_0)\} \leq 1 + \log 2 < 2 \tag{1.6}$$

ならば，(1.1) の正の平衡点 N^* は大域漸近安定である．

一方で，Muroya[5] は (1.3) の解の縮小性と正の平衡点 N^* が大域漸近安定となる違ったタイプの十分条件を示した．

定理 C. (Muroya [5] の Theorem 3.5 参照)．$m \geq 1$，$a_0 > 0$ を仮定する．Muroya[5] の補題 2.2 によって定義された関数 $\hat{r}(\alpha)$ と $\tilde{\alpha} = -(\sum_{i=1}^{m} a_i)/a_0$ に対し，

$$r \leq \hat{r}(\tilde{\alpha}) \tag{1.7}$$

ならば，(1.3) の解が縮小性 (1.4) を持ち，(1.1) の正の平衡点 N^* は大域漸近安定である．

これに対し，$a_0 > \sum_{j=1}^{m} a_j$ という条件の下で，次の定理が本報告の主結果である．

定理 1.1 条件 (1.2) の下で，$r_1 = rN^* a_0$ と $r_2 = rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j$ に対し，

$$r_1 > r_2 \geq 0, \quad r = r_1 + r_2 \leq 2 \quad \text{かつ} \quad r_1 + r_2 > 1 \text{ のとき } r_1 + r_2 - \frac{r_2}{r_1} e^{r_1 + r_2 - 1} \geq 0 \tag{1.8}$$

ならば，(1.1) の任意の解 $N(t)$ に対して，$\lim_{t \to \infty} N(t) = N^*$ となり，(1.1) の正の平衡点 N^* は大域漸近安定である．

定理 1.1 は $a_0 > \sum_{j=1}^{m} a_j$ という条件の下で，(1.1) の正の平衡点 N^* が大域漸近安定であるための条件を定理 A, B, C より広い条件に改良した．

系 1.1 条件 (1.2) の下で,

$$0 < r \leq 2 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\sum_{j=1}^{m} a_j}{a_0} \leq \frac{2}{e} \tag{1.9}$$

ならば, (1.1) の任意の解 $N(t)$ に対して, $\lim_{t\to\infty} N(t) = N^*$ となり, (1.1) の正の平衡点 N^* は大域漸近安定である.

系 1.1 により, Seifert[8] の定理 3.4 の $\sum_{j=1}^{m} a_j/a_0 \leq a$ となるある小さい定数 a は, 初めて, 具体的に $2/e$ の値が与えられる.

2 節では一般的な関数 $f(x)$ に対する方程式 (2.1) を考え, 零解の大域吸引性の十分条件を求める. 3 節では関数 $f(x) = e^x - 1$ の場合にその十分条件を具体的に示し, 定理 A の結果と合わせることにより, 定理 1.1 を証明する. 最後に, 定理 A, B, C の各条件と定理 1.1 の条件 (1.8) との関係を図示する.

2 一般的な $f(x)$ に対する条件

この節では, より一般的な関数 $f(x)$ に対する次の方程式を考える.

$$x'(t) + rN^* \sum_{j=0}^{m} a_j f(x([t-j])) = 0, \qquad t \geq 0. \tag{2.1}$$

ただし, $x(-j) \geq 0$, $j = 1, 2, \cdots, m$, $x(0) > 0$, また, (1.2), $a_0 > 0$ と次を仮定する.

$$\begin{cases} f(x) \in C^1(-\infty, +\infty), \quad f(0) = 0, \quad f'(x) > 0, \quad -\infty < x < +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \quad \text{かつ} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty. \end{cases} \tag{2.2}$$

特に $f(x) = e^x - 1$ の場合, (1.1) の正の解 $N(t)$ に対し,

$$x(t) = \log \frac{N(t)}{N^*}, \quad t \geq 0, \qquad x(-j) = \log \frac{N(-j)}{N^*}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, m$$

とすると, $x(t)$ は (2.1) を満足する.

本節では, (2.1) の零解 $x(t) \equiv 0$ に対する大域吸引性の十分条件を考える. (2.1) の両辺を n から $t < n+1$ まで積分すると,

$$x(t)-x(n) = -\int_n^t rN^* \sum_{j=0}^{m} a_j f(x([t-j]))dt = -rN^* \sum_{j=0}^{m} a_j \int_n^t f(x(n-j))dt = -rN^* \sum_{j=0}^{m} a_j f(x(n-j))(t-n).$$

よって, (2.1) の解は

$$x(t) = x(n) - rN^* \sum_{j=0}^{m} a_j f(x(n-j))(t-n), \qquad 0 \leq n \leq t < n+1.$$

$t \to (n+1) - 0$ より, $$x(n+1) = x(n) - rN^* \sum_{j=0}^{m} a_j f(x(n-j)).$$

$x_n = x(n)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ とすると,

$$x_{n+1} = x_n - rN^* \sum_{j=0}^{m} a_j f(x_{n-j}), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.3}$$

より，$\lim_{t\to\infty} x(t)=0$ を示すには，$\lim_{n\to\infty} x_n=0$ を示せばよい．

$$r_1=rN^*a_0>0,\quad r_2=rN^*\sum_{j=1}^{m}a_j\geq 0,\quad \varphi(x)=x-r_1f(x) \tag{2.4}$$

とおくと，$r_1+r_2=r$ となり，(2.3) は

$$x_{n+1}=\varphi(x_n)-rN^*\sum_{j=1}^{m}a_jf(x_{n-j}),\qquad n=0,1,2,\cdots. \tag{2.5}$$

補題 2.1 (2.3) において，偶然にある時より x_n が非正か非負だけになる場合は，$\lim_{n\to\infty} x_n=0$ である．

証明 (2.3) で偶然に $n\geq n_0$ に対し，x_n が非正と仮定する．$f(x)$ は $(-\infty,+\infty)$ で狭義単調増加関数で，$f(x_{n-j+1})\leq 0$, $j=1,2,\cdots,m$, $n\geq n_0+m-1$ となる．また，(2.1) より，

$$0\geq x_{n+1}=x_n-rN^*\sum_{j=1}^{m}a_jf(x_{n-j+1})\geq x_n,\qquad n\geq n_0+m-1.$$

$\{x_n\}_{n=n_0+m-1}^{\infty}$ は単調増加列で上界が 0 である．$\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha$ とすると，$f(\alpha)=0$, すなわち $\alpha=0$ となる．同様に，偶然に $n\geq n_1$ に対し，x_n が非負と仮定すると，$\lim_{n\to\infty} x_n=0$ を得る．□

補題 2.2 (2.4) で $\varphi(x)$ が唯一の極大値を

$$L^*<0 \tag{2.6}$$

で持つと仮定し，$L\leq 0$ に対し，

$$F(L)\equiv\min\{\varphi(L),\varphi(\varphi(\max\{L^*,L\})-r_2f(L))\}-r_2f(\varphi(\max\{L^*,L\})-r_2f(L)) \tag{2.7}$$

とおく．任意の $L<0$ に対し，$F(L)>L$ ならば，$\lim_{n\to\infty} x_n=0$ となる．

証明 (2.5) で，偶然にある時より x_n が非正または非負ならば，補題 2.1 より，$\lim_{n\to\infty} x_n=0$ となる．

今，偶然にある時より x_n は非正にも非負にもならないと仮定する．Gopalsamy et al.[1] と So and Yu [9] の証明と同様に，

$$m<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n<\xi_{n+1}<\cdots,\qquad \lim_{n\to\infty}\xi_n=+\infty,\qquad x(\xi_n)=0,\ \ n=1,2,\cdots,$$

及び，(ξ_{2n-1},ξ_{2n}) 上で $x(t)>0$, (ξ_{2n},ξ_{2n+1}) 上で $x(t)<0$, $\xi_{n+1}-\xi_n>m+1$, $n=1,2,\cdots$ を満たす $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ が取れる．

$$x(t_n)=\max_{\xi_{2n-1}<t<\xi_{2n}}x(t),\quad かつ\quad x(s_n)=\min_{\xi_{2n}<t<\xi_{2n+1}}x(t),\quad n=1,2,\cdots$$

とすると $n=1,2,\cdots$ に対して，t_n と s_n は自然数で，

$$x(t_n)>0,\ \ D^-x(t_n)\geq 0\quad かつ\quad x(s_n)<0,\ \ D^-x(s_n)\leq 0$$

となる．ただし，$D^-x(t)$ は $x(t)$ の t での左微分である．このとき，

$$0\leq D^-x(t_n)=-rN^*\sum_{j=0}^{m}a_jf(x(t_n-j-1)) \tag{2.8}$$

$$かつ\qquad 0\geq D^-x(s_n)=-rN^*\sum_{j=0}^{m}a_jf(x(s_n-j-1)).$$

ゆえに，$n=1,2,\cdots$ に対し，

$$T_n \in [t_n-m-1, t_n), \qquad x(T_n)=0 \tag{2.9}$$

$$\text{かつ} \qquad S_n \in [s_n-m-1, s_n), \qquad x(S_n)=0 \tag{2.10}$$

を満たす $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．(2.9) が成り立たないとき，(2.8) の右辺は負となり，矛盾する．(2.10) についても同様である．

(2.1) を T_n から t_n まで積分すると，$t_n - T_n \leq m+1$ から，

$$0 = x(t_n) - x(T_n) + rN^* \sum_{j=0}^{m} a_j \int_{T_n}^{t_n} f(x([s-j]))ds \geq x(t_n) - rN^* \sum_{j=0}^{m} a_j (t_n - T_n) \geq x(t_n) - r(m+1).$$

ゆえに，$x(t_n) \leq r(m+1)$, $n=1,2,\cdots$ となる．よって，$x(t) \leq r(m+1)$, $t > \xi_1$ を得る．

(2.1) を S_n から s_n まで積分すると $s_n - S_n \leq m+1$ から，

$$\begin{aligned} 0 &= x(s_n) - x(S_n) + rN^* \sum_{j=0}^{m} a_j \int_{S_n}^{s_n} f(x([s-j]))ds \\ &\leq x(s_n) + rN^* \sum_{j=0}^{m} a_j f(r(m+1))(s_n - S_n) \leq x(s_n) + r(m+1) f(r(m+1)). \end{aligned}$$

ゆえに $x(s_n) \geq -r(m+1)f(r(m+1))$, $n=1,2,\cdots$ となり，よって，$x(t) \geq -r(m+1)f(r(m+1))$, $t \geq \xi_2$ を得る．

$$\begin{cases} n > \xi_1 \text{ に対し，} x_n \leq R_1 = r(m+1) \\ n > \xi_2 \text{ に対し，} x_n \geq L_1 = -r(m+1)f(r(m+1)). \end{cases}$$

ここで，L_k を x_n の $n > \xi_{2k}$ での下界としよう．このとき，$n > \xi_{2k}$ に対し，$x_n \geq L_k$ となる．

$\varphi(x)$ は $x = L^* < 0$ で極大値を持つ．$n > \xi_{2(k+1)-1}$ に対し，x_n の上界を考える．

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) - rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j f(x_{n-j-1}) \leq \varphi(x_{n-1}) - rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j f(L_k) \leq \varphi(\max\{L^*, L_k\}) - r_2 f(L_k).$$

すなわち，$n > \xi_{2(k+1)-1}$ に対し，$x_n \leq R_{k+1}$ となる．ただし，$R_{k+1} \equiv \varphi(\max\{L^*, L_k\}) - r_2 f(L_k)$ である．

次に $n > \xi_{2(k+1)}$ に対し，x_n の下界を考える．

$$\begin{aligned} x_n &= \varphi(x_{n-1}) - rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j f(x_{n-j-1}) \geq \min\{\varphi(L_k), \varphi(R_{k+1})\} - r_2 f(R_{k+1}) \\ &= \min\{\varphi(L_k), \varphi(\varphi(\max\{L^*, L_k\}) - r_2 f(L_k))\} - r_2 f(\varphi(\max\{L^*, L_k\}) - r_2 f(L_k)). \end{aligned}$$

$L_{k+1} = F(L_k)$ とすると，$n > \xi_{2(k+1)}$ に対し，$x_n \geq L_{k+1}$ となる．仮定より，$L_k < F(L_k) = L_{k+1}$ である．

最後に，$\lim_{k\to\infty} R_k = 0$ かつ $\lim_{k\to\infty} L_k = 0$ を示そう．L_k は $n > \xi_{2k}$ での x_n の下界で，

$$R_{k+1} = \varphi(\max\{L^*, L_k\}) - r_2 f(L_k)$$

が $n > \xi_{2(k+1)-1}$ での x_n の上界なので，$\lim_{k\to\infty} L_k = 0$ ならば，$\lim_{k\to\infty} R_k = \varphi(0) - r_2 f(0) = 0$ である．ゆえに $\lim_{k\to\infty} L_k = 0$ を示せばよい．(2.7) より，$F(0)=0$ かつ任意の $L_k < 0$ に対し，$L_k < L_{k+1} = F(L_k) \leq 0$ となる．逐次反復法より，$\lim_{k\to\infty} L_k = 0$ が示せる．よって $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ を得る． □

補題 2.3 (2.4) で，$\varphi(x)$ が唯一の極大値を

$$R^* > 0 \tag{2.11}$$

で持ち，かつ

$$R^* \geq \varphi(R^*) + r_2 \tag{2.12}$$

と仮定する．$L \leq 0$ に対し，

$$H(L) \equiv r_1 f(L) + r_2 f(\varphi(R^*) - r_2 f(L))$$

とおく．

$$r_1 > r_2 \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{L \to -\infty} H(L) < 0 \tag{2.13}$$

ならば，$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ となる．

証明 偶然にある時より x_n が非正か非負ならば，補題 2.1 より，$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ を得る．それゆえに偶然にある時より，x_n が非正でも非負でもないと仮定する．Gopalsamy 他 [1] と So and Yu [9] の証明と同様に，

$$m < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n < \xi_{n+1} < \cdots, \qquad \lim_{n \to \infty} \xi_n = +\infty, \qquad x(\xi_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

及び，(ξ_{2n-1}, ξ_{2n}) 上で $x(t) > 0$，(ξ_{2n}, ξ_{2n+1}) 上で $x(t) < 0$，$\xi_{n+1} - \xi_n > m + 1$，$n = 1, 2, \cdots$ を満たし，しかも $n > \xi_2$ に対し，

$$-r(m+1) f(r(m+1)) \leq x_n$$

を満たす $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ が取れる．

$\varphi(x)$ は $x = R^* > 0$ で極大値をとるとする．このとき，$n > \xi_1$ に対し，$x_n < \varphi(R^*) + r_2 \leq R^*$ である．$0 < R^* - r_2 f(L) \leq R^* + r_2 \leq R^*$ なので，R^* の仮定より，$L < 0$ に対し，$\varphi'(R^* - r_2 f(L)) \geq 0 = \varphi'(R^*)$ であり，$(1 - r_1 f'(R^* - r_2 f(L))) r_2 f'(L) \geq 0$ となる．それゆえに，$f'(R^* - r_2 f(L)) \leq \frac{1}{r_1}$ となる．これより，

$$H'(L) = f'(L)\{r_1 - r_2^2 f'(\varphi(R^*) - r_2 f(L))\} \geq f'(L)(r_1 - \frac{r_2^2}{r_1}) > 0.$$

$H(L)$ は $(-\infty, 0]$ 上で狭義単調増加関数で，$\lim_{L \to -\infty} H(L) < 0$ であり，$L_1 < -r(m+1) f(r(m+1))$ かつ $H(L_1) < 0$ となる $L_1 < 0$ が存在する．そこで，

$$\varphi(L_1) - r_2 f(\varphi(R^*) - r_2 f(L_1)) = L_1 - H(L_1) > L_1. \tag{2.14}$$

ゆえに L_1 は $n > \xi_2$ に対し，x_n の下界となる，すなわち，$x_n > L_1$，$n > \xi_2$ となる．

次に $n > \xi_3$ に対する x_n の上界を考えよう．$n > \xi_3$ に対し，

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) - rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j f(x_{n-j-1}) \leq \varphi(R^*) - r_2 f(L_1),$$

なので，$R_2 := \varphi(R^*) - r_2 f(L_1) > 0$ に対し，$x_n \leq R_2$，$n > \xi_3$ となる．さらに，$L_1 < 0$ に対し，

$$R^* - R_2 = R^* - (\varphi(R^*) - r_2 f(L_1)) > R^* - (\varphi(R^*) + r_2) \geq 0$$

より，$0 < R_2 < R^*$ を得る．

$n > \xi_4$ に対し，x_n の下界を考えよう．$0 < R_2 < R^*$ なので，$n > \xi_4$ に対し，

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) - rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j f(x_{n-j-1}) \geq \varphi(L_1) - r_2 f(R_2).$$

このとき，$L_2 := \varphi(L_1) - r_2 f(R_2) < 0$ に対し，$x_n \geq L_2$，$n > \xi_4$ となり，かつ (2.14) より，$L_1 < L_2 < 0$ を得る．

次に，$k \geq 1$ に対し，

$$\begin{cases} R_k := \varphi(R_{k-1}) - r_2 f(L_{k-1}), & 0 < R_k < R_{k-1} \leq R^* \\ L_k := \varphi(L_{k-1}) - r_2 f(R_k), & L_1 \leq L_{k-1} < L_k < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n \le R_k, & n > \xi_{2k-1}, \\ x_n \ge L_k, & n > \xi_{2k} \end{cases}$$

を仮定する．

$n > \xi_{2(k+1)-1}$ に対する x_n の上界を考えると，

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) - rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j f(x_{n-j-1}) \le \varphi(R_k) - r_2 f(L_k).$$

それゆえに，$R_{k+1} := \varphi(R_k) - r_2 f(L_k) > 0$ に対し，

$$x_n \le R_{k+1}, \qquad n > \xi_{2(k+1)-1}$$

かつ
$$R_{k+1} = \varphi(R_k) - r_2 f(L_k) < \varphi(R_{k-1}) - r_2 f(L_{k-1}) = R_k.$$

同様に，$n > \xi_{2(k+1)}$ に対する x_n の下界を考えよう．

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) - rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j f(x_{n-j-1}) \ge \varphi(L_k) - r_2 f(R_{k+1})$$

であり，また $L_{k+1} := \varphi(L_k) - r_2 f(R_{k+1}) < 0$ に対し，

$$x_n \ge L_{k+1}, \qquad n > \xi_{2(k+1)}$$

となる．さらに，

$$L_{k+1} = \varphi(L_k) - r_2 f(R_{k+1}) > \varphi(L_{k-1}) - r_2 f(R_k) = L_k.$$

最後に，$R = \lim_{k\to\infty} R_k$ と $L = \lim_{k\to\infty} L_k$ に対し，$R = L = 0$ を示そう．

$$R = \varphi(R) - r_2 f(L), \qquad L = \varphi(L) - r_2 f(R)$$

なので，次を得る．

$$r_1 f(R) + r_2 f(L) = 0, \qquad r_1 f(L) + r_2 f(R) = 0.$$

仮定より，$0 \le r_2 < r_1 < 1$ なので，$f(R) = f(L) = 0$ となる．これより，$R = L = 0$. ゆえに，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ を得る． □

補題 2.3 の証明については (2.13) の $\lim_{L\to-\infty} H(L) < 0$ という条件が必要である．特に $f(x) = e^x - 1$ の場合，この条件は $r_1 + r_2 - \frac{r_2}{r_1} e^{r_1 + r_2 - 1} > 0$ となる．しかし，これは必要ない (定理 A 参照).

補題 2.4 (2.4) で $\varphi(x)$ が唯一の極大値を

$$R^* > 0 \tag{2.15}$$

で持ち，かつ

$$R^* < \varphi(R^*) + r_2 \tag{2.16}$$

と仮定する．このとき，

$$R^* = \varphi(R^*) - r_2 f(\bar{L}) \tag{2.17}$$

となる唯一の $\bar{L} < 0$ が存在し，任意の $\bar{L} < L \le 0$ に対し，

$$R^* > \varphi(R^*) - r_2 f(L) > 0 \tag{2.18}$$

となる．$L \leq \bar{L}$ に対し，

$$G(L) \equiv \min\{\varphi(L), \varphi(\varphi(R^*) - r_2 f(L))\} - r_2 f(\varphi(R^*) - r_2 f(L)) \tag{2.19}$$

とおく．$r_1 > r_2$ と任意の $L \leq \bar{L}$ に対し，

$$G(L) > L \tag{2.20}$$

ならば，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ となる．

証明 $f'(L) > 0$ であり，$0 < R^* < \varphi(R^*) + r_2$ なので，

$$\lim_{L\to-\infty}(r_1 f(R^*) + r_2 f(L)) = r_1 f(R^*) - r_2 < 0 < r_1 f(R^*) = \lim_{L\to 0}(r_1 f(R^*) + r_2 f(L)).$$

ゆえに平均値の定理により，$r_1 f(R^*) + r_2 f(\bar{L}) = 0$, すなわち，$R^* = \varphi(R^*) - r_2 f(\bar{L})$ となる唯一の $\bar{L} < 0$ が存在する．

もし，偶然にある時より x_n が非正もしくは非負ならば，補題 2.1 より，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ を得る．

それゆえに，偶然にある時より x_n は非正にも非負にもならないと仮定すると，補題 2.2 の証明で定義された列 $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在し，

$$\begin{aligned} n > \xi_1 \text{ に対し，} \quad & x_n \leq R_1 = r(m+1) \\ n > \xi_2 \text{ に対し，} \quad & x_n \geq -r(m+1)f(r(m+1)). \end{aligned}$$

最初に，$\bar{L} < -r(m+1)f(r(m+1))$ の場合を考える．$L_1 = -r(m+1)f(r(m+1)) > \bar{L}$ とすると，$L_1 < 0$ かつ，$n > \xi_2$ に対して，$x_n \geq L_1$ となる．

次に，$n > \xi_3$ に対する x_n の上界を考える．$1 \leq j \leq m$ に対して，$n > \xi_3$, $n - j - 1 > \xi_2$ なので，

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) - rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j f(x_{n-j-1}) \leq \varphi(R^*) - r_2 f(L_1).$$

$R_2 = \varphi(R^*) - r_2 f(L_1)$ とおくと，$0 \leq R_2 < \varphi(R^*) - r_2 f(\bar{L}) = R^*$ で，$n > \xi_3$ に対して $x_n \leq R_2$ となる．
続けて $n > \xi_4$ に対する x_n の下界を考えると，$\varphi(L_1) < 0 \leq \varphi(R_2)$ なので，$\min\{\varphi(L_1), \varphi(R_2)\} = \varphi(L_1)$ となる．$n > \xi_4$ に対して $n - j - 1 > \xi_3$, $1 \leq j \leq m$ より，

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) - rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j f(x_{n-j-1}) \geq \varphi(L_1) - r_2 f(R_2).$$

$L_2 = \max(L_1, \varphi(L_1) - r_2 f(R_2))$ とおくと，$L_1 \leq L_2 < 0$ かつ $n > \xi_4$ に対して $x_n \geq L_2$ である．

同様に $n > \xi_5$ に対する x_n の上界を考えると，

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) - rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j f(x_{n-j-1}) \leq \varphi(R_2) - r_2 f(L_2).$$

$R_3 = \varphi(R_2) - r_2 f(L_2)$ とおくと，$0 < R_3 = \varphi(R_2) - r_2 f(L_2) < \varphi(R^*) - r_2 f(L_1) = R_2 < R^*$ であり，かつ $n > \xi_5$ に対して $x_n \leq R_3$ となる．

正の整数 $k \geq 2$ に対して，次のことを仮定する:

$$\begin{cases} R_k = \varphi(R_{k-1}) - r_2 f(L_{k-1}), & 0 < R_k < R_{k-1}, \\ L_k = \max(L_{k-1}, \varphi(L_{k-1}) - r_2 f(R_k)), & L_{k-1} \leq L_k < 0, \\ n > \xi_{2k-1} \text{ に対して，} x_n \leq R_k, \quad \text{かつ} & n > \xi_{2k} \text{ に対して，} x_n \geq L_k. \end{cases}$$

$n > \xi_{2(k+1)-1}$ に対する x_n の上界を考えよう．

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) - rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j f(x_{n-j-1}) \leq \varphi(R_k) - r_2 f(L_k).$$

$R_{k+1} = \varphi(R_k) - r_2 f(L_k)$ とおくと，

$$R_{k+1} = \varphi(R_k) - r_2 f(L_k) < \varphi(R_{k-1}) - r_2 f(L_{k-1}) = R_k$$

かつ $n > \xi_{2(k+1)-1}$ に対して，$x_n \le R_{k+1}$ となる．同様に，$n > \xi_{2(k+1)}$ に対する x_n の下界を考えると，

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) - rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j f(x_{n-j-1}) \ge \varphi(L_k) - r_2 f(R_{k+1}).$$

$L_{k+1} = \max(L_k, \varphi(L_k) - r_2 f(R_{k+1}))$ とおくと，$L_{k+1} \ge L_k$ かつ，$n > \xi_{2(k+1)}$ に対して，$x_n \ge L_{k+1}$ となる．帰納法により，狭義単調減少列 $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ と単調増加列 $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ を得る．

今，$R = \lim_{k\to\infty} R_k$，$L = \lim_{k\to\infty} L_k$ とおくと

$$R = \varphi(R) - r_2 f(L), \qquad L = \max(L, \varphi(L) - r_2 f(R)) \ge \varphi(L) - r_2 f(R)$$

を得る．これより，

$$r_1 f(R) + r_2 f(L) = 0, \qquad r_1 f(L) + r_2 f(R) \ge 0.$$

$f(R) = -\frac{r_2}{r_1} f(L)$ なので，$(r_1 - \frac{r_2^2}{r_1}) f(L) \ge 0$. 仮定より，$r_1 > r_2$ なので，$f(R) = f(L) = 0$ を得る．

ゆえに，$R = L = 0$ となる．よって $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ を得る．

次に，$-r(m+1)f(r(m+1)) \le \bar{L}$ の場合を考えよう．

$L_1 = -r(m+1)f(r(m+1))$ とおくと $n > \xi_2$ に対し $x_n \ge L_1$ を得る．$n > \xi_3$ に対する x_n の上界を考えると，

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) - rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j f(x_{n-j-1}) \le \varphi(R^*) - r_2 f(L_1).$$

$R_2 = \varphi(R^*) - r_2 f(L_1)$ とおくと，$n > \xi_3$ に対して $x_n \le R_2$ を得る．$n > \xi_4$ に対する x_n の下界を考える．

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) - rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j f(x_{n-j-1}) \ge \min\{\varphi(L_1), \varphi(R_2)\} - r_2 f(R_2).$$

$L_2 = \min\{\varphi(L_1), \varphi(R_2)\} - r_2 f(R_2)$ とおくと，$n > \xi_4$ に対して $x_n \ge L_2$ を得る．

今，x_n の下界だけに着目すると，ある正の整数 k に対して，$n > \xi_{2k}$ について，$x_n \ge L_k$ となる．

$L_k \le \bar{L}$ を仮定しよう．$n > \xi_{2(k+1)-1}$ に対する x_n の上界を考えると，

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) - rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j f(x_{n-j-1}) \le \varphi(R^*) - r_2 f(L_k).$$

$R_{k+1} = \varphi(R^*) - r_2 f(L_k)$ とすると，$n > \xi_{2(k+1)}$ に対して $x_n \le R_{k+1}$ を得る．

今，$n > \xi_{2(k+1)}$ に対する x_n の下界を考えると

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) - rN^* \sum_{j=1}^{m} a_j f(x_{n-j-1}) \ge \min\{\varphi(L_k), \varphi(R_{k+1})\} - r_2 f(R_{k+1}).$$

$L_{k+1} = \min\{\varphi(L_k), \varphi(R_{k+1})\} - r_2 f(R_{k+1})$ とおくと，

$$L_{k+1} = \min\{\varphi(L_k), \varphi(\varphi(R^*) - r_2 f(L_k))\} - r_2 f(\varphi(R^*) - r_2 f(L_k)).$$

これより，$n > \xi_{2(k+1)+1}$ に対して $x_n \ge L_{k+1}$ を得る．ここで，仮定より，$L_{k+1} = G(L_k) > L_k$ を得る．また仮定より，任意の $L < \bar{L}$ に対して $G(L) > L$ となるので，$L_{k_0-1} \le \bar{L} < L_{k_0}$ となるある正の整数 k_0 が存在し，$n > \xi_{2k_0+1}$ に対して，$x_n \ge L_{k_0} > \bar{L}$ となる．$L > \bar{L}$ に対し，$\varphi(R^*) - r_2 f(L) < \varphi(R^*) - r_2 f(\bar{L}) = R^*$. それゆえに $\bar{L} \le -r(m+1)f(r(m+1))$ の場合と同様に，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ を得る． □

補題 2.5 (2.4) で, $\varphi(x)$ は唯一の極大値を

$$R^* = 0 \tag{2.21}$$

で持つと仮定する. このとき,

$$R^* < \varphi(R^*) + r_2 \tag{2.22}$$

$$R^* = \varphi(R^*) - r_2 f(\bar{L}) \tag{2.23}$$

となる唯一の $\bar{L} = 0$ が存在する. 任意の $L < 0$ と補題 2.4 の $G(L)$ に対し,

$$G(L) > L \tag{2.24}$$

ならば, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ となる.

この補題の証明は補題 2.4 の $\bar{L} < 0$ かつ $-r(m+1)f(r(m+1)) \leq \bar{L}$ の場合と同様である.

3 定理 1.1 の証明

正の平衡解 N^* に対して, (1.1) の任意の解 $N(t)$ が $\lim_{t\to\infty} N(t) = N^*$ となる必要十分条件は (2.1) の零解が大域吸引性を持つ, すなわち, (2.1) の任意の解 $x(t)$ が $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ となることである.

本節では $f(x) = e^x - 1$ と制限し, まず $r_2 = 0$ の場合の条件を求め, 続いて $r_2 > 0$ の場合に, 補題 2.2 の任意の $L < 0$ に対する $F(L) > L$ となる条件, 補題 2.4 の任意の $L < \bar{L}$ に対する $G(L) > L$ となる条件, そして, 補題 2.5 の任意の $L < 0$ に対する $G(L) > L$ となる条件を具体的に示す. 尚, $f(x) = e^x - 1$ の場合, 補題 2.3 の条件は定理 A により, (1.5) と特別になる.

補題 3.1 (2.4) で,

$$\tilde{\varphi}(x) = x - (r_1 + r_2)f(x), \qquad -\infty < x < +\infty \qquad \text{とおき,} \tag{3.1}$$

$$0 < r_1 + r_2 \leq 2 \tag{3.2}$$

を仮定する. このとき,

$$\begin{cases} \text{任意の } L < 0 \text{ に対し, } \tilde{\varphi}^2(L) > L \\ \text{任意の } R > 0 \text{ に対し, } \tilde{\varphi}^2(R) < R. \end{cases} \tag{3.3}$$

また, $r_2 = 0$ となる (2.3)-(2.5) を考えると, $0 < r = r_1 \leq 2$ で, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ となる.

証明 次の関数を考える.

$$g_1(t) = t + te^{(r_1+r_2)(1-t)}, \qquad 0 < t < +\infty.$$

このとき, $f(x) = e^x - 1$ に対し,

$$\tilde{\varphi}^2(x) = \tilde{\varphi}(\tilde{\varphi}(x)) = \tilde{\varphi}(x) - (r_1 + r_2)(e^{\tilde{\varphi}(x)} - 1) = x + (r_1 + r_2)\{2 - e^x - e^{x-(r_1+r_2)(e^x-1)}\}.$$

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}^2(x) - x = (r_1 + r_2)\{2 - g_1(e^x)\}, \\ g_1'(t) = 1 + \{1 - (r_1 + r_2)t\}e^{(r_1+r_2)(1-t)}, \\ g_1''(t) = (r_1 + r_2)\{(r_1 + r_2)t - 2\}e^{(r_1+r_2)(1-t)}. \end{cases}$$

よって

$$g_1'(t) \geq g_1'\left(\frac{2}{r_1 + r_2}\right) = 1 - e^{(r_1+r_2)-2} \geq 0, \qquad 0 < t < +\infty.$$

$g_1(t)$ は $(0, +\infty)$ 上で t の狭義単調増加関数であり,

$$\begin{cases} g_1(t) < g_1(1) = 2, & t < 1 \\ g_1(t) > g_1(1) = 2, & t > 1. \end{cases}$$

これより，(3.3) を得る．

$r_2 = 0$ となる (2.3)-(2.5) に対し，Matsunaga 他 [4] によって，$0 < r = r_1 \leq 2$ で $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ となる．□

補題 3.2 (2.4) で，

$$r_1 > r_2 > 0,\ \ r_1 > 1 \qquad \text{かつ} \qquad r_1 + r_2 - \frac{r_2}{r_1}e^{r_1+r_2-1} \geq 0 \tag{3.4}$$

を仮定する．このとき，$\varphi(x)$ は唯一の極大値を $L^* = -\ln r_1 < 0$ で持つ．

a) $L \leq 0$ に対し，

$$G_1(L) = \varphi(L) - r_2 f(\bar{R}^*_L) - L,\quad \tilde{G}_1(L) = r_1 f(L) + r_2 f(\bar{R}^*_L) \qquad \text{かつ} \qquad \bar{R}^*_L = \varphi(L^*) - r_2 f(L)$$

とおく．このとき，次が成り立つ．

i) $\lim_{L\to-\infty} \tilde{G}_1(L) \leq 0$.

ii) $\tilde{G}_1(L^*) < 0$.

iii) ある $L < L^*$ に対して，$\tilde{G}_1'(L) = 0$ ならば，$\tilde{G}_1(L) < 0$.

よって，任意の $L \leq L^*$ に対し，$\tilde{G}_1(L) < 0$，すなわち $G_1(L) > 0$ となる．

b) $L \leq 0$ に対し，

$$G_2(L) = \varphi(\bar{R}^*_L) - r_2 f(\bar{R}^*_L) - L \qquad \text{かつ} \qquad \bar{R}^*_L = \varphi(L^*) - r_2 f(L) \tag{3.5}$$

とおく．このとき，次が成り立つ．

i) $\lim_{L\to-\infty} G_2(L) = +\infty$.

ii) $G_2(L^*) = \tilde{\varphi}^2(L^*) - L^* > 0$.

iii) $L \leq L^*$ に対し，$G_2'(L) < 0$.

よって，任意の $L \leq L^*$ に対し，$G_2(L) > 0$ となる．

c) $L \leq 0$ に対し，

$$G_3(L) = \varphi(\bar{R}_L) - r_2 f(\bar{R}_L) - L \qquad \text{かつ} \qquad \bar{R}_L = \varphi(L) - r_2 f(L) \tag{3.6}$$

とおく．このとき，任意の $L^* \leq L < 0$ に対し，$G_3(L) = \tilde{\varphi}^2(L) - L > 0$ となる．

証明 a) i) 仮定より，

$$\lim_{L\to-\infty} \tilde{G}_1(L) = \frac{r_2}{r_1}e^{(r_1+r_2)-1} - (r_1 + r_2) \leq 0.$$

ii) $\varphi'(x) = 1 - r_1 e^x$ より，(3.4) 式から，$L^* = -\ln r_1 < 0$ かつ $\bar{R}^*_L = -\ln r_1 + (r_1 + r_2) - 1 - r_2 e^L$ と

$$\tilde{G}_1(L^*) = 1 - (r_1 + r_2) + \frac{r_2}{r_1}e^{(r_1+r_2)(1-\frac{1}{r_1})}$$

を得る．ここで，

$$g_2(x) = 1 - (x + r_2) + \frac{r_2}{x}e^{(x+r_2)-1-\frac{r_2}{x}}, \qquad 1 < x \leq 2 - r_2,$$

$$g_2'(x) = -1 + (-\frac{x - r_2}{x^2} + 1)\frac{r_2}{x}e^{(x+r_2)-1-\frac{r_2}{x}} \leq -1 + \frac{r_2}{x}e^{1-\frac{r_2}{x}}, \qquad 1 < x \leq 2 - r_2.$$

$$\frac{r_2}{2-r_2} \leq t < 1 \quad \text{に対する} \quad g_3(t) = te^{1-t}$$

に対し，

$$g_3'(t) = (1-t)e^{1-t} > 0, \quad \frac{r_2}{2-r_2} \leq t < 1, \qquad g_3(t) < g_3(1) = 1, \quad \frac{r_2}{2-r_2} \leq t < 1.$$

よって，$g_2'(x) < -1 + g_3(1) = 0$，$1 < x \leq 2 - r_2$ となる．これより，$g_2(x)$ は $[1, 2 - r_2]$ 上での狭義単調減少関数であり，$\tilde{G}_1(L^*) = g_2(r_1) < g_2(1) = 0$ となる．

---,

$$\tilde{G}_1'(L) = r_1 e^L + \frac{r_2}{r_1} e^{r_1+r_2-1-r_2e^L}(-r_2 e^L)$$

なので，$\tilde{G}_1'(L) = 0$ より

$$r_1 e^L = \frac{r_2^2}{r_1} e^L e^{r_1+r_2-1-r_2e^L}$$

が示される．それゆえに，$L \le L^*$ に対して $\tilde{G}_1'(L) = 0$ ならば，$r_1 + r_2 \ge \frac{r_2}{r_1} e^{r_1+r_2-1}$，かつ $x > 0$ に対し $x + 1 < e^x$ なので，

$$\tilde{G}_1(L) = r_1 e^L + \frac{r_2}{r_1} e^{r_1+r_2-1-r_2e^L} - (r_1+r_2) = \frac{r_2}{r_1} e^{r_1+r_2-1-r_2e^L}(r_2e^L+1) - (r_1+r_2) \le (r_1+r_2)\left(\frac{r_2e^L+1}{e^{r_2e^L}} - 1\right) < 0$$

が成り立つ．ゆえに，**a)** i)-iii) から，任意の $L \le L^*$ に対し，$G_1(L) > 0$ となる．

b) i) $\bar{R}_L^* = -\ln r_1 - (r_1+r_2) - 1 - r_2 e^L$ より，

$$\begin{cases} G_2(L) = -\ln r_1 + 2(r_1+r_2) - 1 - r_2e^L - \frac{r_1+r_2}{r_1} e^{r_1+r_2-1-r_2e^L} - L, \\ \lim\limits_{L\to-\infty} G_2(L) = -\ln r_1 + 2(r_1+r_2) - 1 - \frac{r_1+r_2}{r_1} e^{r_1+r_2-1} - \lim\limits_{L\to-\infty} L = +\infty. \end{cases}$$

ii) $L^* < 0$ なので補題 3.1 より，$G_2(L^*) = \tilde{\varphi}^2(L^*) - L^* > 0$ となる．

iii)

$$G_2'(L) = -r_2 e^L\left(1 - \frac{r_1+r_2}{r_1} e^{r_1+r_2-1-r_2e^L}\right) - 1 \quad \text{かつ} \quad \lim_{L\to-\infty} G_2'(L) = -1 < 0$$

が成り立ち，

$$G_2'(L^*) = -\frac{r_2}{r_1}\left(1 - \frac{r_1+r_2}{r_1} e^{(r_1+r_2)(1-\frac{1}{r_1})}\right) - 1 = \frac{r_1+r_2}{r_1}\left(\frac{r_2}{r_1} e^{(r_1+r_2)(1-\frac{1}{r_1})} - 1\right).$$

今，$\frac{1}{2} \le t < 1$ に対して，$g_4(t) = (2t-1)e^{2(1-t)} - 1$ とおくと，

$$g_4'(t) = 4(1-t)e^{2(1-t)} > 0, \qquad \frac{1}{2} \le t < 1.$$

これより，$g_4(t) < g_4(1) = 0$, $\frac{1}{2} \le t < 1$ となるので，

$$\frac{r_2}{r_1} e^{(r_1+r_2)(1-\frac{1}{r_1})} - 1 \le \frac{2-r_1}{r_1} e^{2(1-\frac{1}{r_1})} - 1 = g_4\left(\frac{1}{r_1}\right) < g_4(1) = 0.$$

ゆえに，$G_2'(L^*) < 0$ かつ $L^* < 0$ となる．また，$L \le L^*$ に対し，

$$G_2''(L) = -r_2 e^L\left\{1 - (1 - r_2e^L)\frac{r_1+r_2}{r_1} e^{r_1+r_2-1-r_2e^L}\right\}.$$

これより，$\hat{L} < 0$ に対し，$G_2''(\hat{L}) = 0$ ならば，$r_2 > 0$ なので，

$$\frac{r_1+r_2}{r_1} e^{r_1+r_2-1} = \frac{e^{r_2e^{\hat{L}}}}{1 - r_2e^{\hat{L}}}$$

を満たす．一方，連立方程式

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2 \\ r_1 + r_2 - \frac{r_2}{r_1} e^{r_1+r_2-1} = 0 \end{cases}$$

は唯一の解 $(\bar{r}_1, \bar{r}_2)$ を持ち，$\bar{r}_1 = \frac{2e}{e+2} < 2$，$\bar{r}_2 = \frac{4}{e+2} < 1$ である．しかも，(3.4) を満たす任意の r_1 と r_2 に対して，$0 \le r_2 \le \bar{r}_2$，$1 \le r_1 \le 2 - r_2$ となる．

今，$0<r_2\le\bar{r}_2$ と固定した r_2 に対し，r_1 の関数 $p(r_1;r_2)=\frac{r_1+r_2}{r_1}e^{r_1+r_2-1}$ は

$$\frac{dp(r_1;r_2)}{dr_1}=\frac{r_2(r_1-1)}{r_1^2}e^{r_1+r_2-1}>0$$

なので，$[1,2-r_2]$ 上で狭義単調増加関数になる．これより，$0<r_2\le\bar{r}_2$ に対して，

$$p(r_1;r_2)\le p(2-r_2;r_2)=\frac{2e}{2-r_2}\le\frac{2}{2-\bar{r}_2}=e+2.$$

関数 $h_1(x)=\frac{e^x}{1-x}$ は $[0,1)$ 上の狭義単調増加関数で，方程式 $\dfrac{e^x}{1-x}=e+2$ は唯一の正の解 $\hat{x}=0.60995\cdots<1$ を持つ．したがって，$\hat{L}<0$ に対し $G_2''(\hat{L})=0$ ならば，(3.4) を満たす任意の r_1，r_2 に対し $r_2e^{\hat{L}}\le\hat{x}<1$ で

$$G_2'(\hat{L})=-r_2e^{\hat{L}}(1-\frac{1}{1-r_2e^{\hat{L}}})-1=\frac{(r_2e^{\hat{L}})^2+r_2e^{\hat{L}}-1}{1-r_2e^{\hat{L}}},\qquad \text{かつ}$$
$$(r_2e^{\hat{L}})^2+r_2e^{\hat{L}}-1\le\hat{x}^2+\hat{x}-1=-0.01800\cdots<0,$$

つまり，$G_2'(\hat{L})<0$ となる．これより，$L\le L^*$ に対し $G_2'(L)<0$ を得る．

ゆえに，**b)** ii) から，任意の $L\le L^*$ に対して $G_2(L)\ge G_2(L^*)>0$ となる．

c) 補題 3.1 より，任意の $L^*\le L<0$ に対して，$G_3(L)=\tilde{\varphi}^2(L)-L>0$ となる．□

補題 3.3 (2.4) で，

$$1>r_1>r_2>0,\quad r_1+r_2>1\quad \text{かつ}\quad r_1+r_2-\frac{r_2}{r_1}e^{r_1+r_2-1}\ge 0 \tag{3.7}$$

を仮定する．このとき，$\varphi(x)$ は唯一の極大値を $R^*=-\ln r_1>0$ で持つ．

a) $L\le 0$ に対し，

$$G_4(L)=\varphi(L)-r_2f(\bar{R}_L^*)-L,\quad \tilde{G}_4(L)=r_1f(L)+r_2f(\bar{R}_L^*)\quad \text{かつ}\quad \bar{R}_L^*=\varphi(R^*)-r_2f(L)$$

とする．このとき，

$$R^*=\varphi(R^*)-r_2f(\bar{L}) \tag{3.8}$$

を満たす唯一の $\bar{L}<0$ が存在し，次が成り立つ．

i) $\lim_{L\to-\infty}\tilde{G}_4(L)\le 0$.

ii) $\tilde{G}_4(\bar{L})<0$.

iii) $\tilde{G}_4'(\bar{L})>0$.

よって，任意の $L\le\bar{L}$ に対し，$G_4(L)>0$ となる．

b) $L\le 0$ に対し，

$$G_5(L)=\varphi(\bar{R}_L^*)-r_2f(\bar{R}_L^*)-L,\qquad \bar{R}_L^*=\varphi(R^*)-r_2f(L) \tag{3.9}$$

とする．このとき，任意の $L\le\bar{L}$ に対し，$\varphi(\bar{R}_L^*)>\varphi(L)$ で $G_5(L)=\tilde{\varphi}(\bar{R}_L^*)-L>G_4(L)>0$ となる．

証明 a) i)

$$\lim_{L\to-\infty}\tilde{G}_4(L)=-(r_1+r_2)+\frac{r_2}{r_1}e^{r_1+r_2-1}\le 0.$$

ii) $\varphi'(x)=1-r_1e^x$ なので，(3.7) より，$R^*=-\ln r_1>0$ と $R^*>\varphi(R^*)+r_2$ を得る．これより，補題 2.4 と $r_2>0$ から，$R^*=\varphi(R^*)-r_2f(\bar{L})$ を満たす唯一の $\bar{L}<0$ が存在する．

$$r_1f(R^*)+r_2f(\bar{L})=0\qquad \text{かつ}\qquad f(\bar{L})=-\frac{r_1}{r_2}f(R^*)$$

より，$e^{\bar{L}}=1-\frac{1}{r_2}(1-r_1)$ となる．また，

$$\begin{cases} \tilde{G}_4(L)=r_1(e^L-1)+r_2(\frac{1}{r_1}e^{r_1+r_2-1-r_2e^L}-1) \\ \tilde{G}_4'(L)=r_1e^L+\frac{r_2}{r_1}(-r_2e^L)e^{r_1+r_2-1-r_2e^L}=e^L(r_1-\frac{r_2^2}{r_1}e^{r_1+r_2-1-r_2e^L}) \end{cases}$$

より，

$$\tilde{G}_4(\bar{L})=r_1(e^{\bar{L}}-1)+r_2(\frac{1}{r_1}e^{r_1+r_2-1-r_2e^{\bar{L}}}-1)=-\frac{r_1}{r_2}(1-r_1)+r_2(\frac{1}{r_1}-1)=\frac{1-r_1}{r_1r_2}(r_2^2-r_1^2)<0$$

を得る．よって，$\tilde{G}_4(\bar{L})<0$ となる．

iii)

$$\tilde{G}_4'(\bar{L})=e^{\bar{L}}(r_1-\frac{r_2^2}{r_1})>0.$$

$\tilde{G}_4'(L)$ が唯一つの零点を持つので，**a)** の i)-iii) によって，$L\leq\bar{L}$ に対して，$G_4(L)>0$ が示される．

b) $L\leq\bar{L}$ に対して，$\varphi(\bar{R}_L^*)>\varphi(L)$ を示そう．ただし，$\bar{R}_L^*=\varphi(R^*)-r_2f(L)$ である．

$$g_5(L)=\varphi(\bar{R}_L^*)-\varphi(L)$$

とおくと，$\bar{R}_L^*=-\ln r_1+(r_1+r_2)-1-r_2e^L$ と

$$g_5'(L)=(1-r_1e^{\bar{R}_L^*})(-r_2e^L)-(1-r_1e^L)=r_2e^L(e^{r_1+r_2-1-r_2e^L}-1)+(r_1e^L-1),\quad L\leq\bar{L}$$

を得る．

$$g_5''(L)=r_2(1-r_2e^L)e^Le^{r_1+r_2-1-r_2e^L}+(r_1-r_2)e^L>0,\qquad L\leq\bar{L}.$$

これより，$L\leq\bar{L}$ に対して，$r_1+r_2-1-r_2e^{\bar{L}}=0$ より

$$g_5'(L)\leq g_5'(\bar{L})=r_1e^{\bar{L}}-1=-(1-r_1)(1+\frac{r_1}{r_2})<0$$

を得る．ゆえに，$L\leq\bar{L}$ に対して，$\bar{R}_{\bar{L}}^*=\varphi(R^*)-r_2f(\bar{L})=R^*$ より，

$$g_5(L)\geq g_5(\bar{L})=\varphi(R^*)-\varphi(\bar{L})>0$$

から，$L\leq\bar{L}$ に対して，$\varphi(\bar{R}_L^*)>\varphi(L)$ を得る．よって，(3.9) と **a)** より，任意の $L\geq\bar{L}$ に対して，$G_5(L)\geq G_4(L)>0$ が示される．　□

補題 3.4 (2.4) で，

$$r_1=1,\quad r_2>0\qquad かつ\qquad r_2(e^{r_2}-1)\leq 1 \tag{3.10}$$

を仮定する．このとき，$\varphi(x)$ は唯一の極大値を $R^*=0$ で持ち，(2.22)-(2.23) 及び，次が成り立つ．

a) $R^*=0$ となる補題 3.3 の $G_4(L)$ を考えると，任意の $L<\bar{L}=0$ に対し，$G_4(L)>0$ が成り立つ．

b) $R^*=0$ となる (3.9) の $G_5(L)$ を考えると，任意の $L<\bar{L}=0$ に対し，$G_5(L)=\tilde{\varphi}(\bar{R}_L^*)-L>0$.

証明　$\bar{L}<0$ に対する補題 3.3 a) と b) と同様に証明される．　□

補題 3.4 は (3.10) が成り立つならば，補題 2.5 の (2.21)-(2.24) が満たされ，$\lim_{n\to\infty}x_n=0$ となる．

$$r_1>r_2\geq 0\qquad かつ\qquad r_1+r_2\leq 1 \tag{3.11}$$

の場合は定理 A により，$\lim_{n\to\infty}x_n=0$ となる．

定理 1.1 の証明

$0 < r_1 \leq 2$ かつ $r_2 = 0$ の場合，(3.4), (3.7), (3.10) 及び (3.11) の各場合は，それぞれ補題 3.1-3.4 が成り立ち，補題 2.1-2.2，2.4-2.5 及び，定理 A より，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ となる．また，補題 2.1-2.5 の各証明により，(2.1) の零解は一様安定となるので，(1.1) の正の平衡点 N^* は大域漸近安定となり，定理 1.1 は証明される． □

最後に，定理 A, B, C の各条件と定理 1.1 の条件 (1.8) の関係を図 1 に示す．

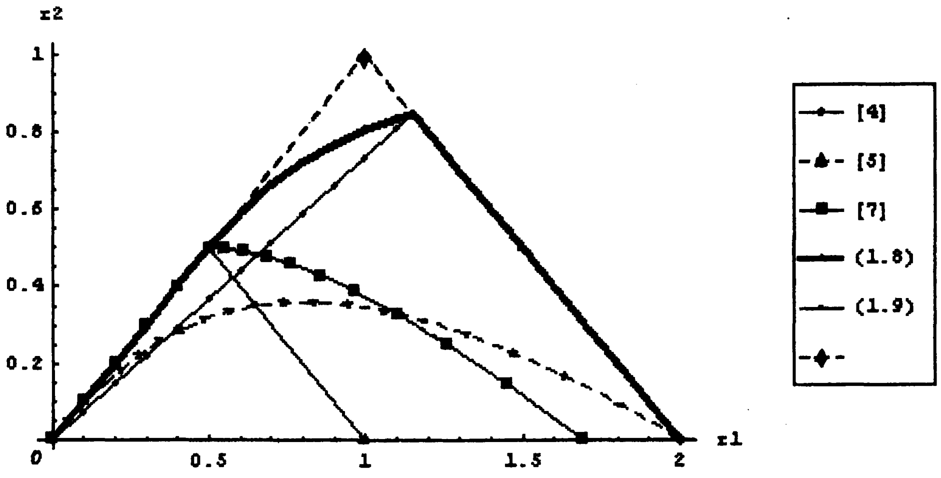

図 1: 定理 A,B,C の各条件と条件 (1.8) の関係

参考文献

[1] K. Gopalsamy, M.R.S. Kulenovic and G. Ladas, On a logistic equation with piecewise constant arguments, *Differential and Integral Equations*, **4** (1991), 215-223.

[2] P. Liu and K. Gopalsamy, Global stability and chaos in a population model with piecewise constant arguments, Appl. Math. Comp. **101** (1999), 63-88.

[3] H. Matsunaga, T. Hara and S. Sakata, Global attractivity for a logistic equation with piecewise constant argument, *Nonlinear Differ. Equ. and Appl.* **8** (2001), 45-52.

[4] Y. Muroya, A sufficient condition on global stability in a logistic equation with piecewise constant arguments, *Hokkaido Math. J.* **32** (2003), 75-83.

[5] Y. Muroya, Persistence, contractivity and global stability in logistic equations with piecewise constant delays, *J. Math. Anal. Appl.* **270** (2002), 602-635.

[6] Y. Muroya, Persistence and global stability for discrete models of nonautonomous Lotka-Volterra type, *J. Math. Anal. Appl.* **273** (2002), 492-511.

[7] Y. Muroya, Global stability in discrete models of nonautonomous Lotka-Volterra type, to appear in *Hokkaido Math. J.*

[8] G. Seifert, Certain systems with piecewise constant feedback controls with a time delay, *Differential and Integral Equations* **6** (1993), 937-947.

[9] J. W-H So and J. S. Yu, Global stability in a logistic equation with piecewise constant arguments, *Hokkaido Math. J.* **24** (1995), 269-286.

[10] W. Wang, G. Mulone, F. Salemi and V. Salone, Global stability of discrete population models with time delys and flucturating environment, *J. Math. Anal. Appl.* **264** (2001), 147-167.